

高等学校21世纪教材

GAODENG XUEXIAO 21 SHIJI JIAOCAI

离散数学

◎ 杨炳儒 编著



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

中華人民共和國農業部

高粱 育苗移栽

農業部編

高等学校 21 世纪教材

离 散 数 学

杨炳儒 编著



人民邮电出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

离散数学 / 杨炳儒编著. —北京: 人民邮电出版社, 2006.12

高等学校 21 世纪教材

ISBN 7-115-14442-7

I . 离... II . 杨... III . 离散数学—高等学校—教材 IV . 0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 101383 号

内 容 提 要

本书是在“知识逻辑结构核心论”创新性教学思想的指导下, 经过多年教学实践形成的, 是对“离散数学”教学内容与方法改革的探索。

全书按数理逻辑、集合论、代数结构、图论四部分主题内容演绎铺展, 具有区别于国内出版的同类教材的全新结构和形式, 从整体上可见具有积淀了教学理论、认知科学、逻辑科学、哲学方法论等多学科交叉的形象。

本书可作为计算机、自动化、电子信息工程、测量技术与仪器、管理科学与工程、系统工程等专业的本科生、研究生教材, 并可供相关的教学科研人员与工程技术人员参考。

高等学校 21 世纪教材

离散数学

-
- ◆ 编 著 杨炳儒
 - 策划编辑 张孟玮
 - 责任编辑 郭 晶
 - ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn
网址 <http://www.ptpress.com.cn>
 - 北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
 - 新华书店总店北京发行所经销
 - ◆ 开本: 787×1092 1/16
 - 印张: 22.75
 - 字数: 538 千字 2006 年 12 月第 1 版
 - 印数: 1~3 000 册 2006 年 12 月北京第 1 次印刷
-

ISBN 7-115-14442-7/TN · 2710

定价: 32.00 元

读者服务热线: (010) 67170985 印装质量热线: (010) 67129223

丛书前言

当今世界，科学技术突飞猛进，知识经济已见端倪，国际竞争日趋激烈。教育在综合国力的形成中处于基础地位，国力的强弱将越来越取决于劳动者的素质，取决于各类人才的质量和数量，这对于培养和造就我国 21 世纪的一代新人提出了更加迫切的要求。21 世纪初，我国高等教育呈快速发展的势头。教材是体现教学内容和教学方法的知识载体，是进行教学的基本工具，也是深化教育教学改革、全面推进素质教育、培养创新人才的重要保证。因此，高等教育教材建设必须有一个与之相适应的快速发展。

随着计算机软硬件的不断升级换代，计算机教学内容也随之更新，尤其随着教育部“高等教育面向 21 世纪教育内容与课程体系改革”计划的实施，对教材也提出了新的要求。为此我们聘请了国内高校计算机教学方面知名的专家教授，精心策划编写了这套“高等学校 21 世纪教材”。

为真正实施精品战略，组织编写好这套教材，我们在国内高校做了系统、详细的调查，对教育部制订的教育计划做了认真的研究，还对国内外已出版的教材做了理性的分析，确立了依托国家教育计划、传播先进教学理念、为培养符合社会需要的高素质创新型人才服务的宗旨。

在本套教材的策划过程中，我们多次组织了由专家及高校一线教师参加的研讨会，对现有比较出色的教材的特点及优点进行了分析，博采众长，力求实现教材权威性与实用性的完美结合。

本套教材有如下特点。

1. 考虑到全国普通高等院校学生的知识、能力、素质的特点和实际教学情况，在编写教材时把重点放在基本理论、基础知识、基本技能与方法上。
2. 紧密结合当前技术的新发展，在阐述理论知识的同时侧重实用性。
3. 力求在概念和原理的讲述上严格、准确、精练，理论适中，实例丰富，写作风格上深入浅出，图文并茂，便于学生学习。
4. 为适应当前高校课程种类多、课时数要压缩的教学特点，教材不仅篇幅有很大的压缩，而且均配有电子教案，以满足现代教学新特点的需要，做到易教易学。
5. 所选作者均是国内有丰富教学实践经验的知名专家、教授，所编教材具有较高的权威性。

