普通高等教育基础课规划教材

大学物理实验

◆ 仉志余　王卫星　主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育基础课规划教材

大学物理实验

主　编　仉志余　王卫星
副主编　冯中营　李淑青
参　编　任全年　景银兰　王爱国　李旭彦

机械工业出版社

本书是根据教育部非物理专业大学物理实验课程教学基本要求和中北大学分校21世纪大学复合型人才培养计划，几经修改编写而成的。

本书的编写遵照循序渐进的原则，内容包括“测量误差及数据处理”、“力学和热学实验”、“电磁学实验”、“光学实验”、“近代物理和综合性实验”、“仿真实验”、“选做实验”和“设计性实验”，共8章、43个实验。每章内容力求突出“厚基础”、“重实践”和“强能力”的特色。在内容体系方面，充分注意到“压缩验证性实验，增强综合性、设计性和开放性实验”的要求；为体现学科发展的新趋势，在“测量误差及数据处理”的编写中引入了“不确定度”的测量结果评定方法；在实验内容中引入了传感器、数字存储示波器、数码照相、计算机数据采集和处理以及虚拟实验等科技发展的新成果。

本书为普通高校工科各专业教材，也可作为相关专业技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

大学物理实验/仉志余，王卫星主编.—北京：机械工业出版社，2006.7
普通高等教育基础课规划教材
ISBN 7-111-19680-5

Ⅰ.大…　Ⅱ.①仉…②王…　Ⅲ.物理学－实验－高等学校－教材
Ⅳ.04－33

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第085937号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
责任编辑：李永联　版式设计：张世琴　责任校对：王　欣
封面设计：饶　薇　责任印制：杨　曦
北京机工印刷厂印刷
2006年8月第1版第1次印刷
184mm×260mm·12.75印张·310千字
定价：22.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68326294
编辑热线电话（010）88379711
封面无防伪标均为盗版

前　言

本书是根据教育部高等学校非物理类专业物理基础课程教学指导分委员会“非物理类理工学科大学物理实验课程教学基本要求”和中北大学分校21世纪大学复合型人才培养计划关于理工交叉渗透的原则，并凝炼作者长期参与教学改革与实践的成果，几经修订编写而成的。

物理实验课是理工科大学开设的一门必修基础课。本教材的内容体系遵照循序渐进的原则，分为“测量误差及数据处理”、“力学和热学实验”、“电磁学实验”、“光学实验”、“近代物理和综合性实验”、“仿真实验”、“选做实验”和“设计性实验”八章。每章的内容均突出了“厚基础”、“重实践”和“强能力”的特色，即以加强基础训练为主，让学生在学习物理实验知识，掌握实验方法，强化实验能力等方面受到系统的训练。在构架内容体系时，我们充分注意到了“压缩验证性实验，增强综合性、设计性和开放性实验”的要求，同时充分考虑到了学科发展的新趋势，使教学更好地适应现代科学技术的发展。例如，在编写“测量误差及数据处理”中，引入了“不确定度”评定测量结果，这是误差分析发展之新方法；在实验内容中引入了传感器、数字存储示波器、数码照相、计算机采集和处理数据以及虚拟实验等科学技术发展的新成果。在实验内容的讲述上，我们充分考虑了与现流行的大学物理教材相匹配，并博采众大学物理实验教材之所长，力图开门见山，深入浅出，通俗易懂，便于操作。

本教材中安排了43个实验，每个实验2～3学时，可满足普通高校本科各工科专业选择的需要，同时也适合同层次的成人教育以及工程技术人员和教师参考使用。对于高职高专层次的学生，也可根据教学计划选择本教材部分内容讲解使用。

本书由仉志余、王卫星任主编、冯中营、李淑青任副主编。责任执笔有仉志余（第一章）、王卫星（实验1、3、5～9、11～15、21、22、24、25、27、32、35、38～43）、冯中营（绪论、实验18、23、26、30、31）、李淑青（29、31、34、36、37）、任全年（实验2、4），景银兰（实验10、17）、王爱国（实验19、20）、李旭彦（实验16、28）等。主编负责制定编写方案、全书统稿及对各章内容进行修改等工作。此外，张俊祥、张兴、常锋等老师也为此书的编写做了相应的工作。

在本教材的编写和出版过程中，我们参考了许多兄弟院校的实验教材和有关著作，在此表示衷心感谢。由于我们水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2006年5月

