丛书主编 陈东旭

2006高考第二轮复习用书

热点重点难点

专题透析

数学

REDIANZHONGDIANNANDIAN

吉林文史出版社

金太阳系列丛书

高考热点重点难点专题透析

数学（选修Ⅰ）

江西金太阳教育研究所

主　编：葛立其
副主编：刘光清　杜建刚　朱晓名
编　委：(按姓氏笔划排列)
王宪生　史澎江　刘光清　孙惠华　朱晓名
江厚利　何东华　杜建刚　闵　睿　郑一平
袁永平　葛立其　蔡小雄　黎金传

吉林文史出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考热点重点难点专题透析．数学．1：选修 / 陈东旭主编. —长春：吉林文史出版社，2005. 10
ISBN 7—80702—309—0

Ⅰ. 高...　Ⅱ. 陈...　Ⅲ. 数学课—高中　升学参考资料　Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 114904 号

书　　名　高考热点重点难点专题透析
丛书主编　陈东旭
责任编辑　周海英
出版发行　吉林文史出版社
地　　址　长春市人民大街 4646 号　130021
印　　刷　江西省赣农劳动服务公司印刷厂印刷
规　　格　787 mm×1092 mm
开　　本　16 开本
印　　张　120 印张
字　　数　3480 千字
版　　次　2005 年 10 月第 1 版　2005 年 10 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 7—80702—309—0
定　　价　145.00 元

前言

本丛书为2006年高考第二轮复习专用．它与第一轮复习紧密衔接，根据教学实际，以专题归类的形式把高中各科主干知识的内容明晰化、条理化、概念化、规律化．专题关注各学科高考重点、热点、难点，"讲"、"练"结合，使同学们能针对不足，逐点突破，对第一轮复习的薄弱部分进行补充，同时在训练中熟记考试内容，掌握应试技巧，提高综合素质．本丛书分语文、数学、英语、物理、化学、生物、政治、历史、地理共九个分册．本册为数学分册，编写体例如下：

本分册突出知识的综合与交汇，致力于解题方法与技巧的归纳、点拨与提高．设有高考热点、思想方法、应考策略与2006年高考强化训练四大板块共十七个专题．前八个专题设置 "考题特征剖析"、"考点题型再现与分析"、"高考命题趋势"、"考题预测与训练"四个栏目；后九个专题突出培养考生的数学思想方法，与前八个专题的体例有所不同．

考题特征剖析 揭示涉及本专题内容的高考试题的特征与分值，展现这些试题中涉及的题型、解题方法、难度系数及由此体现出来的数学思想、数学方法，总结此类试题的总体解题思路等，从宏观上把握高考方向与题型特征．

考点题型再现与分析 揭示涉及本专题内容的各个考点，展现考题的形式与命题特征，精选典型习题，通过对解题过程的剖析，点拨解题关键点、易错点、拓展与变形方向．分析寻找解题切入点和突破口的主要思路与思想方法，总结题型特点，解题方法及思路，形成规律，以求提高实际解题能力．

高考命题趋势 揭示涉及本专题内容的高考试题的命题趋势与方向，包括题型、难易度及与其他内容的交汇联系、涉及的数学思想与主要解题方法，从高考发展趋势上指导考生进行有效复习，具有较强的前瞻性．

考题预测与训练 直接瞄准2006年高考，根据本专题内容命制与高考方向一致的练习试题，供考生在复习完本专题后自我检测，既具实战意义，同时也起到训练题型和提高解题速度的作用．

在编写过程中，我们本着对读者负责的态度，章章推敲，层层把关，但由于受时间的限制，书中疏漏之处在所难免，在此我们恳请广大读者和有关专家不吝指正．相信在你我的共同努力下，本书能以其卓越的品质为广大考生的高考之路奠定坚实的基础．

编 者

2005年10月

金太阳系列丛书

特别鸣谢以下学校的大力协助：

江西省：南昌二中　江西师大附中　南昌一中　南昌三中　南昌十中　南昌十七中　临川一中　吉安一中　白鹭洲中学　新余一中　新余四中　抚州一中　新建二中　上高二中　宜春中学　临川二中　赣州一中　江西南大附中　玉山一中　南康中学　赣县中学　修水一中　安福中学　上饶一中　萍乡中学　九江一中　鹰潭一中　景德镇一中　赣州市三中　安义中学　峡江中学

