



中国科学院电子信息与通信系列规划教材

电磁场与波简明教程

杨儒贵 刘运林 编著



科学出版社
www.sciencep.com

中国科学院电子信息与通信系列规划教材

电磁场与波简明教程

杨儒贵 刘运林 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书为《中国科学院电子信息与通信系列规划教材》之一,同时也为2005年四川省精品课程“电磁场与电磁波”的配套少学时教材。

本书简明地论述了电磁场与波的基本特性及其分析方法,内容侧重于电磁波。全书共分9章,内容包括数学基础,物理基础,静电场,恒定电流场,恒定磁场,时变电磁场,平面电磁波,导行电磁波和电磁辐射等。附录中给出电磁物理量的符号、单位及量纲,SI制的倍数单位,矢量恒等式,正交曲面坐标系,以及电磁波的波段划分及其主要应用等内容。书中例题丰富,每章配有小结、思考题和习题,并且书末附有习题答案。

本书着重物理概念的诠释,避免较深的数学内容,同时重视工程应用,内容简练,条理清晰。本书可作为一般高等院校电子信息、通信等专业本科生的教材,也可作为相关工程技术人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与波简明教程/杨儒贵,刘运林编著. —北京:科学出版社,2006
(中国科学院电子信息与通信系列规划教材)

ISBN 7-03-016410-5

I. 电… I. ①杨…②刘… II. ①电磁场-高等学校-教材②电磁波-高等学校-教材 N. O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 125872 号

责任编辑:匡 敏 余 江 / 责任校对:钟 洋

责任印制:钱玉芬 / 封面设计:陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

丽源印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006年1月第一版 开本:B5(720×1000)

2006年1月第一次印刷 印张:17 3/4

印数:1—4 000 字数:343 000

定价:22.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

《中国科学院电子信息与通信系列规划教材》

编委会

顾问：保 铮 中国科学院院士 西安电子科技大学
刘永坦 两院院士 哈尔滨工业大学
陈俊亮 两院院士 北京邮电大学

主任：谈振辉 教授 北京交通大学

副主任：任晓敏 教授 北京邮电大学
梁昌洪 教授 西安电子科技大学
冯正和 教授 清华大学
张文军 教授 上海交通大学
林 鹏 编审 科学出版社

委员：(按姓氏汉语拼音排序)

段哲民 教授 西北工业大学
顾学迈 教授 哈尔滨工业大学
洪 伟 教授 东南大学
焦李成 教授 西安电子科技大学
李少谦 教授 电子科技大学
毛军发 教授 上海交通大学
沈连丰 教授 东南大学
唐朝京 教授 国防科技大学
王成华 教授 南京航空航天大学
王文博 教授 北京邮电大学
徐安士 教授 北京大学
姚 彦 教授 清华大学
严国萍 教授 华中科技大学
杨建宇 教授 电子科技大学
张宏科 教授 北京交通大学
张晓林 教授 北京航空航天大学

秘书：段博原 编辑 科学出版社

丛 书 序

信息技术的高速发展及其广泛应用,使信息技术成为当今国际竞争中最重要
的战略技术。信息技术对经济建设、社会变革、国家安全乃至整个国家的发展起到
关键性的作用,它是经济发展的“倍增器”和社会进步的“催化剂”,是体现综合国力
的重要标志。在人类历史上,没有一种技术像信息技术这样引起社会如此广泛、深
刻的变革。在 20 世纪末和 21 世纪前半叶,信息技术乃是社会发展最重要的技术驱
动力,可以说,21 世纪人类已经步入了信息时代。信息产业在世界范围内正在由先
导产业逐步变为主导产业。从微观上看,表现为单位产品的价格构成中,能源和材
料的消耗减少而信息技术和信息服务的比重上升;从宏观上看,表现为国民生产总
值(GDP)中信息产业所占的比重增加。一个国家信息产业的发展水平将是衡量该
国社会经济总体发展和现代化程度的重要标志之一。