目　　录

绪　论

一、物理实验的地位和作用

物理学不仅是一门基础理论科学，而且也是一门实验科学。物理学中概念的确立以及定律和原理的产生和发展，都是以大量的实验事实为依据，并不断受到实验实践检验的。经典的牛顿力学三大定律，近代的相对论和量子论，都是在总结实验事实的基础上建立起来的。所以，物理实验在物理学中的作用是不言而喻的。

一名工程技术人员必须掌握科学的实验研究方法，即通过实践和实验观察，抓住问题的本质，建立数学模型，形成概念或理论，并不断进行新的实验和实践，检验和修正原有的理论或设计、工艺，不断推进技术革新。

一名高等工科院校的大学生，应该成为应用型、开拓型、创新型的工程技术人才，要善于把新技术应用到工程建设中去，并不断创新。同时也要求学校必须加强实践性教学，使学生接受系统的实验技能训练，掌握科学的实验研究方法。物理实验正是为了上述目的而开设的一门重要的基础课。

二、物理实验课的主要任务

1. 学习和掌握进行物理实验的基础知识、基本方法和基本技能，了解进行物理实验的主要过程，使学生具有初步的科学实验能力。

2. 培养和提高学生观察和分析物理现象的本领，训练学生从实验中归纳物理规律的能力，并使学生学会利用所掌握的物理理论进行实验和设计实验。

3. 培养学生严肃认真的工作作风、实事求是的科学态度、勇于探索的钻研精神，克服困难的坚强意志和遵守纪律的优良品德。

三、物理实验课的基本程序

1. 预习实验

由于实验课时间有限，熟悉仪器、测量数据的任务比较繁重，所以学生必须在做实验前做好预习工作。在预习中要以理解实验原理，熟悉实验步骤，了解实验仪器为主，还要写出预习报告。预习报告作为正式报告的一部分应包括如下内容：实验名称，实验目的，实验仪器，实验原理，实验步骤，数据记录表格和注意事项等。在实验原理部分应包括必须的文字叙述、原理图、公式及公式推导和公式说明。实验步骤要扼要说明实验的内容、步骤及操作要点。记录数据的表格上要表明文字符号所代表的物理量及单位，以及表格名称。上课时把预习报告交给老师检查。

2. 实验操作

实验课上认真听指导教师的重点讲解。严守实验室规则和仪器操作规程，把仪器装置调整到最佳状态。操作实验时精神要集中，观察要仔细，注意分析实验现象，及时排除实验故障，观察后立即准确、如实地记录数据，不得拼凑、涂改或事后追记数据。如果发现数据不合理，应仔细分析其原因，然后重新测量。记录数据要经指导教师审阅签字。做完实验后要将仪器整理复原完毕，方可离开。

3. 课后报告

在做完实验后，要及时写出实验报告。实验报告要在预习报告的基础上对实验测量的原始数据，按照原理公式进行数据处理、绘制图线，得出结论。分析影响实验结果的因素并作修正，进行误差分析和计算。提出改进实验方法的设想、对实验课的安排提出建议等。回答思考题。预习报告、实验记录和课后报告构成一份完整的实验报告。

四、学生实验守则

1. 进入实验室前，务必搞好个人卫生，不得将不洁物品带入室内。

2. 进入实验室后，必须遵守实验室的各项规章制度，不得高声喧哗，不得随意串组，不得随意动用实验室的任何物品。

3. 实验前必须认真预习实验教材及实验内容，明确实验目的、原理、步骤，写好预习实验报告，并回答实验教师提出的问题，不合格者，须重新预习，待合格后，方能进行实验。

4. 实验时要服从教师的指导，认真操作。不得草率从事，抄袭臆造。

5. 实验中，要爱护公共财物，严格按照有关操作规程使用仪器，并节约使用各种实验材料。如违犯操作规程或不听从指导而造成设备或器材损坏的，按学校有关规定处理。

6. 必须注意人身和设备安全，若发现异常现象或故障隐患，应立即向管理人员报告，不得自行处理。

7. 实验完毕，应将仪器，工具及实验场地等进行清理归还，经管理人员验收后，方可离开实验室。

第一章　测量误差及数据处理

测量误差是一门专门的科学。本章只介绍测量误差的一些基本知识。通过本章的学习，将使学生掌握误差的基本概念，学会简单估算误差的方法，了解误差分析对做好物理实验的重要意义，并熟练地进行有效数字的计算，学会处理数据的一些基本方法。

