线性代数学习指导

陈立新 房宏 主编

南开大学出版社

线性代数学习指导

陈立新　房　宏　主　编

南开大学出版社
天　津

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导 / 陈之新，房宏主编. —天津：南开大学出版社，2006.5

ISBN 7-310-02444-3

Ⅰ.线... Ⅱ.①陈...②房... Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 014377 号

南开大学出版社出版发行

出版人:肖占鹏

地址:天津市南开区卫津路 94 号 邮政编码:300071

营销部电话:(022)23508339 23500755

营销部传真:(022)23508542 邮购部电话:(022)23502200

*

河北昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2006 年 5 月第 1 版 2006 年 5 月第 1 次印刷

880×1230 毫米 32 开本 12.125 印张 344 千字

定价:20.00 元

如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换,电话:(022)23507125

前　言

编写本书的目的，是想对正在学习和复习线性代数的同学们提供一些辅导，帮助同学们加深对线性代数中基本概念、基本定理的理解，引导同学们掌握线性代数的解题方法和技巧，启发、培养同学们学习线性代数的兴趣。

本书可与同济大学应用数学系主编的《线性代数》(第四版)教材配套使用。在编写上有以下几个特点：一，画龙点睛，指出了教材每一章的学习目的和要求，使学生学习时心中有数，有的放矢。二，疑难解惑，使学生对学习中遇到的难点能迎刃而解，便于掌握线性代数的实质。三，例题解析，其中有介绍基本概念和基本运算方法的计算题和证明题，有一题多解的开拓思路题，也有较灵活的综合题。不少例题在解答前有详细的分析，解答后有归纳，同学们务必仔细阅读、品味，做到明其精髓，举一反三。四，本书的又一特点是将知识点的讲解、分析与习题的解析及答案合二为一，便于同学们学习和使用，经济上也更实惠一些。

参加本书编写的教师有：陈立新(第一章、第五章)，房宏(第二章、第四章、模拟试题 A 和模拟试题 B)，张文辉(第三章、第六章)。

编写本书时，参阅了许多书籍，引用了一些经典的例子，恕不一一指明出处，在此一并向有关作者致谢。

编者

2006 年 1 月

于天津农学院

目　　录

第一章　行列式

1.1　学习要求与内容提要

一、学习要求

1. 理解 n 阶行列式的定义.

2. 熟练掌握行列式的性质,会利用行列式的性质化简及计算行列式.

3. 熟练掌握并利用行列式按行(列)展开的方法计算行列式.

4. 会用克拉默法则求解线性方程组.

本章重点:行列式计算.

二、内容提要

1. n 阶行列式的定义

n 阶行列式是一个数,它表示 $n!$ 项的代数和,其定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \quad (1.1)$$

其中,$(p_1p_2\cdots p_n)$为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,t 为这个排列的逆序数,求和符号 $\sum\limits_{(p_1p_2\cdots p_n)}$ 是对所有 n 元排列$(p_1p_2\cdots p_n)$求和.

2. 行列式的性质

(1)行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等.

(2)互换行列式的两行(列),行列式变号.

(3)行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式;或者,行列式的某一行(列)的各元素有公因子 k,则 k 可提到行列式记号之外.

(4)行列式中如果有两行(列)元素完全相同或成比例,则此行列式为零.

(5)若行列式的某一列(行)中各元素均为两项之和,则此行列式等于两个行列式之和.

例如

$$\begin{array}{c} \text{第 } j \text{ 列} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1j}+d_{1j}') & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2j}+d_{2j}') & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nj}+d_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \text{第 } j \text{ 列} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \text{第 } j \text{ 列} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & d_{1j}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & d_{2j}' & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & d_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}$$

如果这样,就形象地称为行列式按第 j 列拆成两个行列式.

(6)把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后加到另一行(列)的对应元素上去,行列式的值不变.

3.行列式的按行(按列)展开

(1)把行列式中元素 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列划去后所成的子行列式称为元素 a_{ij}的余子式 M_{ij};记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,则称 A_{ij}为元素 a_{ij}的代数余子式.

(2)n 阶行列式等于它的任意一行(列)的各元素与对应于它们的代数余子式的乘积的和,即可以按第 i 行展开:

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n);$$

或可以按第 j 列展开：

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad (j=1,2,\cdots,n).$$

(3)行列式中任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j,$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad i\neq j. \tag{1.2}$$

4. 克拉默(Cramér)法则

考虑含有 n 个未知元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个线性方程的方程组：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n,\end{cases} \tag{1.3}$$

当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为零时，称为齐次线性方程组；否则，称为非齐次线性方程组.