北京市：北京四中　北京景山学校　清华大学附中　北师大附属实验中学　首都师大附中　北师大附中　北京二中　北京二十中

天津市：南开中学　耀华中学　天津实验中学　大港一中　静海县一中

河北省：邯郸一中　唐山市一中　衡水中学　正定中学　遵化一中

内蒙古：内蒙古师大附中　呼和浩特市二中　赤峰市二中

山西省：太原五中　临汾一中　平遥中学　运城中学　大同一中　晋城一中　怀仁县一中　沁县中学

辽宁省：沈阳市二中　东北育才中学　大连市八中　庄河高中

吉林省：东北师大附中　省实验中学　长春市实验中学　吉林市一中　延边市二中　松原前郭五中　松原市第二中学

黑龙江：哈尔滨市六中　哈尔滨市九中　鸡西市一中　齐齐哈尔市实验中学

江苏省：南京师大附中　南京外国语学校　南京一中　南通中学　启东中学　姜堰中学　盐城中学　徐州一中　张家港高中

浙江省：杭州高级中学　浙江大学附中　宁波效实中学　诸暨学勉中学　金华市一中　浙师大附中　东阳中学　衢州二中　绍兴柯桥中学　温州中学

山东省：省实验中学　济南市一中　青岛市二中　曲阜师大附中　潍坊市一中　滨州市北镇中学　烟台市二中　济宁市实验中学　牟平一中

安徽省：合肥市一中　马鞍山市二中　安庆市一中　濉溪中学

福建省：福建师大附中　南平高级中学　福州三中　龙岩二中　龙岩一中　南平一中

河南省：河南大学附中　开封市高中　潢川一中　新乡市一中　平舆二高

湖北省：华中师大一附中　黄冈中学　荆州中学　武汉中学　天门中学　水果湖中学　武汉二中　荆门市一中　仙桃中学

湖南省：湖南师大附中　长沙市一中　郴州市一中　株洲市二中　衡阳市八中　沅江市二中　岳阳市一中　岳阳县一中　桑植一中　株洲市南方中学

广东省：华南师大附中　广东省实验中学　汕头金山中学　惠州市一中　深圳教育学院附中　顺德市一中　高州中学

广　西：广西师大附中　南宁市二中　北海市教科所　桂林市临桂中学

四川省：成都市七中　成都石室中学　成都市十二中　四川师大附中　新都一中　彭州中学　南充高级中学　攀枝花市三中

重庆市：西南师大附中　重庆市一中　重庆市十一中　重庆市三中　重庆市八中

贵州省：凯里市一中　贵阳师大附中　兴义市一中

云南省：昆明一中　昆明三中　宣威一中　大理一中　曲靖一中

西　藏：拉萨中学

陕西省：陕西师大附中　西安中学　安康中学　延安中学　渭南市瑞泉中学　咸阳中学　韩城象山中学　绥德中学　榆林市第一中学　榆林中学

甘肃省：西北师大附中　兰州市一中　天水一中

宁　夏：宁夏大学附中　银川市一中　银川市唐徕回民中学

新　疆：新疆实验中学　乌鲁木齐市一中　库尔勒华山中学兵团二中　乌鲁木齐铁路三中

（限于篇幅仅列部分学校，敬请谅解）

高考二轮复习期心理问题指导

一、学会缓减心理压力

高三阶段，同学们进入到紧张的复习备考状态，你追我赶，激烈的竞争带来了巨大的压力。心理研究发现，保持适度的心理压力有利于学习效率的提高；但压力过大，会造成紧张、急躁心理。所以，同学们必须学会调节自身的心理压力。

首先，同学们应当认识到，随着高考的临近，抓紧时间复习、积极备考是正常的，正如军队临战前要练兵、运动员比赛前要训练一样。有了这样的认识，就能把压力变为动力。

其次，要在老师的指导下制定自己的复习计划，做到以"我"为主，紧而不乱，不要盲目地跟着别人跑。要把平时当考时，考时当平时，尽量以平静的心态来复习备考。

再次，还要注意搞好团结。同学间既竞争，又友好，互相帮助，共同进步。在一种宽松友爱的氛围中复习，会收到更好的效果，高考中也能发挥出自己的最高水平。

二、正确看待信心问题

一些同学由于付出的努力短时间内看不到效果，就对自己的能力产生怀疑，这是没有树立正确的归因理念所致。精神分析专家阿德勒在《超越自卑》一书中说："事实上，每个人都是自卑的，只是程度不同而已。因为我们发现我们的现状都是可以进一步改善的。"从这个意义上来说，自卑也可以成为一个人进步的动力，人生正是在对自卑的不断超越中渐入佳境的。但是，持久的、过分的自卑感则容易造成心理疾患。在遭遇挫折时，建议同学们不妨尝试以下策略：