第一节　测量误差的基本概念

一、测量

测量就是把待测的物理量与同类标准量（量具）进行比较，得出待测量的量值（量值是指用数和适当的单位表示的量。一般使用国际单位），这个过程称为测量。把测得的量值记录下来就是实验数据。

测量可分为直接测量和间接测量。**直接测量**就是把待测量与标准量（量具、仪器的刻度）直接比较得出结果。如用米尺量度物体的长度、用安培表测量电流强度等均为直接测量。**间接测量**是借助函数关系由直接测量的结果计算出所要求的物理量。如测量圆柱体的体积 V 时，高度 h 和直径 d 可直接测得，体积 V 则由公式 $V=\pi d^2 h/4$ 计算而得，这就是间接测量。

此外，根据测量条件可区分为等精度测量和非等精度测量。**等精度测量**是指在同一条件下进行的多次测量。反之，若每次测量时的条件不同，这样进行的一系列测量叫**非等精度测量**。物理实验中大多采用等精度测量。

二、误差与偏差

物理量在一定条件下都客观地存在一个确定的值，这个客观真实值称为**真值**。但是，由于实验条件、测量方法、测量仪器和测量者自身判断等原因，任何测量结果即测量值都必然含有误差。**误差**定义为测量值与真值之差，用下式表示：

$$\Delta x = x - x_0 \tag{1-1-1}$$

式中，x_0 为真值；x 为测量值；Δx 称为**测量误差**，又称为**绝对误差**。注意，绝对误差不是误差的绝对值，它有正负之分。

由于客观条件及人们认识的局限性，测量值几乎不可能是真值，只能是近似值，而真值 x_0 又无法预先知道，所以绝对误差也得不到。如果能估计其绝对值的范围为

$$|\Delta x| = |x - x_0| \leqslant \delta$$

则 δ 称为近似值 x 的**绝对误差限**。

设某物理量真值为 x_0，进行 n 次等精度测量，测量值分别为 x_1，x_2，…，x_n，这组测量值的算术平均值 $\overline{x}$ 为

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1-1-2}$$

这是真值 x_0 的估计值，称 $\overline{x}$ 为**近真值**。

为了估计误差，**偏差**（或**残差**）定义为测量值与近真值的差值，即

$$\Delta x_i = x_i - \overline{x} \tag{1-1-3}$$

式中 $i=1$，2，3，…，n 表示测量次数。

算术平均绝对偏差定义为

$$\overline{\Delta x} = \frac{1}{n}(|x_1 - \overline{x}| + |x_2 - \overline{x}| + \cdots + |x_n - \overline{x}|) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\Delta x_i|$$

三、误差的分类

根据误差的性质及其产生的原因，将误差分为系统误差、随机误差和粗大误差三大类。

1. 系统误差

系统误差是指在一定条件下多次测量的结果总向某一确定方向偏离或按一定规律变化。系统误差的特征是它的规律的确定性。产生系统误差有以下几方面原因：仪器本身的缺陷（如刻度不准、不均匀或零点没校准等）、理论公式或测量方法的近似性（如伏安法测电阻没有考虑电表的内阻）、环境的改变（如测量过程中温度、压强的变化等）、个人存在的不良测量习惯（如读数总是偏大或偏小）等。

由于系统误差的数值和符号是定值或按某种规律变化，因此系统误差不能通过多次测量来消除或减小。但是，如果能找出产生系统误差的原因，就能采取适当的方法消除或减小它的影响，或对测量结果进行修正。例如在导出单摆周期公式 $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ 时，曾假定摆的偏角 θ 甚小，于是 $\sin\theta$ 可用 θ（弧度）代替，如 θ 在2°以下，则误差在百万分之一内，若 θ 在10°左右，则误差在百分之一内。这种误差可由理论上的修正或改进实验方法加以减小。

2. 随机误差

随机误差是指即使在测量过程中已经减小或消除了系统误差，但在同一条件下对某一物理量进行多次测量，也总存在差异，误差时大时小，时正时负。这种误差是由于许多不可预测的偶然因素共同作用造成的，而且每个因素的作用都很微小。如测量时外界温度、湿度的微小起伏，别处产生的杂散电磁场，不规则的机械振动和电压的随机波动等，使实验过程中的物理现象和仪器的性能时刻发生随机变化，加上人们感官灵敏性的限制，致使每次测量都存在偶然性。这样的误差称为**随机误差**（或**偶然误差**）。对每一次测量来看，随机误差的大小、符号都无法预知，完全出于偶然。但是当测量次数足够大时，随机误差服从一定的统计规律，也就是正态分布（或高斯分布），其特点是：

