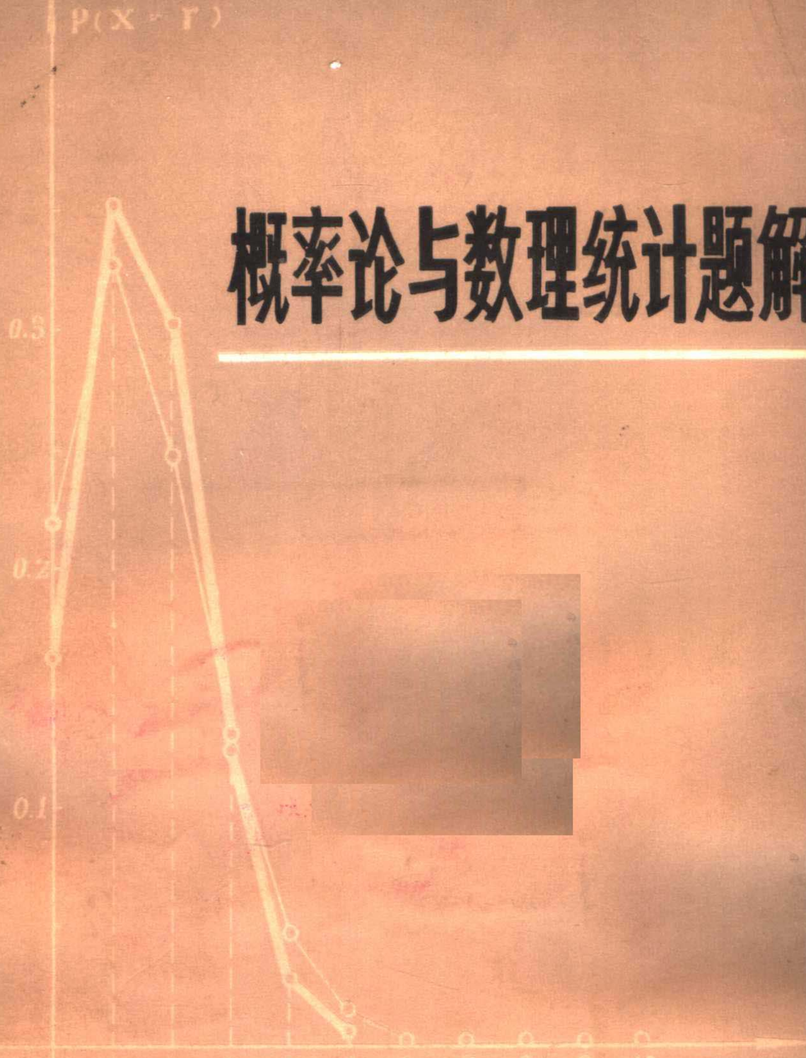
概率论与数理统计题解



丁吉豫　曲立学　编

黑龙江人民出版社

概率论与数理统计题解

丁吉豫　曲立学　编

黑龙江人民出版社

1981年·哈尔滨

封面设计：俞锦杰

概率论与数理统计题解

丁吉隆　曲立学

黑龙江人民出版社出版
（哈尔滨市道里森林街42号）
黑龙江新华印刷厂印刷　　黑龙江省新华书店发行
开本787×1092毫米1/32・印张22 6/16・字数455,000
1981年10月第1版　1981年10月第1次印刷
印数1－7,700

统一书号：13093・41　　定价：1.80元

出版说明

概率论与数理统计是一门研究随机现象数量规律的科学，至今已渗透到各个学科领域，在农业、工业、国防和现代科学技术各方面都有着十分广泛的应用。在向四个现代化进军中，学习概率论与数理统计的人越来越多。目前，概率论与数理统计的基本内容不仅包含在高等院校理工科各专业之中，而且在中学数学教材中也增加了它的初步知识。为了满足初学者的学习需要，我们出版了这本《概率论与数理统计题解》。