教育的改革将不会停止，教材也将会不断推陈出新。目前本套教材即将推出，将接受广大教学第一线教师的检验。

由于我们的水平和经验有限，这批教材在编审、出版工作中还存在不少缺点和不足，希望使用本套教材的学校师生和广大读者提出批评和建议，以便改进我们的工作，使教材质量不断提高。

编者的话

在当代知识组合爆炸的新形势下，对教学内容与教学方法的改革势在必行。笔者根据加涅的“信息加工理论”，运用历史的与逻辑的统一、内容的与形式的统一、教学的与科研的统一等基本范畴，创新性地提出“知识逻辑结构核心论教学观”，进而深入探究“知识逻辑结构与思维导图相融合的 KM 教学法”。经过多年的“离散数学”等课程的教学实践，初步证实其科学性与有效性。从这个意义上讲，本教材是教学改革的产物。

本教材试图体现如下特征。

1. 每篇与大的章节都设计出知识结构图，给出概念、定理、方法及其间的内在联系，以便学生根据知识结构图梳理所学的知识，增强记忆利于应用。
2. 知识内容力求与专业的发展紧密结合，适当增加一些必要的新知识简介，如模糊集、超图等供选学之用。
3. 针对各章内容视情增加相应的实际应用的介绍，并注重与后续专业课的结合，以体现抽象的离散数学知识对专门知识学习与实际应用的价值。
4. 教材中给出学习方法的指导，介绍学习方法论，以强化学生学习的主导地位。
5. 教材中贯彻历史的与逻辑的统一性教学法，适当增加一些数学史的介绍，以启迪思维提高志趣。
6. 借鉴国外教材的编写经验，适当增加一些有助于理解和掌握教材内容的注释。
7. 从与实际问题相结合、增强学生分析问题与解决问题能力的角度，配置每一章相应的习题。

李琳娜、蔡卫东、滕皓、秦奕青参加相应章节的编著工作；哈尔滨学院的王礼萍教授仔细地校阅了全书；本书在写作过程中，曾得到相关人士的大力支持；另外，书中正文与参考文献中涉及许多专家学者。在此，一并致以真诚的谢意！

由于本书具有探索的性质，加之编著者水平有限，故必有错误与疏漏之处，诚请赐教，以期改进与完善。

欢迎登录 <http://www.ustb.edu.cn/info/Schinfor/kdd/> 了解杨炳儒教授的最新学术成果及其相关学术活动。

杨炳儒 认
bryang_kd@yahoo.com.cn
2006 年 4 月 20 日

目 录

第一篇 数理逻辑

第1章 命题逻辑.....	3
1.1 命题.....	4
1.1.1 命题的概念	4
1.1.2 命题的分类	5
1.2 联结词.....	5
1.2.1 否定联结词	6
1.2.2 合取联结词	6
1.2.3 析取联结词	7
1.2.4 条件联结词	8
1.2.5 双条件联结词	9
1.3 命题公式与翻译	10
1.3.1 命题公式的定义	10
1.3.2 真值表	11
1.3.3 命题的翻译	12
1.4 命题公式的等价、蕴涵	13
1.4.1 重言式和矛盾式	13
1.4.2 命题公式的等价关系	14
1.4.3 置换	16
1.4.4 命题公式的蕴涵关系	17
1.5 对偶与范式.....	19
1.5.1 对偶式	19
1.5.2 析取范式与合取范式	21
1.5.3 主析取范式	21
1.5.4 主合取范式	23
1.6 其他联结词.....	25
1.6.1 不可兼析取联结词	26
1.6.2 条件否定联结词	27
1.6.3 与非联结词	28
1.6.4 或非联结词	28
1.6.5 联结词之间的关系	29
1.7 命题演算推理.....	29