1）单峰性：绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的概率大。

2）对称性：绝对值相等的正负误差出现的概率相等。

3）有界性：在一定的测量条件下随机误差的绝对值不会超过某一界限。

因此可以用增加测量次数的方法减小随机误差。当测量次数足够大时，测量列的随机误差趋近于零，测量列的算术平均值就趋近于真值。因此，在有限次测量中，我们应取测量列的算术平均值作为真值的估值。

3. 粗大误差

对测量结果产生明显歪曲的、数值比较大的误差称为**粗大误差**。产生粗大误差的原因多是由于人员失误或测量不符合规定的条件造成的。这类误差在处理数据过程中应依照判据加以剔除。

总的来说，误差的大小表示测量结果接近真值的程度。根据误差的分类，测量结果的优劣可用测量的准确度和测量的精密度来表示。精密度高是指随机误差小，数据集中；正确度高是指系统误差小，测量的平均值偏离真值小；准确度高是指测量的精密度和正确度都高，数据集中而且偏离真值小，即随机误差和系统误差都小。

四、随机误差的估计

标准偏差 S 是描述服从正态分布的误差其数值分布特征的一个重要参数。因此常用它来估计随机误差。处理有限次等精度测量的一组实验数据时，可用贝塞尔公式来计算标准偏差的估计值，其过程如下：

设对某一物理量进行了 n 次等精度测量，测量值分别为 x_1，x_2，…，x_n。

1）求出这组测量值的算术平均值$\overline{x}$

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n$$

式中 $i=1$，2，3，…，n 表示测量次数。

2）求出各测值的偏差 Δx_i

$$\Delta x_i = x_i - \overline{x}$$

3）用贝塞尔公式来计算标准偏差 S_x 的估计值

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2/(n-1)} \qquad (1\text{-}1\text{-}4)$$

S_x 表示该测量列 x_1，x_2，…x_n 中某次测量的随机误差在 $-S_x \sim +S_x$ 之间的概率为 68.3%。

4）求平均值的标准偏差 $S_{\overline{x}}$

$$S_{\overline{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2} \qquad (1\text{-}1\text{-}5)$$

$S_{\overline{x}}$表示测量值的平均值的随机误差在 $-S_{\overline{x}} \sim +S_{\overline{x}}$之间的概率为 68.3%。

五、不确定度

不确定度是评定测量值附近的一个值域范围包含真值的可能程度，用测量结果附近的一个范围表示。在实际测量中采用不确定度更能显示测量结果的特征，因此，国际计量局和国家计量局均建议或规定采用不确定度作为基准研究、测量和实验工作中的误差数字指标名称，并用不确定度评价测量结果。

1. 不确定度的评定方法

不确定度的评定方法分为两类：A 类不确定度和 B 类不确定度。

（1）A 类不确定度　**A 类不确定度**是指可以采用统计方法（即具有随机误差性质）计算的不确定度。如测量读数具有分散性，测量时温度波动影响等。这类不确定度服从正态分布规律，因此可以用标准偏差 S 来表征测量结果的 A 类不确定度，即用标准偏差 S_x 或平均值的标准偏差 $S_{\overline{x}}$计算被测量的 A 类不确定度。

计算 A 类不确定度，还可以用最大偏差法、极差法、最小二乘法等。用贝塞尔公式计算 A 类不确定度，可以用函数计算器直接读取，十分方便。

（2）B 类不确定度　**B 类不确定度**是指用非统计方法求出或评定的不确定度，如测量仪器不准确，标准不准确，量具老化等。评定 B 类不确定度常用估计方法。估计适当需要确

定分布规律，同时要参照标准，更需要估计者的实践经验、学识水平等。本书对 B 类不确定度的估计只讨论因仪器不准对应的不确定度 σ_B，即

$$\sigma_B = \Delta_{仪} / \sqrt{3} \tag{1-1-6}$$

式中，$\Delta_{仪}$ 称为“**仪器误差**”，它是指在正确使用仪器的条件下，仪器的示值与被测量的实际值之间可能产生的最大误差，又称**示值误差**或**基本误差**，一般在仪器上或说明书上表明。物理实验中部分仪器的仪器误差见本章“附录”。