目前,信息科学已成为世界各国最优先发展的科学之一。党的十六大提出了
“加速发展信息产业,大力推进信息化,以信息化带动工业化”的发展战略,以及“优
先发展信息产业,在经济和社会领域广泛应用信息技术”的基本国策,使我国信息
产业得到了前所未有的重视,信息产业呈现出飞速发展的势头。信息产业的发展
离不开信息化人才,信息化人才建设将是信息产业可持续发展的关键。然而,有关
调查表明,我国国家信息化指数为 38.46,而信息化人才资源指数仅为 13.43。据
权威机构预测,从 2005 年到 2009 年,中国信息行业将以 18.5%的年复合增长率
高速增长,中国信息市场将迎来又一个“黄金年代”。在信息化发展势头的带动下,
我国信息化人才缺乏已经成为制约信息产业发展的重要因素。

为了适应新世纪信息学科尤其是电子信息与通信学科的长足发展,在规模上、
素质上更好地满足我国信息产业和信息科学技术的发展需要,更好地实现电子信
息与通信学科专业人才的培养目标,推进国内信息产业的发展,中国科学院教材建
设专家委员会和科学出版社组织电子信息与通信领域的院士、专家、教学指导委
员会成员、国家级教学名师及电子信息与通信学科院校的相关领导等组成编委会,共
同组织编写这套《中国科学院电子信息与通信系列规划教材》。

本套教材主要面向全国范围内综合性院校电子信息工程、通信工程、信息工程
等相关专业的本科生。本套教材的编委会成员具有国内电子信息与通信方面的较
高学术水平,他们负责对本套教材的编写大纲及内容进行审定,可使本套教材的质
量得以保证。

本套教材主要有以下几方面的特点:

1. 适应多层次的需要。依据最新专业规范,系列教材主要根据教育部最新公布的电子信息与通信学科相关专业的“学科专业规范”和“基础课程教学基本要求”进行教材内容的安排与设置。同时,根据各类型高校学生的实际需要,编写不同层次的教材。

2. 结构体系完备。本套教材覆盖本科、研究生教学层次,各门课程的知识点之间相互衔接,以便完整掌握学科基本概念、基本理论,了解学科整体发展趋势。

3. 作者水平较高。我们将邀请设有电子、通信国家重点学科的院校,以及国家级、省级教学名师或国家级、省级精品课程负责人编写教材。

4. 借鉴国外优秀教材。编委会为每门课程推荐一本国外相关的经典原版教材,作为教师编写的参考书。

5. 理论与实际相结合,加强实践教学。教材编写注重案例和实践环节,着力于学生实际动手能力的培养。

6. 教材形式多样。本套教材除主教材外,还配套有辅导书、教师参考书、多媒体课件、习题库及网络课程等。

根据电子信息与通信学科专业发展的战略要求,我们将对本套系列教材不断更新,以保持教材的先进性和适用性。热忱欢迎全国同行以及关注电子信息与通信领域教育及教材建设的广大有识之士对我们的工作提出宝贵意见和建议。

北京交通大学校长



2005 年 10 月

前 言

信息技术的飞速发展,要求从事电子信息工程的技术人员必须通晓和掌握电磁场与波的基本特性、分析方法及其应用。当前国内“电磁场与电磁波”的相关教材甚多,这些教材各具特色,但大都内容较深,所需学时数较多。随着高等教育事业的蓬勃发展,涌现了一批新兴的高等院校,其中多数属于省级的一般院校。为了适应电子信息技术的发展需求,这些院校相关专业仍然保留了“电磁场与电磁波”课程,但是分配的学时较少。为了适应这种少学时的教学需求,作者编写了这本教材。本书简明地论述电磁场与波的基本特性及其分析方法,内容侧重于电磁波。同时,本书着重物理概念的诠释,避免较深的数学内容,并且增加了工程应用方面的内容。