本书编选解答了有关初等概率论与数理统计的典型题415个。为了便于自学，各单元的有关基本概念、定理和公式均列于本单元之前，文字简练，内容充实，对掌握题解内容颇有益处。

本书有助于帮助读者掌握初等概率论与数理统计的基础理论和基本知识，有助于提高读者的分析问题和解决问题的能力。本书的主要读者对象是中学数学教师和高等院校理工科学员，对成绩优异的高中生也可以选为自学参考用书。

目　　录

一 随机事件与概率

(一) 随机事件

在一组确定条件下的一次观测叫做一个随机试验（简称试验），记作 E。

随机试验的结果叫做**随机事件**(简称**事件**)，记作 A, B, C, …, $\varnothing$, Ω 等。

在试验 E 下，不能再“分解”的事件叫做**基本事件**(或称**简单事件**)。任何事件都是由若干基本事件组合(复合) 而成的。由全体基本事件组成的集合叫做**基本事件空间**，记作 Ω. 如果以 ω_1, ω_2, …, ω_n, …表示试验 E 下的基本事件，则

$$\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\cdots,\ \omega_n,\ \cdots\}.$$

事件的概念只涉及发生与不发生，并不涉及它的其他性质。一事件 A 发生，当且仅当组成 A 的基本事件之一 ω_i 在试验结果中出现。

包含全部基本事件的集 Ω 也是一个事件，在试验 E 下 Ω 必然发生，称为**必然事件**.

不包含任何基本事件的集 $\varnothing$ 也是一事件，在试验 E 下 $\varnothing$ 不可能发生，称为**不可能事件**.

事件之间的关系：

$A\subset B$ （或 $B\supset A$）：表示事件 A 发生必导致事件 B 发

生，即 A 所含基本事件必属于 B，称 A 蕴涵 B（或称 B 包含 A）。

$A=B$：当且仅当 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，称 A 与 B 等价，即两者同时发生或同时不发生。

$A\cup B$：当且仅当 A,B 两事件中至少有一发生时它才发生，称为 A 与 B 的并事件（或称和事件）。它是由属于 A 以及属于 B 的所有基本事件组成的事件，简记作 $A+B$。

$A\cap B$：当且仅当 A 与 B 两事件同时发生时它才发生，称为 A 与 B 的交事件（或称积事件）。它是由既属于 A 又属于 B 的基本事件组成的事件，简记作 AB。

$\overline{A}$：当且仅当 A 不发生时它才发生．它是由 Ω 中不属于 A 的基本事件组成的，称为 A 的**对立事件**（也称**逆事件**），满足条件

$$A\cup\overline{A}=\Omega,\quad A\cap\overline{A}=\varnothing. \tag{1·1}$$

$A-B$：当且仅当 A 发生而 B 不发生时它才发生，称为 A 与 B 的差事件，亦记作 $A\overline{B}$。

在试验 E 实现下，基本事件空间的任何事件 A 都满足关系

$$\varnothing\subset A\subset\Omega.$$

事件的运算关系：

(1) 如果 $A\subset B$，则 $\overline{B}\subset\overline{A}$．反之亦然。

(2) A 为任一事件，有下列关系成立

$$A\cap\Omega=A,\quad \varnothing\cup A=A. \tag{1·2}$$

(3) $A\cap B=B\cap A,\quad A\cup B=B\cup A.$ (1·3)

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C,$$

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C).\qquad(1\cdot4)$$

$$A\cap(A\cup B)=A,\ A\cup(A\cap B)=A.\qquad(1\cdot5)$$

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).\qquad(1\cdot6)$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).\qquad(1\cdot7)$$

(4) 事件的并与交之推广

$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示至少 A_1，A_2，…，A_n 中之一出现的事件。

$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示在事件列 A_1，A_2，…，A_n，…中至少有一出现的事件。

$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=\prod\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生的事件。