(1)如果方程组(1.3)的系数行列式 $D\neq0$，那么，它有唯一解：$x_i=\dfrac{D_i}{D}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，其中，D_i $(i=1,2,\cdots,n)$是把 D 中第 i 列元素用方程组(1.3)的右端的自由项替代后所得到的 n 阶行列式.

(2)如果线性方程组(1.3)无解或有两个不同的解，那么，它的系数行列式 $D=0$.

(3)如果齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq0$，那么，它只有零解；如果齐次线性方程组有非零解，那么，它的系数行列式必定等于零.

1.2 疑难解惑

问 1.1 行列式定义的实质是什么？

答 由 n 阶行列式 D 的定义可以知道，D 就是行列式中所有取自不同行、不同列的 n 个元素之积的代数和，记为 $\sum(D)$，而每一项所带的符号是唯一确定的. 撇开每个项所带的符号，就有：凡是取自 D 中

不同行、不同列的 n 个元素之积，一定是 $\sum(D)$ 中的一项；反过来，$\sum(D)$ 中任一项也一定是 D 中不同行、不同列的 n 个元素之积. 利用这个原则，如果再加上每一项的"符号"规则，对行列式的一些问题的解决可起到事半功倍的作用.

例如，考虑以 λ 为参数的 4 阶行列式：

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\lambda \end{vmatrix},$$

不进行具体计算，由行列式定义即可知：

(1)$D(\lambda)$是一个关于 λ 的 4 次多项式，这是因为 $\sum D(\lambda)$ 中有正项$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda)(a_{44}-\lambda)$，而其他各项的 λ 的幂次均低于 4，而且该多项式中 λ^4 的系数等于 1.

(2)多项式 $D(\lambda)$中 λ^3 的系数是$-(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})$，即为主对角线元素之和的相反数，这是因为 $\sum D(\lambda)$ 中任一项，若它不含某主对角线元素作为其因子，则它至少不含两个主对角线元素作为其因子. 于是，除了$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda)(a_{44}-\lambda)$项外，其余各项的 λ 的幂次至多是 2；也即 $D(\lambda)$中 λ^3 的系数就是$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda)\cdot(a_{44}-\lambda)$中 λ^3 的系数，而后者显然是$-(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})$.

问 1.2 能否由行列式定义得到下列 2 个关于 x 的多项式的最高次项？

$$(1)D_1(x)=\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 8 \\ 2 & 2x^2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3x^3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 4x^4+3 \end{vmatrix};$$

$$(2)D_2(x)=\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & x^4 \\ 2 & 2x^2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3x^3 & 0 \\ x & -1 & 2 & 4x^4 \end{vmatrix}.$$

答 能够.只须考察 $D_i(x)$ $(i=1,2)$中所有取自不同行、不同列的 4 个元素之积中含 x 的幂次最高的那些项.

(1)在 $D_1(x)$的和式 $\sum(D_1)$ 中,含 x 的最高幂次的项为 $x\times 2x^2\times 3x^3\times(4x^4+3)$,从而得 $D_1(x)$中 x 的最高幂次项为 $24x^{10}$(顺便指出:$D_1(x)$中 x^6 项为 $18x^6$,而 x^9,x^8 和 x^7 项系数都等于零).

(2)在 $\sum(D_2(x))$ 中,含 x 的最高幂次的项有两个,分别是 $x\times 2x^2\times 3x^3\times 4x^4$ 和 $x\times 2x^2\times 3x^3\times x^4$,这两项的符号为正,故 $D_2(x)$视为 x 的多项式,它的最高次项为 $30x^{10}$.

问 1.3 (1)余子式与代数余子式有什么特点?(2)它们之间有什么联系?

答 (1)对于给定的 n 阶行列式,元素 a_{ij}的余子式 M_{ij}和代数余子式 A_{ij}仅与位置(i,j)有关,而与 D 中第 i 行、第 j 列元素的大小和正负无关.

(2)它们间的关系是 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{i+j}$,因而当 $i+j$ 为偶数时,二者相同;当 $i+j$ 为奇数时,二者相反.它们间的关系可用图示为

$$\begin{vmatrix} + & - & & & & \\ - & + & - & & & \ddots \\ & - & + & & \ddots & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & - \\ & & & & - & + \end{vmatrix}$$

其中,符号"+"表示对应位置上 $A_{ij}=M_{ij}$;符号"−"表示对应位置上 $A_{ij}=-M_{ij}$.

问 1.4 范德蒙行列式有什么特点?