我们知道,静止电荷周围存在一种效应,它表现为对带电体有力的作用,这种效应是由存在于电荷周围的一种物质——**电场**产生的。在运动电荷或电流周围,除电场之外还存在另一种不同的物质,它表现为对磁铁和载流导体有力的作用,这种物质称为**磁场**。由此可见,电场和磁场都是以力的形式表现的。力是矢量,因此,电场和磁场都是矢量场。当电荷的电量及其位置均不随时间变化时,它产生的电场也不随时间变化,这种电场称为**静电场**。当运动电荷的电荷量及速度保持恒定时,它形成的电流也是恒定的,这种恒定电流产生的磁场不随时间变化,这种磁场称为**恒定磁场**。如果电荷及电流均随时间改变,它们产生的电场及磁场也是随时变化的,而且人们发现时变的电场与时变的磁场可以相互转化,两者不可分割,它们构成统一的**时变电磁场**。时变电场与时变磁场之间的相互转化作用,在空间形成了电磁波,时变电磁场的能量就是以这种电磁波形式进行传播的。静电场与恒定磁场彼此独立,可以分别进行研究。因此,本书先讨论静电场和恒定磁场,然后再介绍时变电磁场。

电磁场与波虽然不可见,但是它们作为客观存在的物质,具有物质的两种重要属性:能量和质量。因电磁场与波的质量极其微小,所以我们通常仅研究电磁场与波的能量特性。

电磁场与波的存在和传播不依赖于任何介质。在没有物质存在的真空环境中,电磁场与波的存在和传播会更加“自由”。因此对于电磁场与波来说,真空环境通常被称为“自由空间”。当空间存在介质时,在电磁场的作用下介质中将发生极化和磁化现象,结果在介质中又产生二次电场及磁场,从而改变了介质中原先的场分布,这就是场与介质的相互作用现象。为了研究方便起见,本书先介绍真空中的电磁场,然后再讨论介质中的电磁场。

现在,人们对于电磁现象的基本规律已经有了充分的认识,但是,人们认识这

些规律却经过了漫长的岁月和艰苦的历程。早在公元前 600 年希腊人就发现摩擦后的琥珀能够吸引微小物体;公元前 300 年我国人民就发现磁石吸铁的现象;公元初我国制成世界上第一个指南针。后来,人们发现了地球磁场的存在。1785 年法国科学家库仑(1736~1806)通过实验创建了著名的**库仑定律**,该定律描述了两个微小带电体之间的作用力与其电量及间距的关系。1820 年丹麦人奥斯特(1777~1851)发现电流周围存在磁场。同年,法国科学家安培(1775~1836)计算出两个电流之间的作用力。1831 年英国科学家法拉第(1791~1867)发现电磁感应现象,创建了**电磁感应定律**,说明时变磁场可以产生时变电场。1873 年英国科学家麦克斯韦(1831~1879)提出了**位移电流**的假设,认为时变电场可以产生时变磁场,并以严格的数学方程描述了电磁场应该遵循的统一规律,这就是著名的**麦克斯韦方程**。该方程说明时变电场可以产生时变磁场,同时又表明时变磁场可以产生时变电场,因此麦克斯韦预言电磁波的存在,后来在 1887 年被德国物理学家赫兹(1857~1894)的实验所证实。在这个基础上,俄国的波波夫及意大利的马可尼于 19 世纪末先后利用电磁波来传输信息,这就逐步形成当今的无线通信、广播、电视、雷达、遥控、遥测、遥感、因特网、局域网、卫星定位以及光纤通信等信息技术。这些新技术的广泛应用又促进了电磁理论的发展。大容量、高性能及高速度计算机的出现,不但解决了很多电磁理论的计算问题,同时也萌生了计算电磁场与波的新方法,从而形成计算电磁学这一新学科,它是当今电磁学的重要分支。