1.7.1 有效论证的概念	29
1.7.2 真值表法	30
1.7.3 直接证法	32
1.7.4 间接证法	34
1.8 应用	36
1.9 典型例题解析	40
本章小结	45
习题	45
第2章 谓词逻辑	52
2.1 谓词和量词	52
2.1.1 谓词的概念	52
2.1.2 全称量词和存在量词	54
2.2 谓词公式与翻译	56
2.2.1 谓词公式的定义	56
2.2.2 谓词公式的翻译	56
2.3 约束变元与自由变元	57
2.4 谓词公式的等价、蕴涵	59
2.4.1 一些基本概念	59
2.4.2 量词与联结词—之间的关系	59
2.4.3 量词辖域的扩张与收缩	60
2.4.4 量词与命题联结词之间的一些等价、蕴涵式	60
2.5 前缀范式	63
2.5.1 前缀范式的定义	63
2.5.2 前缀合取范式和前缀析取范式	64
2.6 谓词演算推理	64
2.6.1 四个基本的推理规则	64
2.6.2 推理规则的应用	66
2.7 应用	67
2.8 典型例题解析	70
本章小结	72
习题	72

第二篇 集 合 论

第3章 集合及其运算	83
3.1 集合的概念与性质	84
3.1.1 集合的概念	84
3.1.2 集合的表示	85
3.1.3 三个基本原理	86
3.1.4 集合的性质	87

目 录

3.1.5 幂集	89
3.2 集合的运算	89
3.2.1 Venn 图	89
3.2.2 集合的运算	90
3.2.3 集合的运算性质	93
3.3 序偶和笛卡尔积	94
3.3.1 序偶	94
3.3.2 笛卡尔积	94
3.4 数学归纳法	96
3.4.1 集合的归纳定义	96
3.4.2 自然数的集合论定义*	97
3.4.3 数学归纳法	98
3.5 典型例题解析	99
本章小结	101
习题	102
第 4 章 关系	106
4.1 关系的概念及性质	107
4.1.1 关系的概念	107
4.1.2 关系的表示方法	107
4.1.3 关系的性质	109
4.2 关系的运算	110
4.2.1 复合运算	111
4.2.2 逆运算	114
4.2.3 闭包运算	115
4.3 等价关系、等价类与划分	120
4.4 相容关系、相容类与覆盖	124
4.5 偏序关系	127
4.6 典型例题解析	131
本章小结	136
习题	137
第 5 章 函数	141
5.1 函数的概念	141
5.2 函数的分类	143
5.2.1 满射、单射和双射	143
5.2.2 合成映射、恒等映射及逆映射	144
5.3 特征函数	149
5.4 典型例题解析	152
本章小结	153
习题	154

目 录

第6章 基数	157
6.1 基本概念.....	157
6.1.1 等势	157
6.1.2 有限集和无限集	158
6.1.3 基数	158
6.2 可数集和不可数集	159
6.2.1 基本概念	159
6.2.2 连续统的势	161
6.2.3 无限集的性质	162
6.3 基数的比较.....	163
6.3.1 基数的比较	163
6.3.2 基数的性质	165
6.4 典型例题解析.....	168
本章小结.....	169
习题.....	169
第7章 集合论的发展与应用	172
7.1 计数原理*.....	172
7.1.1 计数的基础	172
7.1.2 容斥原理	174
7.1.3 鸽笼原理	177
7.1.4 重集	179
7.2 模糊集基础*.....	180
7.2.1 发展简介	180
7.2.2 模糊集合的概念与方法	181
7.2.3 模糊理论的其他应用	190
7.3 集合的应用.....	193
7.3.1 关系在信息模型设计中的应用	193
7.3.2 关系数据库	193
本章小结.....	197
习题.....	197

第三篇 代数结构

第8章 群	201
8.1 代数系统的基本概念	202
8.1.1 运算	202
8.1.2 代数系统、子代数与积代数	204
8.2 半群与独异点	206
8.3 群	207
8.3.1 群	207