当 $\Delta_{仪}$ 未知时，也可以根据测量器具的分度值（即仪器的最小刻度）近似地用下式计算：

$$\sigma_B = 分度值 / \sqrt{12} \tag{1-1-7}$$

如果测量要求不高时，也可取仪器分度值的一半来表示，即

$$\sigma_B = 分度值 /2$$

σ_B 是估计值，它的有效数字一般只保留一位。直接测量值其读数的有效数字最后一位的数位一般应与 σ_B 的有效数字所在数位相同。例如分度值为 1mm 的米尺，可近似地认为

$$\sigma_B = 1/\sqrt{12}\text{mm} \approx 0.3\text{mm}$$

2. 合成不确定度 σ

$$\sigma = \sqrt{S_x^2 + \sigma_B^2} \tag{1-1-8}$$

或

$$\sigma = \sqrt{S_{\bar{x}}^2 + \sigma_B^2} \tag{1-1-9}$$

式（1-1-8）表示在一列多次测量数据中任一次测量值的误差在（$-\sigma$，$+\sigma$）之间的概率为 68.3%，是对这组测量数据可靠性的一种评价。而式（1-1-9）则表示测量值的平均值的误差在（$-\sigma$，$+\sigma$）之间的概率为 68.3%，或者说待测量的真值在 $[\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma]$ 范围内的概率为 68.3%，这反映了平均值接近真值的程度，但不要误认为真值一定在 $[\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma]$ 之间。

六、测量结果的表示

科学实验中要求表示出的测量结果，既要包含待测量的近真值，又要包含测量结果的不确定度 σ，并写成物理含义深刻的标准表达式，即

$$X = \bar{x} \pm \sigma \quad （单位） \tag{1-1-10}$$

式中，X 为待测量；$\bar{x}$为测量的近真值；σ 是合成不确定度，一般保留一位有效数字。这个表达式的物理意义是：该被测量的真值处在区间 $[\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma]$ 内的概率为 68.3%。

七、相对误差

上述的算术平均误差$\overline{\Delta x}$和合成不确定度 σ 均是以绝对误差的形式来表示测量值的误差。但有时为了全面评价测量的优劣，还需要考虑被测量本身的大小。为此，需引入相对误差的概念。**相对误差**的定义为

$$E_x = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \times 100\% \tag{1-1-11}$$

当 Δx 用算术平均误差或合成不确定度来表示时，相对误差分别为

$$E_x = \frac{\overline{\Delta x}}{\bar{x}} \times 100\% \quad 及 \quad E_x = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$$

一般说来，在对同一物理量的测量中，相对误差小的精密度高。

当被测量值有公认理论值或标准值时，在数据的处理中还常常把测量值与理论值或标准值进行比较，并用相对误差来表示

$$E_x = \frac{|X - X_0|}{X_0} \times 100\% \tag{1-1-12}$$

式中，X 表示测量值；X_0 表示理论值（或标准值）。

第二节　直接测量的误差估算和测量结果表示

一、多次等精度直接测量的误差及其表示

设对某一物理量进行了 n 次等精度测量，测量值分别为 x_1，x_2，…，x_n，数据处理的简要步骤如下：

1）按式（1-1-2）求出这组测量值的算术平均值$\overline{x}$

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n$$

2）按式（1-1-3）求出各测量值的偏差 Δx_i

$$\Delta x_i = x_i - \overline{x}$$

3）按式（1-1-4）求出标准偏差的估计值 S_x

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}$$

S_x 一般保留一位有效数字。

4）按式（1-1-5）求出平均值$\overline{x}$的标准偏差 $S_{\overline{x}}$

$$S_{\overline{x}} = S_x / \sqrt{n}$$

$S_{\overline{x}}$一般保留一位或两位有效数字。

5）按式（1-1-6）或（1-1-7）估计测量结果的 B 类不确定度分量 σ_B

$$\sigma_B = \Delta_{仪} / \sqrt{3}$$

或

$$\sigma_B = 分度值 / \sqrt{12}$$

6）按式（1-1-8）或式（1-1-9）求出测量结果的总不确定度 σ

$$\sigma = \sqrt{S_x^2 + \sigma_B^2}$$

或

$$\sigma = \sqrt{S_{\overline{x}}^2 + \sigma_B^2}$$

σ 一般保留一位有效数字。

7）按式（1-1-10）写出测量结果的标准表达式

$$X = \overline{x} \pm \sigma \quad (单位)$$

式中，$\overline{x}$一般采用国际单位和科学计数法，σ 与$\overline{x}$的单位及数量级均相同，$\overline{x}$的有效数字在小数点后的数位要与 σ 取齐。