全书共分 9 章,第一章提供了有关矢量分析的数学基础。第二章总结和归纳了物理学中有关电磁场的基本内容。第三章介绍静电场。第四章介绍恒定电流场。第五章介绍恒定磁场。第六章介绍时变电磁场。第七章介绍平面电磁波。第八章介绍导行电磁波。第九章介绍电磁辐射。第一、二章是基础知识,第三、四、五章为静态场,第六、七、八、九章为时变场。最后在附录中给出了电磁物理量的符号、单位及量纲,SI 制的倍数单位,矢量恒等式,正交曲面坐标系,电磁波的波段划分及其主要应用等。

本书在阐明基本理论的同时,每章列举了很多工程应用实例以及自然界中的电磁现象。每章均有小结,帮助学生掌握重点,分清主次。为了培养学生分析问题和解决问题的能力,在讲解例题的同时,每章之后附有一定数量的思考题和习题,并在书末给出习题答案。为方便读者阅读,书中重要的名词、定理、概念和结论等皆以黑体表示,并且书末备有重要名词索引和参考文献。

本书采用 SI 单位制,即国际单位制。在电磁学中,这种单位制的四个基本量是长度、质量、时间和电流。长度单位为 m(米),质量单位为 kg(千克),时间单位为 s(秒),电流单位为 A(安[培])。对于正弦电磁场使用的时间因子为 $e^{j\omega t}$ 。

由于作者水平有限,书中定有不妥之处,敬请广大读者提出宝贵意见。

作 者

2005 年 9 月于西南交通大学

目 录

丛书序

前言

第一章 数学基础	1
1-1 标量与矢量	1
1-2 矢量的代数运算	2
1-3 矢量的标积与矢积	3
1-4 标量场的梯度	5
1-5 矢量场的散度	8
1-6 矢量场的旋度	11
1-7 无散场与无旋场	13
1-8 亥姆霍兹定理	14
1-9 正交曲面坐标系	15
1-10 小结	19
思考题	20
习题	20
第二章 物理基础	22
2-1 电场强度	22
2-2 电位	24
2-3 电流	25
2-4 磁通密度	29
2-5 电磁感应	32
2-6 小结	34
思考题	35
习题	35
第三章 静电场	37
3-1 真空中的静电场	37
3-2 介质中的静电场	44
3-3 静电场的边界条件	49
3-4 电容	53
3-5 电场能量和力	55

3-6 镜像法	62
3-7 应用	67
3-8 小结	69
思考题	70
习题	71
第四章 恒定电流场	75
4-1 导电介质中的恒定电流场	75
4-2 恒定电流场的边界条件	77
4-3 恒定电流场的能量损耗	78
4-4 应用	80
4-5 小结	81
思考题	82
习题	82
第五章 恒定磁场	84
5-1 真空中的恒定磁场	84
5-2 介质中的恒定磁场	89
5-3 恒定磁场的边界条件	93
5-4 电感	97
5-5 磁场能量和力	101
5-6 应用	109
5-7 小结	112
思考题	114
习题	114
第六章 时变电磁场	118
6-1 位移电流	118
6-2 麦克斯韦方程	120
6-3 时变电磁场的边界条件	122
6-4 标量位与矢量位	125
6-5 时变电磁场的能量与能流	130
6-6 正弦电磁场	132
6-7 复能流密度矢量	134
6-8 应用	138
6-9 小结	139
思考题	142
习题	143