$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示事件列 A_1，A_2，…，A_n，…中所有事件同时发生的事件。

(5) 对偶法则

集合运算完全适用于事件之间，对任一组事件 A_1，A_2，…，A_n 有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}.\qquad(1\cdot8)$$

排列、组合公式：

(1) 从 n 个相异元素中选出 r 个的排列数

$$A_n^r=\frac{n!}{(n-r)!}\quad(0\leqslant r\leqslant n),\ n!=n(n-1)\cdots2\cdot1.\qquad(1\cdot9)$$

当$r=n$时为n个相异元素的全排列数，也记作P_n。

(2) 从n个相异元素中允许重复地取出r个的重复排列数

$$\Pi_n^r = n^r \qquad (0\leqslant r\leqslant n). \qquad (1\cdot10)$$

(3) 由m种元素组成n个元素的总体：每种元素分别为$k_1, k_2, \cdots, k_m$个，$k_1+k_2+\cdots+k_m=n$。这n个元素组成的不同排列数

$$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_m!}. \qquad (1\cdot11)$$

(4) 从相异的n个元素中取出r $(0\leqslant r\leqslant n)$ 个的组合数

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{A_r^r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

$$= \frac{n!}{r!\,(n-r)!}, \qquad (1\cdot12)$$

$C_n^0=1$（约定）。

(5) 从相异的n个元素中允许重复地取出r个的重复组合数

$$H_n^r = C_{n+r-1}^r = \frac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!}. \qquad (1\cdot13)$$

(6) 二项式定理

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r a^r b^{n-r}.$$

(7) 多项式定理

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^n$$

$$= \sum_{m_1+m_2+\cdots+m_k=n} \frac{n!}{m_1!\,m_2!\cdots m_k!} a_1^{m_1} a_2^{m_2}\cdots a_k^{m_k}.$$

这里求和号下面的 $m_1+m_2+\cdots+m_k=n$ 表示对所有可能的、和为 n 的 k 个 m_i 的组求和，m_i 为非负整数。

(8) 斯特灵 (Stirling) 公式：对于充分大的 n 有

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n}.$$

更精确地

$$n! = \sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n+\theta_n/12n} \qquad (0<\theta_n<1).$$

1. 设 A, B, C 表示三个随机事件. 试将下列事件用 A, B, C 表示出来.

(1) A 出现，B、C 不出现；

(2) A, B 都出现而 C 不出现；

(3) 所有三个事件都出现；

(4) 三个事件中至少有一个出现；

(5) 三个事件都不出现；

(6) 不多于一个事件出现；

(7) 不多于两个事件出现；

(8) 三个事件中至少两个出现.

解 (1) 事件 A 出现记作 A. 事件 B 不出现，B 的逆事件 $\overline{B}$ 一定出现，记作 $\overline{B}$. 同理，C 不出现，$\overline{C}$ 一定出现，记作 $\overline{C}$. 所求事件："A 出现且 B、C 不出现"表示为 A, $\overline{B}$, $\overline{C}$ 三者同时出现，故应表为 $A\overline{B}\overline{C}$，亦可表为 $A-(B\cup C)$.

(2) A, B 都出现，记作 AB，C 不出现记作 $\overline{C}$，则所求事件表作 $AB\overline{C}=AB-C$.

(3) "三个事件都出现"表为 ABC.

(4) "三个事件中至少有一个出现"表为 $A\cup B\cup C$.

(5) "三个事件都不出现"表为 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}=\overline{(A\cup B\cup C)}$.