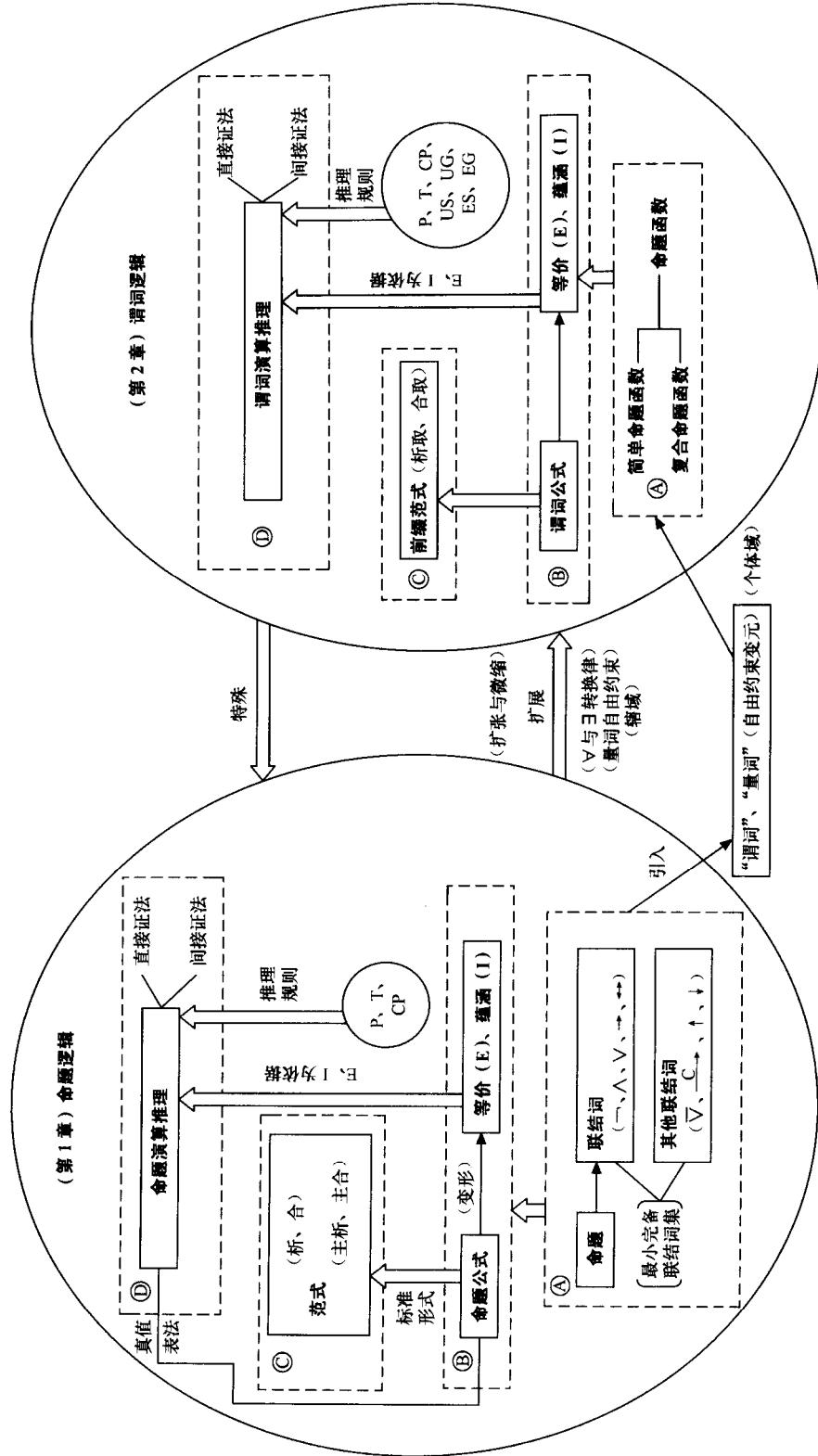
8.3.2 群的性质	208
8.4 子群.....	209
8.4.1 子群的定义	209
8.4.2 子群的判别条件	209
8.5 阿贝尔群与循环群	210
8.5.1 阿贝尔群	210
8.5.2 循环群	211
8.6 置换群.....	213
8.6.1 置换的定义	213
8.6.2 置换群	214
8.7 拉格朗日定理.....	216
8.8 同态及同构.....	219
8.8.1 同态映射	219
8.8.2 同构映射	220
8.8.3 同态核	221
8.9 典型例题解析.....	223
本章小结.....	226
习题.....	226
第 9 章 格与布尔代数	228
9.1 格.....	229
9.1.1 格的定义	229
9.1.2 格的性质	232
9.1.3 格的同态与同构	235
9.1.4 几种特殊的格	238
9.2 布尔代数.....	244
9.2.1 布尔代数的定义	244
9.2.2 布尔代数的性质	245
9.2.3 亨廷顿 (Huntington) 公理	246
9.2.4 有限布尔代数	248
9.2.5 布尔表达式与布尔函数	252
9.2.6 布尔代数的同态与同构	253
9.3 应用.....	255
9.3.1 开关电路函数	255
9.3.2 全加器的逻辑设计	256
9.4 典型例题解析.....	257
本章小结.....	265
习题.....	265
第四篇 图 论	
第 10 章 图	269