例 1：用毫米刻度的米尺测量物体长度十次，其测量值分别为：l = 53.27，53.25，53.23，53.29，53.24，53.28，53.26，53.20，53.24，53.21cm，试写出测量结果的标准式。

[解]

1）求长度 l 的近真值

$$\bar{l} = \sum_{i=1}^{n} l_i / n = \frac{1}{10}(53.27 + 53.25 + 53.23 + \cdots + 53.21)\mathrm{cm} = 53.24\mathrm{cm}$$

2）计算 A 类不确定度

$$S_l = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(53.27-53.24)^2 + (53.25-53.24)^2 + \cdots + (53.21-53.24)^2}{10-1}}\mathrm{cm} = 0.03\mathrm{cm}$$

3）计算 B 类不确定度

米尺的仪器误差 $\Delta_{仪} = 0.05\mathrm{cm}$

$$\sigma_B = \Delta_{仪} / \sqrt{3} = 0.05/\sqrt{3}\mathrm{cm} = 0.03\mathrm{cm}$$

4）合成不确定度

$$\sigma = \sqrt{S_l^2 + \sigma_B^2} = \sqrt{0.03^2 + 0.03^2}\mathrm{cm} = 0.04\mathrm{cm}$$

5）测量结果的标准表达式为

$$l = 53.24\mathrm{cm} \pm 0.04\mathrm{cm}$$

或

$$l = (5.324 \pm 0.004) \times 10^{-1}\mathrm{m}$$

二、单次测量的误差及其表示

有些测量只需测量一次或者只能测量一次，于是就以该次测量的测量值 x 表示该被测量的 X 值，其不确定度 σ 就用估算出的 B 类不确定度 σ_B 来粗略地表示

$$\sigma \approx \sigma_B$$

测量结果用下式表示

$$X = x \pm \sigma$$

第三节　间接测量的误差估算和测量结果表示

计算间接测量量的近真值，是把各直接测量列中的近真值代入相应的函数关系式进行计算而得到的。由于各直接测量值都存在误差，因此间接测量值也必然有一定的误差。这种由直接测量的误差影响到间接测量值的误差的现象，称为**误差的传播**。所传播的误差与直接测量值误差的大小以及函数关系式的具体形式有关。

设间接测量值 N 与相互独立的有限个直接测量值 x，y，z，…，u 有下列函数关系

$$N = f(x, y, z, \cdots, u) \tag{1-3-1}$$

若已测得

$$x = \bar{x} \pm \sigma_x, y = \bar{y} \pm \sigma_y, z = \bar{z} \pm \sigma_z, \cdots, u = \bar{u} \pm \sigma_u$$

则间接测量值可表示为

$$N = \bar{N} \pm \sigma_N \tag{1-3-2}$$

式中，$\bar{N}$是把各个直接测量值的近真值$\bar{x}$，$\bar{y}$，$\bar{z}$，…，$\bar{u}$代入式（1-3-1）后求出来的值。下面扼要介绍 σ_N 的计算。

可以严格证明，对某间接测量值 $N = f$（x，y，z，…，u），不确定度的传播公式为

$$\sigma_N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 \sigma_u^2} \tag{1-3-3}$$

其相对不确定度的传播公式为

$$E_N = \frac{\sigma_N}{N}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\sigma_x}{f}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\sigma_y}{f}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\sigma_z}{f}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\sigma_u}{f}\right)^2} \tag{1-3-4}$$

为方便起见，现把一些常用函数的不确定度传递公式列于表 1-3-1 中。

表 1-3-1 常用函数不确定度传递公式

函数关系式 $N=f\,(x, y, z, \cdots, u)$	不确定度传递公式
$N=x+y$	$\sigma_N=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$
$N=x-y$	$\sigma_N=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$
$N=xy$	$\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$
$N=x/y$	$\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$
$N=kx$	$\sigma_N=k\sigma_x,\ \frac{\sigma_N}{N}=\frac{\sigma_x}{x}$
$N=\sqrt[k]{x}$	$\frac{\sigma_N}{N}=\frac{1}{k}\frac{\sigma_x}{x}$
$N=x^k y^m/z^n$	$\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{k^2\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+m^2\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2+n^2\left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2}$
$N=\sin x$	$\sigma_N=\lvert\cos x\rvert\sigma_x$
$N=\ln x$	$\sigma_N=\sigma_x/x$