(6) "不多于一个事件出现"包含"三个事件都不出现"：$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$，"A 出现，B、C 不出现"：$A\bar{B}\bar{C}$，"B 出现，A、C 不出现"：$\bar{A}B\bar{C}$，"C出现，A、B 不出现"：$\bar{A}\bar{B}C$。以上四个事件中任意两个都不会同时出现，将它们并起来也不会有两个或两个以上事件出现，只能是不多于一个事件出现，表为

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup \bar{A}B\bar{C}\cup \bar{A}\bar{B}C=\overline{(A\cup B\cup C)}\cup(A-(B\cup C))$$
$$\cup(B-(A\cup C))\cup(C-(A\cup B)).$$

(7) "不多于两个事件出现"包含一个事件也不出现，只出现一个事件和只出现两个事件，这样表示比较麻烦．考虑所求事件的逆事件为"多于两个事件出现"即"三个事件都出现"，利用逆事件定义，表为 $\overline{ABC}$。

(8) 所求事件包含 AB，AC，BC 三个事件至少出现其一，表为 $AB\cup AC\cup BC$。

2. 当事件 A，B，C 具有什么关系时，等式

(1) $A\cup B\cup C=A$；　　(2) $ABC=A$　成立？

解　(1) $A\cup B\cup C=A$ 表示事件 $A\cup B\cup C$ 与 A 含有完全相同的基本事件，但 $A\cup B\cup C$ 含有 A 的基本事件，也含有 $B\cup C$ 的基本事件．等式 (1) 表明将 $B\cup C$ 的基本事件添加于 A 不改变 A，即 $B\cup C$ 所含基本事件必是 A 的基本事件，亦即

$$B\cup C\subset A，从而 B\subset A，C\subset A.$$

(2) $ABC=A$ 表示 ABC 与 A 所含基本事件完全相同。由 $ABC=A\cdot(BC)$ 知 ABC 所含基本事件为 A 与 BC 所含全部共同的基本事件，即 A 所含全部基本事件，表明 BC

含有A的全部基本事件，即 $A\subset BC$，从而$A\subset B$且$A\subset C$。

3. A, B, C为任意的三个事件，指出下列关系哪些是对的，哪些是错的。

(1) $(A\cup B)-C=A\cup(B-C)$；

(2) $ABC=AB(C\cup B)$；

(3) $A\cup B\cup C=A\cup(B-AB)\cup(C-AC)$；

(4) $A\cup B=(A-AB)\cup B$；

(5) $AB\cup BC\cup CA\supset ABC$；

(6) $AB\cup BC\cup CA\subset A\cup B\cup C$；

(7) $(A\cup B)-A=B$；

(8) $A\bar{B}C\subset A\cup B$；

(9) $\overline{(A\cup B\cup C)}=\bar{A}\bar{B}\bar{C}$；

(10) $(\overline{A\cup B})C=\overline{A}C\cup\overline{B}C$；

(11) $(\overline{A\cup B})C=\bar{A}\bar{B}C$；

(12) $(\overline{A\cup B})C=C-C(A\cup B)$。

解 为方便计，把正确的式子先列出：(3)，(4)，(5)，(6)，(8)，(9)，(11)。下面加以说明。

(3) 显然$B-AB\subset B$，$C-AC\subset C$，从而

$$A\cup(B-AB)\cup(C-AC)\subset A\cup B\cup C。$$

另一方面，任取基本事件$\omega\in A\cup B\cup C$，若$\omega\in A$，则$\omega\in A\cup(B-AB)\cup(C-AC)$；若$\omega\in B$，或有$\omega\in B$，但$\omega\overline{\in}A$，则$\omega\in B-AB$，从而$\omega\in A\cup(B-AB)\cup(C-AC)$；或有$\omega\in B$，$\omega\in A$，从而$\omega\in A\cup(B-AB)\cup(C-AC)$；若$\omega\in C$，与上同样讨论，推知$\omega\in A\cup(B-AB)\cup(C-AC)$。总之，若$\omega\in A\cup$