■ 第一篇 数理逻辑

我们知道，数学家对于逻辑不如逻辑学家对于数学那样关心。数学和逻辑是精确科学的两双眼睛：数学派闭上逻辑眼睛，逻辑派闭上数学眼睛，各自相信一双眼睛能比两双看得更好。

奥古斯塔斯·德·摩根

本篇的知识结构图



第1章 命题逻辑

有人问 Sophus Lie，什么是数学家所特有的天赋，他回答说是下面这个四元组：想象力、干劲、自信心和自我批评。

A·德摩根

逻辑是英文 logic 的译音，而 logic 一词源于希腊文 logoc，有“思维”及“表达思考的言辞”之意。数理逻辑是用数学的方法来研究推理规律的学科——引进一套符号系统来描述和处理思维的形式及其规律性的一门学科，也就是说，数理逻辑是用形式符号语言的方法来研究逻辑问题的一门学科，因此，数理逻辑又叫符号逻辑。数理逻辑是把一般逻辑中那些客观上可以形式化并且可用数学方法来发展的部分包括到自身中，是这部分的发展和精确化。

研究人的思维形式和规律的科学，称为逻辑学。根据所研究的对象和方法的不同，逻辑学主要分为辩证逻辑、形式逻辑和数理逻辑。

最早提出用数学方法来描述和处理逻辑问题的是莱布尼茨，但直到 1847 年布尔 (G. Boole, 1815 年—1864 年，英国数学家) 发表《逻辑的数学分析》后这一方法才有所发展。1879 年弗雷格 (G. Frege, 1848 年—1925 年，德国数学家) 在其《表意符号》一书中，建立了第一个比较严格的逻辑演算系统。怀特海 (A. N. Whitehead, 1861 年—1947 年，英国逻辑学家) 和罗素 (B. Russell, 1872 年—1970 年，英国逻辑学家) 合著的《数学原理》一书，可以说是当时数理逻辑的成果总结，使得数理逻辑形成了专门的学科。1930 年以前，数理逻辑的发展主要是针对纯数学的需要，以数学证明的分析作为自己的对象。从 20 世纪 40 年代起，自动化和计算技术的发展要求建立包含数百个甚至数千个继电器的复杂系统，这样复杂的系统的分析与综合单凭人们的经验难以对付，于是差不多同时在美国、前苏联、日本出现了关于继电器接点线路结构的符号方法及数理逻辑的命题演算在分析、综合这种线路中的应用研究。自 1943 年 Y·C·麦克卡洛克和 Y·彼特斯的《有关神经活动的思想的逻辑的演算》一文发表后，数理逻辑开始应用于所有开关线路的理论中，以后又在计算机科学和控制论方面获得应用，成为它们的基础理论之一。

莱布尼茨，德国数学家、哲学家，和牛顿同为微积分的创始人；1646 年 7 月 1 日生于莱比锡，1716 年 11 月 14 日卒于德国的汉诺威。他父亲是莱比锡大学伦理学教授，家庭丰富的藏书引起他广泛的兴趣。1661 年入莱比锡大学学习法律，又曾到耶拿大学学习几何，1666 年在纽伦堡阿尔特多夫取得法学博士学位。他当时写的论文《论组合的技巧》已含有