第七章 平面电磁波	145
7-1 波动方程	145
7-2 理想介质中的平面波	146
7-3 导电介质中的平面波	151
7-4 平面波的极化特性	156
7-5 平面边界上的正投射	159
7-6 任意方向传播的平面波	164
7-7 平面边界上的斜投射	167
7-8 无反射与全反射	171
7-9 理想导体表面上的斜投射	175
7-10 应用	177
7-11 小结	184
思考题	186
习题	187
第八章 导行电磁波	190
8-1 TEM 波、TE 波及 TM 波	191
8-2 矩形波导的传播特性	194
8-3 矩形波导中的 TE_{10} 波	200
8-4 波导传输功率与传输损耗	204
8-5 谐振腔	207
8-6 同轴线	211
8-7 应用	212
8-8 小结	213
思考题	214
习题	214
第九章 电磁辐射	216
9-1 电流元辐射	216
9-2 天线方向性	220
9-3 对称天线辐射	224
9-4 电流环辐射	226
9-5 面天线辐射	229
9-6 天线阵辐射	234
9-7 镜像原理	239
9-8 应用	242
9-9 小结	247

思考题.....	248
习题.....	249
参考文献	251
附录	252
一、符号、单位及量纲	252
二、SI 制的倍数单位.....	254
三、矢量恒等式	254
四、正交曲面坐标系	255
五、电磁波的波段划分及其主要应用	257
名词索引	259
习题答案	264

第一章 数学基础

电磁场是矢量场,本章将系统地介绍有关描述矢量场的基本数学知识。首先在直角坐标系中,指出矢量与标量的异同,给出矢量的定义、代数运算以及标积和矢积运算。然后,介绍标量场的梯度、矢量场的散度和旋度特性,介绍揭示矢量场重要特性的亥姆霍兹定理。最后,介绍两种常用的正交曲面坐标系:圆柱坐标系和球坐标系。

1-1 标量与矢量

仅具有大小特征的**量称为标量**。例如长度、面积、体积、温度、气压、密度、质量、能量及电位等物理量都是标量。**不仅具有大小而且具有方向特征的量为矢量**。例如:力、位移、速度、加速度、电场强度及磁场强度等物理量都是矢量。本书以黑斜体表示矢量。

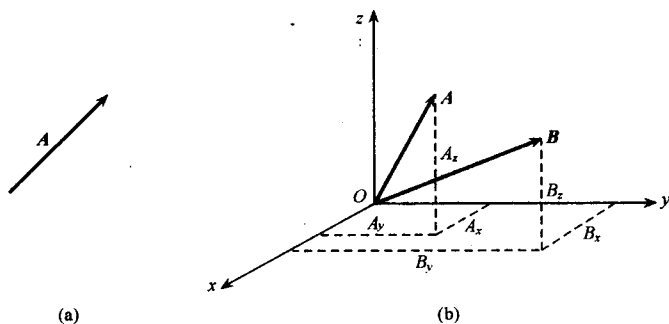


图 1-1-1 矢量的几何表示

矢量 A 的几何表示是用一条有向线段,如图 1-1-1(a)所示,线段的长度表示矢量 A 的大小,其指向表示矢量 A 的方向。在直角坐标系中,若把代表矢量 A 和 B 的有向线段的始端放在坐标系的原点,如图 1-1-1(b)所示,不同的矢量,其终端坐标不同。矢量 A 的终端坐标为 (A_x, A_y, A_z) ; 矢量 B 的终端坐标为 (B_x, B_y, B_z) 。通常, A_x, A_y, A_z 称为矢量 A 的三个相应的坐标分量; B_x, B_y, B_z 称为矢量 B 的三个相应的坐标分量。由此可见,一个矢量可用其三个坐标分量来表示。反之,三个标量可用一个矢量来代替,这正是矢量运算比标量运算简捷的原因。当然,表示一个矢量的三个标量并不是任意的,它们必须是矢量的三个坐标分量。