答 n 阶范德蒙行列式 $V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$记为

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

它有三个特点：

(1)从列的角度看，第 j 列元素从上到下依次为变元 x_j 的零次幂、一次幂……$(n-1)$次幂，$j=1,2,\cdots,n$；

(2)从行的角度看，第 i 行元素从左至右依次是各变元的$(i-1)$次幂，$i=1,2,\cdots,n$；

(3)从结果看，把范德蒙行列式看作 n 个变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数，它是关于这些变元的$\frac{1}{2}n(n-1)$次齐次函数；而且该齐次函数可分解为$\frac{1}{2}n(n-1)$个一次因式之积，而每个因子形如 x_i-x_j，其中，$1\leqslant j<i\leqslant n$，即足标大的变元与足标小的变元之差. 反过来，$n$ 个变元之间形如这样的一次因子总计为$\frac{1}{2}n(n-1)$个. 于是 n 阶范德蒙行列式是所有可能的足标大的变元与足标小的变元之差作为其因子的 n 元函数. 除变元的名称外，这样的函数是唯一确定的.

问 1.5 学习克拉默法则的意义是什么？

答 可以从两个方面认识克拉默法则.

一方面，克拉默法则是用行列式求解二元(两个方程)、三元(三个方程)的线性方程组方法的推广，它给出了求解 n 元 n 个方程的线性方程组的一般结论. 同时，它又是一般的线性方程组理论，即求解 n 元 m 个方程的线性方程组在 $m=n$ 时的特殊情形，但这并不降低其独立存在的意义；恰好相反，关于线性方程组理论的建立须依赖于克拉默法则.

另一方面，克拉默法则的独到之处在于：对 n 元 n 个方程的非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$(此记号在以后章节中会详细讲到)，它用 n 阶行列式给出了当系数行列式 $D=\det\boldsymbol{A}\neq0$ 时的(唯一)解的表达式：

$$x_j=D_j/D,\quad j=1,2,\cdots,n,$$

其中，D 及 D_j 有很多的应用.

问 1.6 如果线性方程组的系数行列式等于 0，那么能不能说非齐次线性方程组有无穷多解？

答 对于方程个数和未知数个数一样多的方程组，方程组的系数

行列式不等于 0 是方程组有唯一解的充分必要条件. 因此,如果线性方程组的系数行列式等于 0,可以说方程组没有唯一解. 但是克拉默法则并没有回答方程组的系数行列式等于 0 时,方程组的解的形态,所以不能判断这个方程组究竟是无解还是有无穷多解.

1.3 典型例题解析

题型一 计算排列的逆序数

方法与技巧 计算任意一个排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 的逆序数方法: $t(i_1 i_2\cdots i_n)=i_1$ 后面比 i_1 小的数的个数 $+i_2$ 后面比 i_2 小的数的个数 $+\cdots+i_{n-1}$后面比 i_{n-1}小的数的个数,即为逆序数.

例 1 求下列排列的逆序数,并确定它们的奇偶性

(1)1 3 4 7 2 6 5; (2)$n\ (n-1)\ \cdots\ 2\ 1$;

(3)$1\ 3\ 5\ \cdots\ (2n-1)\ 2\ 4\ 6\ \cdots\ (2n)$.

解 (1)$t(1\ 3\ 4\ 7\ 2\ 6\ 5)=0+1+1+3+0+1=6$,故为偶排列.

(2)由 $t(n\ (n-1)\ \cdots\ 2\ 1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$可知,当 $n=4k$ 时或 $n=4k+1$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2}$为偶数,为偶排列,当 $n=4k+2$ 时或 $n=4k+3$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2}$为奇数,为奇排列.

(3)该排列中前 n 个数 $1\ 3\ 5\cdots\ (2n-1)$不构成逆序,后 n 个数 $2\ 4\ 6\ \cdots\ (2n)$也不构成逆序,只有前 n 个数与后 n 个数之间才构成逆序,$t(1\ 3\ 5\ \cdots\ (2n-1)\ 2\ 4\ 6\ \cdots\ (2n))=0+1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$故奇偶性与(2)题排列完全一致.

例 2 选择 i 和 k,使(1)1 i 2 5 k 4 8 9 7 成奇排列;

(2)1 2 7 4 i 5 6 k 9 成偶排列.

分析与提示 此类问题,一般取小数在先,大数在后. 如果符合要求即为所求,否则另一种情况则符合要求.

解 (1)由题意 i,k 只有两种选择 $i=3,k=6$ 或 $i=6,k=3$,在第

一种情况中 $t(1\ 3\ 2\ 5\ 6\ 4\ 8\ 9\ 7)=5$，即为所求.

(2)由题意 i,k 可能选择 $i=3,k=8$ 或 $i=8,k=3$. 在第一种情况中，$t(1\ 2\ 7\ 4\ 3\ 5\ 6\ 8\ 9)=5$，则第二种情况符合，从而有 1 2 7 4 8 5 6 3 9 成偶排列.