1.对自己有一个客观的、全面的评价。

2.善于将成功归结为自己的能力。

3.体验内心的喜悦感和成就感，要相信之所以失败是由于自己努力不够或无效努力。

4.制定阶段性目标，在不断达到目标的过程中体验成就感。

5.增强自信心。

6.乐观、平静地对待挫折，因为挫折对于成功同样是必要的。

三、如何缓解学业焦虑

1.学业焦虑往往体现在对考分的过分看重，说到底是对自己未来前途的焦虑。之所以如此，原因有三：一是由于群体效应，将分数作为衡量自己能力的唯一指标；二是不自觉地将获取高学历等同于自己的人生价值；三是渴望自我实现与现实学业成绩的不理想而导致的认知不协调。只有减轻心理负担与学习负担，才能减轻精神上和学习上的压力，才能健康愉快地成长。为了缓解和消除学业焦虑，同学们可以尝试以下几种方法：

(1)选择适合自己的目标动机水平，过强或过弱的动机水平都容易产生失败体验而导致心理压力。

(2)未来对于每一个人来说都是一个未知数，不要过多地担忧将来的事情，而应将自己的精力和时间投入到现实的生活和学习中去。

(3)考前作好知识准备以及应付考试突发事件的心理准备，有备才能无患。

(4)不妨采用"极限思维法"，想象你所焦虑的事件可能的最坏结果，你会发现现状还是值得乐观的。

2.学习动力不足也常常令学生苦恼。一方面同学们都有提高成绩的需要，而另一方面，又容易产生浮躁、厌烦情绪，导致学习无动力或动力不足。学习动机分内在(具有持久性)和外在(具有短暂性)两种，学习者只有"知学"、"好学"并且"乐学"，从价值上给自己的学习以较高的评价，才会产生持久的学习动机。当然，学习的外在动机也是必要的，只有二者和谐作用，才会相辅相成，相得益彰。

四、如何克服精力分散

中学生在学习中常常会出现注意力不集中、精力分散、"走神"等现象。造成注意力分散的原因可能有以下几点：因单调刺激而引起的厌倦感，如学习繁重、枯燥；否定注意对象的价值导致意志努力失败或放弃努力；由精神疲劳而引起的疲劳效应。

"注意紧张状态"理论提出学习单元时间的概念。由于个性差异，每个人的学习单元时间可能不尽相同，有人认为一个人的最佳学习单元时间约为25分钟，通俗地讲，一个学习单元时间即是一个注意紧张状态，学习者应避免在一个既定学习单元时间内分心。

可以尝试以下克服注意力分散的三步控制法：

第一步，当出现某种滞涩情绪时，同学们应敏感地意识到，并提醒自己不能成为情绪的俘虏。

第二步，尽快着手按已定的复习计划学习。

第三步，继续学习，直到完成。

明白了上述道理，同学们就能够克服在一个学习单元时间内注意力分散的不良习惯，从而提高学习的效率。

目 录

第一部分　高考热点重点与难点

第一专题

高考集合、映射与不等式题型分析与预测

考题特征剖析

从2005年全国各地16套29份各种形式的高考试卷及近年的高考试题来看，对集合、映射和不等式问题的考查主要涉及以下几类：

(1)集合的基本概念和运算问题；

(2)命题的四种形式及充要条件的判定问题；

(3)映射及映射与函数的关系；

(4)不等式及不等式的解法与证明.

集合与简易逻辑是每年高考必考的知识点之一，其中对命题的判定及充要条件的考查力度较大，还常常以集合为工具考查集合语言和集合思想的运用. 考题多为较容易的选择题、填空题，但偶尔也会出现考查充要条件的论证或先寻求充要条件再加以证明的能力题，也有用集合表现出来的解答题.

不等式具有应用广泛、变换灵活、知识综合、能力复合等特点，它不仅是中学数学的重点内容，也是高等数学的基础和工具. 不等式问题在高考中一直是考查的重点和热点，在近年来的高考试题中占有相当大的比重. 这些试题不仅考查有关不等式的基础知识、基本技能和基本方法，而且能更有效地测试逻辑推理能力、运算能力以及运用相关的知识和方法去分析问题和解决问题的能力.