标量的空间分布构成标量场,矢量的空间分布构成矢量场。图 1-1-2(a)以浓

度表示一种标量场的空间分布,图 1-1-2(b)以箭头表示一种矢量场的空间分布。两种场的空间分布均以中心对称。

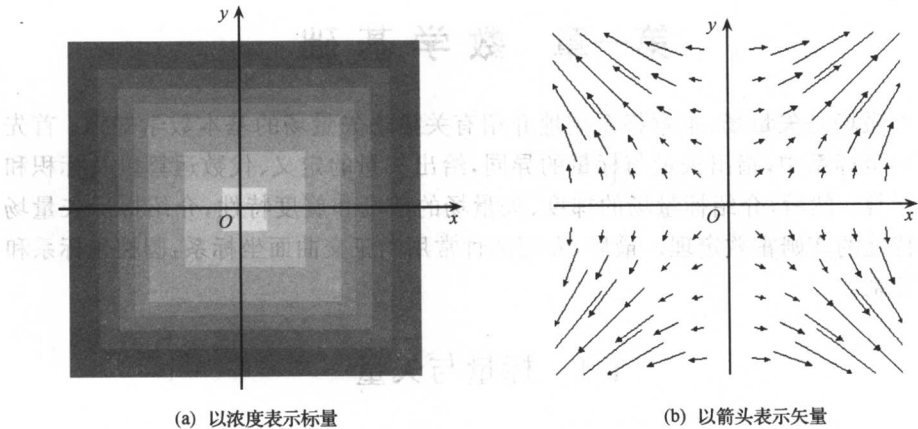


图 1-1-2 标量场和矢量场

通常,矢量场中各点矢量的大小及方向均随空间位置而变。若矢量的大小及方向均与空间坐标无关,这种矢量称为常矢量或简称为常矢。

1-2 矢量的代数运算

当矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量 $\boldsymbol{B}$ 的大小及方向均相同时,则认为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 。因此,只有当两个矢量的各个相应坐标分量均相同时,才可认为两个矢量相等。

矢量可以进行加法运算,且加法运算符合结合律和交换律,结合律为

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) \tag{1-2-1}$$

交换律为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \tag{1-2-2}$$

两个矢量相减也可归结为相加运算,例如

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}) \tag{1-2-3}$$

式中 $(-\boldsymbol{B})$ 表示与矢量 $\boldsymbol{B}$ 大小相等、方向相反的矢量。矢量加减运算的几何表示如图 1-2-1 所示。两个矢量的加减运算就是对应坐标分量的相加和相减。例如在直角坐标系中,若矢量 $\boldsymbol{A}$ 的坐标分量为 (A_x,A_y,A_z) ,矢量 $\boldsymbol{B}$ 的坐标分量为 (B_x,B_y,B_z) ,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的合成矢量 $\boldsymbol{C}$ 的坐标分量为

$$(A_x+B_x,A_y+B_y,A_z+B_z)$$

矢量与标量之间可以进行乘法运算,当矢量 $\boldsymbol{A}$ 与正标量 η 相乘时,其乘积仍然是一个矢量,即各个坐标分量乘以 η 倍,亦乘积 $(\eta\boldsymbol{A})$ 的坐标分量为 $(\eta A_x,\eta A_y,\eta A_z)$ 。可见,若 $\eta>1$,则乘积矢量伸长;若 $0<\eta<1$,则乘积矢量缩短,如图 1-2-2 所

示。矢量与正标量相乘时,仅矢量的大小发生改变,其方向仍然保持不变;矢量与负标量相乘时,不仅大小发生改变,其方向也发生改变,与原来的方向恰好相反。

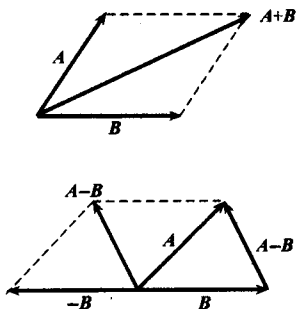


图 1-2-1 矢量加减

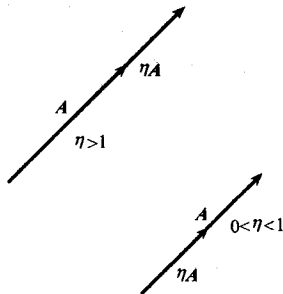


图 1-2-2 矢量与标量相乘

例 1-2-1 设矢量 $A = e_x + 3e_y + 5e_z$, $B = 4e_x - 3e_y + 2e_z$, 求合成矢量 $A+B$ 和 $A-B$ 。