例 1： 已知电阻 $R_1=50.2\Omega\pm0.5\Omega$，$R_2=149.8\Omega\pm0.5\Omega$，求它们串联的电阻 R 和合成不确定度 σ_R。

［解］ 串联电阻的阻值为

$$R = R_1 + R_2 = (50.2+149.8)\Omega = 200.0\Omega$$

合成不确定度

$$\sigma_R = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial R}{\partial R_i}\sigma_{R_i}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial R_1}\sigma_1\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_2}\sigma_2\right)^2}$$

$$= \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2} = \sqrt{0.5^2+0.5^2}\Omega = 0.7\Omega$$

相对不确定度

$$E_R = \frac{\sigma_R}{R} = \frac{0.7}{200.0}\times 100\% = 3.5\%$$

测量结果

$$R = 200.0\Omega \pm 0.7\Omega$$

间接测量的不确定度计算结果保留一位数，相对不确定度保留两位数。

例 2： 测量金属圆环的内径 $D_1=2.880\text{cm}\pm0.004\text{cm}$，外径 $D_2=3.600\text{cm}\pm0.004\text{cm}$，厚度 $h=2.575\text{cm}\pm0.004\text{cm}$，求圆环的体积 V 的测量结果。

［解］ （1）环体积的近真值为

$$V = \frac{\pi}{4}h(D_2^2 - D_1^2)$$
$$= \frac{3.1416}{4} \times 2.575 \times (3.600^2 - 2.880^2)\mathrm{cm}^3$$
$$= 9.436\mathrm{cm}^3$$

(2) 先将圆环体积公式两边同时取自然对数，然后再求全微分

$$\ln V = \ln\left(\frac{\pi}{4}\right) + \ln h + \ln(D_2^2 - D_1^2)$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{V} = 0 + \frac{\mathrm{d}h}{h} + \frac{2D_2\mathrm{d}D_2 - 2D_1\mathrm{d}D_1}{D_2^2 - D_1^2}$$

则相对不确定度为

$$E_V = \frac{\sigma_V}{V} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2 + \left(\frac{2D_2\sigma_{D_2}}{D_2^2 - D_1^2}\right)^2 + \left(\frac{-2D_1\sigma_{D_1}}{D_2^2 - D_1^2}\right)^2}$$
$$= \left[\left(\frac{0.004}{2.575}\right)^2 + \left(\frac{2 \times 3.600 \times 0.004}{3.600^2 - 2.880^2}\right)^2 + \left(\frac{-2 \times 2.880 \times 0.004}{3.600^2 - 2.880^2}\right)^2\right]^{1/2}$$
$$= 0.0081 = 0.81\%$$

(3) 总合成不确定度为

$$\sigma_V = VE_V = 9.436 \times 0.0081\mathrm{cm}^3 = 0.08\mathrm{cm}^3$$

(4) 环体积的测量结果

$$V = 9.44\mathrm{cm} \pm 0.08\mathrm{cm}^3$$

V 的标准式中，$V = 9.436\mathrm{cm}^3$ 在小数点后应与不确定度的位数取齐，因此将小数点后的第三位数“6”按数字修约原则进到百分位，故为 $9.44\mathrm{cm}^3$。

第四节 有效数字及其运算

当真值 x_0 有多位数时，常常按舍入原则（例如四舍五入原则）得到近似值 x。例如常数 π，其真值 $\pi_0 = 3.14159265\cdots$，若取前三位作为其近似值，得 $\pi = 3.14$，这时绝对误差限不超过 3.14 末位数的半个单位，即 $|\pi_0 - \pi| = |\pi_0 - 3.14| \leqslant \frac{1}{2} \times 0.01$。

一般地我们有，若近似值（测量值）x 的绝对误差限是 x 某一数位的半个单位，且该位到 x 的左边第一位非零数字共有 n 位，则称 x 为 n 位**有效数字**。或者简单地说，n 位有效数字是由 $n-1$ 位准确数字在前和一位可疑数字在后组成的数字。例如，0.024613m 是五位有效数字，其中前四位“2”，“4”，“6”，“1”均是准确数字，只有末位的“3”是可疑数字。有效数字是测量结果的一种表示，必须按照有效数字及其运算的法则来确定。