不等式试题在高考试卷中形式活泼且多种多样，既有选择题、填空题，又有解答题. 从近年高考试题的综合分析情况来看，不等式内容大致有以下四类：解不等式问题、求参数的取值范围问题、不等式的证明问题和不等式的应用问题.

高考近几年加大了在知识交汇点处命题的力度，单独解不等式或证明不等式的题目明显减少. 不等式试题更多的是与集合、函数、方程、数列、三角、解析几何、立体几何及实际应用问题相互交叉和渗透，充分体现出不等式在知识网络中所具有的极强的辐射作用.

考点题型再现与分析

考点1：集合、映射及充要条件的判定

解决此类问题时，要吃透集合、充要条件、映射的概念，熟练进行集合的交、并、补等基本运算，对充要条件要善于推理判断.

1. 集合间的关系

【例1】设集合 $M=\{x|x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in \mathbf{Z}\}$，$N=\{x|x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in \mathbf{Z}\}$，则 (　　)

(A)$M=N$.　　(B)$M\subsetneqq N$.

(C)$M\supsetneqq N$.　　(D)$M\cap N=\varnothing$.

【分析】要分析两个集合的相互关系，应把两个集合具体化，使集合的元素特征更加明确.

【解析】(法一)赋值入手，得 $M=\{\cdots,-\frac{3}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\cdots\}$，$N=\{\cdots,-\frac{3}{4},-\frac{1}{2},-\frac{1}{4},0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},\cdots\}$，知 $M\subsetneqq N$，选B.

(法二)从缩小代表元素表示形式的差异入手，M 代表元素 $x=\frac{2k+1}{4}$，N 代表元素 $x=\frac{k+2}{4}=\frac{(k+1)+1}{4}$，通过比较转化为判断 $\{2k\}$ 与 $\{k+1\}(k\in \mathbf{Z})$ 之间的关系，选B.

(法三)从函数思想入手，$\frac{k}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(2k+1)$，$\frac{k}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(k+2)$，而 $k\in \mathbf{Z}$，函数 $f(k)=2k+1$ 的值域

是奇数集，函数 $g(k)=k+2$ 的值域是整数集 $\mathbf{Z}$，故选B.

【点评】①读懂集合语言，弄清集合中元素代表的对象——研究的对象是正确解答的前提. 如集合 $M=\{y\mid y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{x\mid y=\sqrt{3-x^2}\}$，$P=\{(x,y)\mid y=x^2-1\}$ 中的代表元素各不相同.

②简化是解决集合问题的常用策略. 简化的常用方式有具体化（如列举法）、特殊化（如特例法）、化简归纳（一般化）等.

③解决集合问题应注意集合元素的确定性、互异性和无序性，不能遗忘空集的特殊情形，以免造成漏解.

④数形结合是解决集合问题的有效手段. 常借助数轴表示不等式的解集，用韦恩图表示集合的相互关系，所有这些均应熟练掌握并灵活运用.

【备选题 1】（2005 高考全国卷Ⅰ）设 I 为全集，S_1、S_2、S_3 是 I 的三个非空子集且 $S_1\cup S_2\cup S_3=I$，则下面论断中正确的是 （ ）

(A) $\complement_I S_1\cap(S_2\cup S_3)=\varnothing$.

(B) $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cap\complement_I S_3)$.

(C) $\complement_I S_1\cap\complement_I S_2\cap\complement_I S_3=\varnothing$.

(D) $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cup\complement_I S_3)$.

2. 元素个数的确定

【例 2】已知函数 $y=f(x)$，$x\in[a,b]$，且 $A=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in[a,b]\}$，$B=\{(x,y)\mid x=1\}$，则 $A\cap B$ 中所含的元素的个数是 （ ）

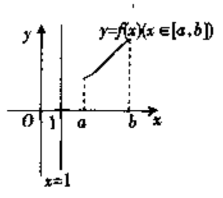
(A)0. (B)1.

(C)0 或 1. (D)0，1 或 2.

【分析】本题给出的两个集合都是点集，也就是函数图象，因此，要求 $A\cap B$ 的元素个数，就是确定两个函数图象的交点个数.

【解析】（法一）因为在函数的定义域内，对每一个自变量 x 都有唯一确定的函数值 y 与之相对应，故当 $1\notin[a,b]$ 时，$A\cap B=\varnothing$，当 $1\in[a,b]$ 时，$A\cap B=\{(1,f(1))\}$，含一个元素，故选C.