解 $A+B = (1+4)e_x + (3-3)e_y + (5+2)e_z = 5e_x + 7e_z$

$A-B = (1-4)e_x + (3+3)e_y + (5-2)e_z = -3e_x + 6e_y + 3e_z$

1-3 矢量的标积与矢积

矢量之间的乘法运算与标量之间的乘法运算截然不同,矢量之间的乘法运算有两种形式:标积和矢积。两个矢量的标积又称为点积或内积,以点号“ $\cdot$ ”表示。在直角坐标系中,若矢量 A 的坐标分量为 (A_x, A_y, A_z) , 矢量 B 的坐标分量为 (B_x, B_y, B_z) , 则矢量 A 与矢量 B 标积的代数定义为

$$A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1-3-1)$$

由此可见,两个矢量的标积是一个标量。显然,矢量标积的运算符合交换律,即

$$A \cdot B = B \cdot A \quad (1-3-2)$$

根据矢量标积的定义得知,矢量 A 与其本身的标积为

$$A \cdot A = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad (1-3-3)$$

显然, $\sqrt{A \cdot A}$ 为矢量 A 的大小。矢量 A 的大小称为矢量 A 的模,以绝对值符号 $|A|$ 或非黑体 A 表示,即

$$A = |A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1-3-4)$$

模为 1 的矢量称为单位矢量。任一矢量 A 可写成

$$A = |A| \frac{A}{|A|}$$

根据矢量与标量的乘法规则,得知上式中矢量 $\frac{A}{|A|}$ 的直角坐标分量为

$$\left(\frac{A_x}{|A|}, \frac{A_y}{|A|}, \frac{A_z}{|A|} \right)$$

由于 $\sqrt{\left(\frac{A_x}{|A|}\right)^2 + \left(\frac{A_y}{|A|}\right)^2 + \left(\frac{A_z}{|A|}\right)^2} = 1$, 可见矢量 $\frac{A}{|A|}$ 的模为 1, 所以矢量 $\frac{A}{|A|}$ 称为矢量 A 的单位矢量, 以 e_a 表示, 即

$$e_a = \frac{A}{|A|} \quad (1-3-5)$$

由此得

$$A = |A|e_a \quad (1-3-6)$$

式中 e_a 是矢量 A 的单位矢量, 其模为 1, 方向与 A 相同。式(1-3-6)表明, 任一矢量等于该矢量的模与其单位矢量的乘积。

若 e_x, e_y, e_z 分别表示 x 轴、 y 轴、 z 轴方向上的单位矢量, 则矢量 A 在三个坐标轴上的投影分别为 $A_x e_x, A_y e_y, A_z e_z$, 那么矢量 A 为三个坐标轴上投影的合成矢量, 即

$$A = A_x e_x + A_y e_y + A_z e_z \quad (1-3-7)$$

而矢量 A 的单位矢量 e_a 可表示为

$$e_a = \frac{A_x}{|A|} e_x + \frac{A_y}{|A|} e_y + \frac{A_z}{|A|} e_z \quad (1-3-8)$$

或者写为

$$e_a = e_x \cos \alpha + e_y \cos \beta + e_z \cos \gamma \quad (1-3-9)$$

式中角度 α, β, γ 分别为矢量 A 与坐标轴 x, y, z 的夹角, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为矢量 A 的方向余弦。