一、直接测量的有效数字

用量具或仪器直接读取测量值时所得的数值，都含有准确数字和可疑数字两部分。如图 1-4-1 所示，用最小刻度为 1mm 的钢直尺测量一物体的长度，该物体的长度 l 在 12.6cm 至 12.7cm 之间，凭经验我们可把读数估计为 12.64cm 或 12.65cm。这两个数据中，12.6 是准确的，而 0.04 或 0.05 是估读出来的，是可疑数字。可疑数字虽不准确，但却是有意义的，即

使估计数是“0”，也不能舍去，因此直接读数时必须在仪器的最小刻度后估读一位，即读数由准确数与最后一位可疑数字组成。图中 $l=12.64\text{cm}$ 或 $l=12.65\text{cm}$，有四位有效数字。

对有效数字作几点说明：

1）出现在数值中间的“0”与末尾的“0”均为有效数字。如在图 1-4-1 中若物体的长度是 12.04cm，为四位有效数字。若物体的长度恰好是 12cm，应记为 12.00 cm，仍为四位有效数字。小数点后面的“0”不能随意增减。

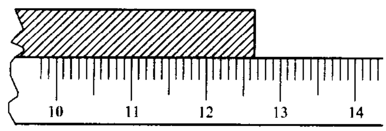

图　1-4-1

2）当进行十进制单位变换时，有效数字与小数点的位置无关。例如，物体的长度为 12.64cm，可以表示为 0.0001264km，也可以表示为 $1.264\times10^5\mu\text{m}$，它们都是四位有效数字。而不能写成 $126400\mu\text{m}$，因为后者表示六位有效数字。为此实验数据最好采用科学计数法，即用有效数字乘以 10 的幂指数的形式表示，这种形式一般小数点前只取一位数字。如 $1.264\times10^{-4}\text{km}$ 等，幂指数（如 10^{-4}）不是有效数字。如果用国际单位词冠表示测量结果，习惯上不用科学记数法。例如，用 $1.3\text{k}\Omega$，而不用 $1.3\times10^3\Omega$。

3）由于有效数字反映了仪器的精度，最末位的可疑数字是有误差的。因此，任何测量结果应截取的有效数字位数是由绝对误差决定的，有效数字的最末位应与误差（只取一位）所在位对齐。例如，物体的长度写成 $l=3.45\text{cm}\pm0.02\text{cm}$ 是正确的，但写成 $l=3.5\text{cm}\pm0.02\text{cm}$ 或 $l=3.452\text{cm}\pm0.02\text{cm}$ 都是错误的。

二、有效数字的运算

在计算间接测量的结果时，怎样处理运算过程中的有效数字，使之尽快获得正确的结果，而且也不至于引进新的“误差”呢？下面介绍一些运算方法。

1. 舍入原则

可根据问题的性质选用对可疑数字的舍入原则。常用的是，首先由误差决定测量结果应截取的有效数字位数；然后对运算过程的中间数据，可以保留一位或二位可疑数字；最后结果只能按尾数舍入法保留一位可疑数字；有效数字末位应与误差末位对齐。通用的尾数舍入法是：小于 5 则舍；大于 5 则入；等于 5，则把尾数凑成偶数（不同于通常的四舍五入原则，使得“舍”和“入”的机会均等）。例如，$27.\underline{75}$舍入为 $27.\underline{8}$；$442.\underline{25}$舍入为 $442.\underline{2}$（加下横划为可疑数字）。

2. 特殊常数有效数字的取法

如$\sqrt{2}$，π 等常数，在计算过程中所取的位数不应小于参加运算的其它数值的有效数字的位数。

3. 有效数字的加减

$71.\underline{4}+0.75\underline{3}=72.\underline{153}=72.\underline{2}$

$37.\underline{9}-5.6\underline{2}=32.\underline{28}=32.\underline{3}$

几个数相加减，其和（或差）在小数点后所应保留的位数，跟参与运算的诸数中小数点后位数最少的一个相同。

4. 有效数字的乘除

$39.\underline{3}\times4.\underline{084}=16\underline{0.5}=16\underline{0}$

$52\underline{8}\div12\underline{1}=4.3\underline{64}=4.3\underline{6}$

几个数相乘除，所得结果的有效数字位数，一般与诸数中有效数字位数最少的一个相