（法二）$A\cap B$ 中所含元素的个数就是曲线 $y=f(x)$，$x\in[a,b]$ 和直线 $x=1$ 的交点的个数，借助函数的图象（如图）可知，当 $1\notin[a,b]$ 时，两图象无交点，$A\cap B=\varnothing$；当 $1\in[a,b]$ 时，由函数定义知两图象有唯一交点，$A\cap B$ 含有一个元素，故选 C.



【点评】①解函数概念题，要深刻理解函数是一种特殊的映射，建立在非空数集 A、B 上的映射 $f:A\to B$，其中 A 为定义域，值域为 $C\subseteq B$.

②有关集合的运算，往往可借助图形，如借助数轴、韦恩图等.

【备选题 2】对任意两个正整数 m、n，定义某种运算（运算符号用⊗表示）：当 m、n 都为正偶数或都为正奇数时，$m\otimes n=m+n$；当 m、n 中一个为正奇数，另一个为正偶数时，$m\otimes n=mn$. 则在上述定义下，集合 $M=\{(a,b)\mid a\otimes b=36,a,b\in\mathbf{N}^*\}$ 中元素个数为________.

3. 映射的概念

【例 3】集合 $M=\{a,b,c\}$，集合 $N=\{-1,0,1\}$，由 M 到 N 的映射 f 满足条件 $f(a)+f(b)=f(c)$，这样的映射共有 （ ）

(A)5 个. (B)6 个.

(C)7 个. (D)8 个.

【分析】要确定映射的个数，必须明确映射的概念，由此可知 M 中的元素都必须"用完"，而 N 中的元素不一定要"用完".

【解析】根据映射的定义可列下表.

$f(a)$	0	1	−1	0	1	0	−1
$f(b)$	0	−1	1	1	0	−1	0
$f(c)$	0	0	0	1	1	−1	−1

【答案】C

【点评】①本例利用图表建立对应关系，直观地获得满足条件的结果. 有时列表或转换成图表语言是解决映射问题的有效手段（其实也是一种数形结合思想）.

②准确理解映射的定义是解决映射问题的关键. 对应法则、原象与象所在的集合是构成一个映射的三要素，建立一个从 A 到 B 的映射，只要将 A 中的任一元素在 B 中找到唯一确定的对应元素即可完成.

③在解题时，要与排列组合的内容密切结合. 同时也要贯彻"分类"、"分步"及"特殊优先"等数学思想.

【备选题 3】由关于 x 的恒等式 $x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=(x+1)^4+b_1(x+1)^3+b_2(x+1)^2+b_3(x+1)+b_4$，定义映射 $f:(a_1,a_2,a_3,a_4)\to(b_1,b_2,b_3,b_4)$，求 $f(4,3,2,1)$.

4.充要条件的判定

【例 4】"$a=1$"是"函数 $y=\cos^2 ax-\sin^2 ax$ 的最小正周期为 π"的 ( )

(A)充分而不必要条件.

(B)必要而不充分条件.

(C)充要条件.

(D)既不充分也不必要条件.

【分析】要判断充要条件,首先必须明确函数中参数 a 的取值范围.

【解析】由函数 $y=\cos^2 ax-\sin^2 ax=\cos 2ax$ 的最小正周期为 π,可得 $a=\pm1$,设 $M=\{a|a=1\}=\{1\}$,$N=\{a|a=\pm1\}=\{1,-1\}$,有 $M\subsetneqq N$,故选 A.

【答案】A

【点评】①充要条件的判定常用以下四种方法:定义法、等价转化法、传递法、集合法.要能针对各种题型采用合适的判断方法.

②要学会运用充要条件解题,如证明、求参数范围等.

③用集合来判断此类问题是常用的方法,一般地,若一个"大集合"包含了一个"小集合",则"大集合"是"小集合"的必要而不充分条件,而"小集合"是"大集合"的充分而不必要条件.当两集合相等时,为充要条件.当两个集合没有包含关系时,为既不充分也不必要条件.

【备选题 4】设命题 p:$|4x-3|\leqslant1$;命题 q:$x^2-(2a+1)x+a(a+1)\leqslant0$.若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件,求实数 a 的取值范围.

考点 2:有关不等式组的解法

解不等式是把给定不等式通过变形转化为简单不等式从而得到解集,如分式不等式转化为整式不等式,但要注意变形是同解变形,每一步变形既充分又必要.例如解分式不等式不要随便去分母,而是应该先移项,等价转化为 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$ 的形式,再分析讨论.对一些含绝对值符号的不等式和含有参数的不等式必须进行讨论.