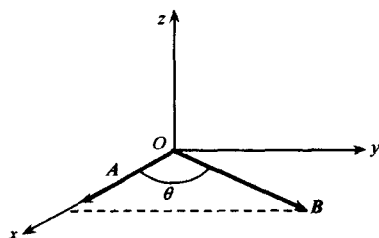


图 1-3-1 矢量的标积

矢量标积的几何意义如图 1-3-1 所示。

设矢量 $A = |A|e_x$, 矢量 $B = B_x e_x + B_y e_y$, 若矢量 B 与 x 轴的夹角为 θ , 则

$$B_x = |B| \cos \theta \quad B_y = |B| \sin \theta$$

那么由式(1-3-1)得

$$A \cdot B = |A| |B| \cos \theta \quad (1-3-10)$$

式中 $|B| \cos \theta$ 是矢量 B 在矢量 A 方向上的投影大小, $|A| \cos \theta$ 是矢量 A 在矢量 B 方向上的投影大小。式(1-3-10)表明, 标积 $A \cdot B$ 等于矢量 A 的模与矢量 B 在矢量 A 方向上的投影大小的乘积, 或者说等于矢量 B 的模与矢量 A 在矢量 B 方向上的投影大小的乘积。显然

$$A \cdot B = \begin{cases} 0 & A \perp B \\ |A| |B| & A \parallel B \end{cases}$$

矢量的矢积又称为叉积或外积, 以叉号“ $\times$ ”表示。在直角坐标系中, 若矢量 A

和矢量 B 分别为

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z$$

则矢量 A 与矢量 B 矢积的代数定义可用行列式表示为

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1-3-11)$$

由此可见,两个矢量的矢积仍然是一个矢量。矢量之间的矢积运算不符合交换律,读者可以根据定义证明

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \quad (1-3-12)$$

矢量矢积的几何意义如图 1-3-2 所示。

设矢量 $\mathbf{A} = A|\mathbf{e}_x|$, 矢量 $\mathbf{B} = B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y$, 若矢量 A 与矢量 B 之间的夹角为 θ , 则由式 (1-3-11) 得

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{e}_z |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta \quad (1-3-13)$$

可见,矢量 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ 的方向与矢量 A 及矢量 B 垂直,且由矢量 A 旋转到矢量 B ,并与矢量 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ 构成右旋关系,矢量 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ 的大小为 $|\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta$ 。显然

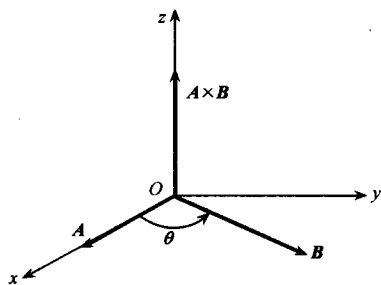


图 1-3-2 矢量的矢积

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \begin{cases} 0 & \mathbf{A} \parallel \mathbf{B} \\ |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| & \mathbf{A} \perp \mathbf{B} \end{cases} \quad (1-3-14)$$

例 1-3-1 设两个矢量 $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y + 5\mathbf{e}_z$, $\mathbf{B} = 4\mathbf{e}_x - 3\mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z$, 求乘积矢量 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 和 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 。

解 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (1 \times 4)\mathbf{e}_x + [3 \times (-3)]\mathbf{e}_y + (5 \times 2)\mathbf{e}_z = 4\mathbf{e}_x - 9\mathbf{e}_y + 10\mathbf{e}_z$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 21\mathbf{e}_x + 18\mathbf{e}_y - 15\mathbf{e}_z$$

1-4 标量场的梯度

标量场中各点标量的大小可能不等,因此某点标量沿着各个方向的变化率可能不同。为了描述标量场的这种变化特性,引入方向导数的概念。标量场在某点的方向导数表示标量场自该点沿某一方向上的变化率。

如图 1-4-1 所示,标量场 Φ 在 P 点沿 l 方向上的方向导数 $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial l} \right|_P$ 定义为

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial l} \right|_P = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Phi(P') - \Phi(P)}{\Delta l} \quad (1-4-1)$$