题型二　有关行列式的概念

方法与技巧　对于行列式定义的理解应把握几点：

(1)n 阶排列的总数是 $n!$，对所有排列求和，共有 $n!$ 项.

(2)每一项都是不同行和不同列的几个元素的乘积，冠以正负号.

(3)正负号的确定是当第一个下标为自然顺序时，由第二个下标排列的奇偶性确定.

(4)行列式的值是一个具体数.

例 3　已知 $a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k}$ 在 4 阶行列式中带负号，求 j 和 k.

分析与提示　先将该项行指标按自然顺序排好，然后再根据列指标应当是奇排列(因为该项带负号)来确定 j 和 k.

解　由于 $a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k}=a_{12}a_{2k}a_{3j}a_{41}$，而 $2,k,j,1$ 是 1 至 4 的排列，故 j 和 k 只能取自 3 和 4.

若 $j=3,k=4$，则 $t(2\ 4\ 3\ 1)=1+2+1=4$ 是偶排列，与该项带负号不符，故 $j=4$ 和 $k=3$.

例 4　若 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$，

则方程 $f(x)=0$ 的根的个数是多少？

分析与提示　四阶行列式，每个元素都有 x，首先会想到 $f(x)$ 是 4 次多项式，由于组成 x 的四次幂的项有若干个，则它们的和有可能为零，可将行列式进行化简.

解　由于原行列式第 2,3,4 行各元素中 x 前的系数均是第一行各元素中 x 系数的倍数，将第一行的 $-i$ 倍加到第 i 行($i=2,3,4$)得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & x+1 & 4 \\ 8 & 1 & x+1 & 9 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & x+1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

由行列式定义可知，$f(x)$是一个二次多项式，故 $f(x)$只能有两个根.

例 5 填空题：

(1)在 5 阶行列式中，项 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$的符号应取________；

(2)4 阶行列式中，带负号且包含因子 a_{23}和 a_{31}的项为________；

(3)如果 n 阶行列式中，负项的个数为偶数，则 $n \geqslant$________；

(4)如果 n 阶行列式中等于零的元素个数大于 n^2-n，那么此行列式的值为________；

(5)在函数 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中，x^3 的系数是________.

解 (1)适当调整该项元素位置，使第一个下标按自然数顺序排列，则第二个下标排列为 2 5 1 3 4，其逆序数 $t(2\ 5\ 1\ 3\ 4)=4$，故取正号.

(2)由行列式的定义可知，包含因子 a_{23}和 a_{31}的项必为 $a_{1i}a_{23}a_{31}a_{4j}$，其中 i,j 为 2,4 或 4,2. 又此项符号为负，所以 $i\ 3\ 1\ j$ 为奇排列，从而有 $i=4,j=2$.

(3)n 阶行列式中，共有 $n!$ 项，其中正负项各占一半，若负项的个数为偶数，必有 $n \geqslant 3$.

(4)n 阶行列式中共有 n^2 个元素，若等于零的元素个数大于 n^2-n，那么不等于零的元素个数就小于 n，又 n 阶行列式的每一项是 n 个

不同元素的乘积，所以必定为零，从而此行列式的值也为零.

(5)根据行列式的定义，仅当 a_{12}，a_{21}，a_{33}，a_{44} 四个元素相乘才能出现 x^3，这时该项排列的逆序数为 $t(2\ 1\ 3\ 4)=1$，故此项为

$$(-1)^{t(2\ 1\ 3\ 4)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-x^3,$$

因此 x^3 项的系数为 -1.

例 6 证明：$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$

证明 由题设知，当 $k\geqslant 3$ 时，$a_{3k}=a_{4k}=a_{5k}=0$，而行列式 D 中的一般项是 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$.

由于 j_3，j_4，j_5 互不相同且取于 1 至 5，故其中至少有一个要大于或等于 3，那么 a_{3j_3}，a_{4j_4}，a_{5j_5} 中至少有一个为 0，所以 D 的展开式中每一项都是 0，故行列式 $D=0$.

题型三 利用性质计算行列式

方法与技巧 利用性质将行列式化为上(或下)三角形行列式以及利用其他性质计算(如提取公因式法、逐行或列相加减，等等).

例 7 计算 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解 **方法一**：分别从第 2，3，…，n 行中减去第一行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-x & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix},$$

将第 2,3,…,n 列加到第 1 列,有

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

方法二:将第 2,3,…,n 行加到第 1 行,得

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix},$$

再将第 1 行的 $-a$ 倍加到第 2,3,…,n 行,有

$$D_n=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

例 8 计算行列式:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

解 由 D 的主对角线及第 1 行与第 1 列元素非零,其余元素为