数理逻辑的早期思想，后来的工作使他成为数理逻辑的创始人。

命题逻辑和谓词逻辑是数理逻辑的基础部分，本章讨论命题逻辑，主要介绍了命题的概念，命题公式中一些常用的联结词，如何将命题符号化，命题公式的标准形式，最后讨论了如何用命题逻辑进行推理及其在现实生活中的应用。

数理逻辑主要包括五大部分：逻辑演算（Logic Calculus）、集合论（Set Theory）、证明论（Proof Theory）、模型论（Model Theory）和递归论（Recursive Theory）。

1.1 命题

1.1.1 命题的概念

在数理逻辑的文献里，命题这个术语是不予定义的一个基本概念。在这里只对它作描述性的解释。一个命题，是具有真假意义的陈述句。命题总是具有一个确定的值，称为真值。真值只有“真”和“假”两种，分别记为 True（真）和 False（假），用符号 T 和 F 表示。一般而言，命题是用来陈述任何一个数学公理、定理以及任何一个在数学推理过程中所作的判断的语句。一切没有判断内容的句子，无所谓是非的句子，如感叹句、疑问句、祈使句等都不能作为命题。例如：

- (1) 该吃早饭了！
- (2) 多漂亮的花呀！
- (3) 明天你有什么安排吗？
- (4) 我正在说谎。
- (5) $x-y > 2$ 。

这些都不是命题。因为 (1), (2), (3) 这些句子都无所谓是非，(4) 无法判定其真值，若假设它为假即我正在说谎，则意味着它的反为真，即我正在说实话，二者相矛盾；若假定它为真即我正在说实话，则意味着它的反为假，我正在说谎，二者也相矛盾。这其实是一个语义上的悖论。一般而言只有陈述句才可能是命题。但并不是所有的陈述句都是命题，如例中的 (4) 由于不能分辨其真假，故不是命题。由于 (5) 中的 x, y 的值不确定，某些 x, y 使 $x-y > 2$ 为真，某些 x, y 使 $x-y > 2$ 为假，即 $x-y > 2$ 的真假随 x, y 的值的变化而变化。因此 $x-y > 2$ 的真假无法确定，所以 $x-y > 2$ 不是命题。

下面的例子都是命题：

- (6) 不在同一直线上的三点确定一个平面。
- (7) 郑州是河南省的省会。
- (8) 今年的冬天将是一个暖冬。
- (9) 这碗汤味太淡了。
- (10) $1011+1000=10011$ 。

(6), (7) 的真值为 T, (8) 的真值虽然目前无法确定，但它是有真假可言的，因此也说它是命题，(9) 的真假似乎不能唯一的判定，因为它因人而异，但我们可以认为这个语句的真假取决于说话人的主观判断（即可以认为此语句是“我认为这碗汤味太淡了”）。

的缩写)。(10)也是命题,虽然当它表示的数是十进制数或其他非二进制数时此语句是假的,当它表示的数为二进制数时,此命题是真的。但是,这个语句毕竟是处于一系列语句中的一个特定位置上,由前后文关系,立即可以确定它所表示的数是二进制数还是非二进制数,并且一个数不可能既是二进制数,又是其他非二进制数。故此语句是能分辨真假的。

只有陈述句才有可能是命题,但并不是所有的陈述句都能成为命题。一个命题的真值或者是“真”或者是“假”,不能既不是“真”也不是“假”,但也不能既是“真”又是“假”。即它的真值是唯一的。命题的基本概念是本章学习的重点。

1.1.2 命题的分类

命题有两种类型:第一种类型是不能分解为更简单的陈述语句的命题,称作原子命题;第二种类型是由联结词、标点符号和原子命题复合构成的命题,称作复合命题。当然,复合命题也具有确定的真值。例如:

(1) 玫瑰是红的并且紫罗兰是蓝的。

(2) 如果明天是个好天气,我们就去野炊。

(1)是由命题“玫瑰是红的”和命题“紫罗兰是蓝的”用联结词“并且”联结起来而得到的一个新命题,由于命题“玫瑰是红的”为真且命题“紫罗兰是蓝的”也为真,所以二者用联结词“并且”联结起来得到的复合命题为真。(2)是由命题“明天是个好天气”和命题“我们去野炊”用联结词“如果……那么……”联结起来而得到的一个新命题。它只有在“明天是个好天气”与“我们没有去野炊”的情况下为假,在所有其他的情况下均为真。

原子命题又可称为简单命题。关于联结词请见1.2节的详细介绍。复合命题的基本性质是:其真值可以由其子命题的真值以及它们复合成该复合命题的联结方式确定。

在数理逻辑中,通常使用大写字母 A, B, \dots, P, Q, \dots 或用带下标的大写字母或用数字,如 $A_i, [12]$ 等表示命题,例如

P: 今天下雨

意味着**P**表示“今天下雨”这个命题的名。也可用数字表示此命题,例如

[12]: 今天下雨

表示命题的符号称为**命题标识符**,**P**和[12]就是**命题标识符**。

一个命题标识符如果表示确定的简单命题,就称为**命题常量**或**命题常元**,如果一个命题标识符只表示任意简单命题的位置标志,就称它为**命题变元**。因为命题变元可以表示任意命题,所以它不能确定真值,故**命题变元**不是命题。当**命题变元****P**用一个特定的简单命题取代时,**P**才能确定真值,这时也称对**P**进行指派。

命题变元是一个待定的简单命题,它和初等代数中字母的地位相似。

1.2 联结词

从上一节我们了解到由简单命题和联结词可以组合成复合命题。在自然语言中,常常

使用的联结词有“如果……那么……”、“不”、“并且”、“或者”、“当且仅当”等。但这些联结词在自然语言中使用时一般都没有很严格的定义，有时显得不很确切。在数理逻辑中，也用到联结词，这些联结词就是从日常所使用的联结词中抽象出来的，但需对这些联结词做出明确规定并符号化。下面介绍比较常用的五个联结词。

联结词确定复合命题的逻辑形式。它来源于自然语言中的联结词，但与自然语言中的联结词有一定的差别。

1.2.1 否定联结词

定义 1.1 与命题 P 的真值相反的命题称为 P 的否定命题，记作 $\neg P$ ，读作“非 P ”。命题 P 的真值与其否定 $\neg P$ 的真值之间的关系如表 1.1 所示。

表 1.1

 $\neg P$ 的真值表

P	$\neg P$
T	F
F	T

否定联结词是一个一元联结词，它只作用于一个命题。

表 1.1 称作命题 $\neg P$ 的真值表（定义见定义 1.8）。由于命题 $\neg P$ 的真值依赖于命题 P 的真值，故在表的第一行是 P 和 $\neg P$ ，第二行表示当命题 P 的真值为 T 时，命题 $\neg P$ 的真值为 F，第三行表示当命题 P 的真值为 F 时，命题 $\neg P$ 的真值为 T。

【例 1.1】 设

P : 这是一个三角形

$\neg P$: 这不是一个三角形

【例 1.2】 设

P : 雪是白色的

$\neg P$: 雪不是白色的

在此例中，不能将 $\neg P$ 认为是命题“雪是黑色的”。因为雪不是白色的情况中有蓝色、红色等许多种可能。

在日常语言中，还可以用“非”、“不”、“没有”、“无”、“并不”等多种方式表示否定。

1.2.2 合取联结词

定义 1.2 只有命题 P 与命题 Q 的真值均为 T 时，其真值才为 T 的命题，称为命题 P 与命题 Q 的合取命题，记作 $P \wedge Q$ ，读作“ P 与 Q ”。命题 $P \wedge Q$ 的真值与命题 P 和命题 Q 的真值之间的关系的真值表如表 1.2 所示。

表 1.2

 $P \wedge Q$ 的真值表

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F