$B\cup C$，则 $\omega\in A\cup(B-AB)\cup(C-AC)$，故得

$$A\cup B\cup C\subset A\cup(B-AB)\cup(C-AC).$$

由两事件等价定义得证

$$A\cup B\cup C=A\cup(B-AB)\cup(C-AC).$$

(4) 与(3)同理。

(5)、(6)显然成立。

(8) $A\bar{B}C\subset A\subset A\cup B$。

(9) 见8题(3)之证明。

(11) $\overline{(A\cup B)C}=\overline{\bar{A}\bar{B}C}$，利用对偶法则，显然。

下面指出其余4个等式不成立：

(1) 设随机试验 E 为掷一颗材质均匀的骰子，A, B, C 分别为：$A=\{2,4,6\}$，$B=\{2,3,5\}$，$C=\{4\}$，那么，

$$(A\cup B)-C=\{2,3,5,6\},$$

$$A\cup(B-C)=\{2,3,4,5,6\}.$$

可见，$(A\cup B)-C\neq A\cup(B-C)$。故对任意 A, B, C (1)不成立。

(2) 用 (1) 中同一个反例，$ABC=\varnothing$，但 $AB(C\cup B)=\{2\}$，可见 $ABC\neq AB(C\cup B)$。对任意 A,B,C (2)亦不成立。

(7) 用 (1) 中同样表示，$(A\cup B)-A=\{3,5\}$，但 $B=\{2,3,5\}$。故 $(A\cup B)-A=B$ 对任意 A, B, C 不成立。

(10) 仍用(1)中同样表示，(10)的左端

$$(\overline{A\cup B})C=\{1\}\cap\{4\}=\varnothing,$$

但右端 $\bar{A}C\cup\bar{B}C=\varnothing\cup\{4\}=\{4\}$. 故左$\neq$右，对任意 A,B,C (10)亦不成立。

4. 设 A, B, C 是基本事件空间 Ω 中的事件（子集），它们规定如下：

$$\Omega=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\},$$
$$A=\{1,\ 3,\ 5\},$$
$$B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\},$$
$$C=\{3,\ 4,\ 5\}.$$

试求下列事件：

(1) $A\cap(B\cap C)$； (2) $\overline{A\cup B}$；

(3) $A\cup\overline{A}$； (4) $A\cup B\cup C$；

(5) $\overline{B}\cap\overline{C}$； (6) $\overline{\Omega}$.

解 (1) $B\cap C$ 表示 B 与 C 所含公共基本事件组成的事件：

$$B\cap C=\{0,1,2,3\}\cap\{3,4,5\}=\{3\}.$$

$A\cap(B\cap C)$ 表示 A 与 $B\cap C$ 所含公共基本事件组成的事件：

$$A\cap(B\cap C)=\{1,3,5\}\cap\{3\}=\{3\}.$$

(2) $A\cup B$ 表示至少属于 A、B 之一的基本事件组成的事件：

$$A\cup B=\{1,3,5\}\cup\{0,1,2,3\}=\{0,1,2,3,5\}.$$

$\overline{A\cup B}$ 表示 Ω 中不属于 $A\cup B$ 的基本事件组成的事件：

$$\begin{aligned}\overline{A\cup B}&=\Omega-(A\cup B)\\&=\{0,1,2,3,4,5\}-\{0,1,2,3,5\}\\&=\{4\}.\end{aligned}$$

(3) 与(2)同理，$\overline{A}=\Omega-A=\{0,2,4\}$，故

$$\begin{aligned}A\cup\overline{A}&=\{1,3,5\}\cup\{0,2,4\}\\&=\{0,1,2,3,4,5\}\end{aligned}$$

$=\Omega$。

(4) $A\cup B\cup C$ 表示至少属于 A、B、C 之一的基本事件组成的事件：

$$A\cup B\cup C=\{1,3,5\}\cup\{0,1,2,3\}\cup\{3,4,5\}$$
$$=\{0,1,2,3,4,5\}.$$

(5) $\overline{B}=\Omega-B=\{4,5\}$，$\overline{C}=\Omega-C=\{0,1,2\}$，

$$\overline{B}\cap\overline{C}=\{4,5\}\cap\{0,1,2\}=\varnothing.$$

$\overline{B}$ 与 $\overline{C}$ 不含公共基本事件，其交为空集，谓之不可能事件，记作 $\varnothing$。

(6) $\overline{\Omega}=\Omega-\Omega=\varnothing$，差式中第一个 Ω 表示整个基本事件空间，第二个 Ω 作为空间 Ω 中的一个集合（事件），叫做必然事件。必然事件的逆事件为不可能事件。

5. 设基本事件空间 Ω 为平面上带形区域 $0\leqslant x\leqslant 10$，$y\geqslant 0$ 内点的集合，若事件 A，B 规定为

$$A=\{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant 5,\ 0\leqslant y\leqslant 20\},$$
$$B=\{(x,y):\ 3\leqslant x\leqslant 10,\ 6\leqslant y\}$$

试求下列事件：

(1) $\overline{A}$；　　(2) $\overline{A\cap B}$；

(3) $\overline{A}\cap\overline{B}$；　　(4) $\overline{A}\cap B$；

(5) $A\cup\overline{B}$；　　(6) $\overline{A}\cap A$。

解 (1) $\overline{A}=\Omega-A$

$$=\{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant 10, 0\leqslant y\}-\{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant 5,\ 0\leqslant y\leqslant 20\}$$
$$=\{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant 5,\ y>20\}\cup\{(x,y):\ 5<x\leqslant 10,\ y\geqslant 0\}.$$

(2) $\overline{A \cap B} = \Omega - A \cap B$

$= \{(x,y):\ 0 \leqslant x \leqslant 10, 0 \leqslant y\} - \{(x,y):\ 3 \leqslant x \leqslant 5,$

$6 \leqslant y \leqslant 20\}$

$= \{(x,y):\ 0 \leqslant x < 3, y \geqslant 0\} \cup$

$\{(x,y):\ 3 \leqslant x \leqslant 5, 0 \leqslant y < 6\} \cup$

$\{(x,y):\ 3 \leqslant x \leqslant 5, y > 20\} \cup$

$\{\{(x,y):\ 5 < x \leqslant 10, y \geqslant 0\}$.

(3) $\overline{A} \cap \overline{B} = [\{(x,y):\ 0 \leqslant x \leqslant 5, y > 20\}$

$\cup \{(x,y):\ 5 < x \leqslant 10, y \geqslant 0\}]$

$\cap [\{(x,\ y):\ 0 \leqslant x < 3,\ y \geqslant 0\} \cup$

$\{(x,\ y):\ 3 \leqslant x \leqslant 10,\ 0 \leqslant y < 6\}]$

$= \{(x,y):\ 0 \leqslant x < 3, y > 20\} \cup$

$\{(x,y):\ 5 < x \leqslant 10, 0 \leqslant y < 6\}$.

(4) $\overline{A} \cap B = (\Omega - A) \cap B = (\Omega \cap B) - (A \cap B)$

$= B - AB = B - A$

$= \{(x,y):\ 3 \leqslant x \leqslant 10, 6 \leqslant y\} - \{(x,y):\ 0 \leqslant x \leqslant 5,$

$0 \leqslant y \leqslant 20\}$

$= \{(x,y):\ 5 < x \leqslant 10, 6 < y\} \cup \{(x,y): 3 \leqslant x \leqslant 5,$

$y > 20\}$.

(5) $A \cup \overline{B} = \{(x,y):\ 0 \leqslant x \leqslant 5, 0 \leqslant y \leqslant 20\}$

$\cup \{(x,y):\ 0 \leqslant x < 3, 20 < y\}$

$\cup \{(x,y):\ 5 < x \leqslant 10, 0 \leqslant y < 6\}$.

(6) $\overline{A} \cap A = \varnothing$.

由于 $\overline{A}$ 与 A 不含任何公共基本事件，对任何事件 A，总有 $\overline{A} \cap A = \varnothing$。