1.基本不等式的解法

【例 5】解下列关于 x 的不等式:

(1)$(x-1)^2(x+1)(x-2)(x+4)<0$;

(2)$\dfrac{3x-5}{x^2+2x-3}\leqslant2$;

(3)$\dfrac{a(x-1)}{x-2}>1(a\in\mathbf{R})$.

【分析】这三个不等式是基本不等式,对于(3)必须对 a 进行分类讨论.

【解析】(1)原不等式$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq1,\\(x+1)(x-2)(x+4)<0,\end{cases}$

即$\begin{cases}x\neq1,\\x<-4\text{ 或 }-1<x<2.\end{cases}$

因此原不等式的解集是$\{x|x<-4$ 或 $-1<x<1$ 或 $1<x<2\}$.

(2)原不等式$\Leftrightarrow\dfrac{(x+1)(2x-1)}{(x-1)(x+3)}\geqslant0$,

$\therefore$原不等式的解集是$(-\infty,-3)\cup[-1,\dfrac{1}{2}]\cup(1,+\infty)$.

(3)当 $a\neq1$ 时,

原不等式$\Leftrightarrow\dfrac{a(x-1)-(x-2)}{x-2}>0$

$\Leftrightarrow\dfrac{(a-1)(x-\frac{a-2}{a-1})}{x-2}>0$,

由$\dfrac{a-2}{a-1}-2=\dfrac{a}{1-a}$得:①当 $0<a<1$ 时,解为 $2<x<\dfrac{a-2}{a-1}$;②当 $a>1$ 时,解为 $x<\dfrac{a-2}{a-1}$或 $x>2$;③当 $a<0$ 时,解为$\dfrac{a-2}{a-1}<x<2$;④当 $a=0$ 时,无解;⑤当 $a=1$ 时,解为 $x>2$.

【点评】解分式不等式时要特别注意实施的变形应为同解变形;解高次不等式常用序轴标根法.解含参数的不等式时,往往需要对参数进行讨论,应当根据条件正确制定分类标准,确保穷尽所有可能情形,做到不重不漏.

【备选题 5】已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{ax+b}$(a、b 为常数),且方程 $f(x)-x+12=0$ 有两个实根,$x_1=3$,$x_2=4$.当 $k>1$ 时,解关于 x 的不等式 $f(x)<\dfrac{(k+1)x-k}{2-x}$.

2. 简单对数、指数不等式的解法

【例 6】(1)(2005 高考全国卷Ⅰ)设 $0<a<1$，函数 $f(x)=\log_a(a^{2x}-2a^x-2)$，则使 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围是 ( )

(A) $(-\infty,0)$. (B) $(0,+\infty)$.

(C) $(-\infty,\log_a 3)$. (D) $(\log_a 3,+\infty)$.

(2)不等式 $(\lg 20)^{2\cos x}>1\ (x\in(0,\pi))$ 的解集为________.

(3)不等式 $|2x-\log_a x|<2x+|\log_a x|\ (a>0$ 且 $a\neq1)$ 的解集是________.

【分析】三个问题都是对数的问题，因此，必须考虑对数函数的性质，特别是对数函数的单调性与定义域.

【解析】(1)由题意得

$a^{2x}-2a^x-2>1$，$(a^x-3)(a^x+1)>0$，

$\therefore a^x>3$，而 $0<a<1$，$\therefore x<\log_a 3$.

(2)原不等式等价于 $(\lg 20)^{2\cos x}>(\lg 20)^0\Leftrightarrow 2\cos x>0\Leftrightarrow\cos x>0$，故填 $(0,\frac{\pi}{2})$.

(3)按常规，用零点分段讨论消绝对值求解，但此路不通. 转换思维角度，观察特点. 由于 $x>0$，因此，原不等式 $\Leftrightarrow|2x+(-\log_a x)|<|2x|+|-\log_a x|$. 从而联想到绝对值不等式的性质：$|a+b|\leqslant|a|+|b|$. “=”不成立的充要条件是 $ab<0$.

所以原不等式 $\Leftrightarrow 2x\cdot(-\log_a x)<0\Leftrightarrow x\log_a x>0$，当 $a>1$ 时，解集为 $(1,+\infty)$；当 $0<a<1$ 时，解集为 $(0,1)$.

【答案】(1)C；(2) $(0,\frac{\pi}{2})$；

(3)当 $a>1$ 时，解集为 $(1,+\infty)$；当 $0<a<1$ 时，解集为 $(0,1)$.

【点评】本题着力考查了高考中常用的数学思想方法：函数的思想方法、转化的思想方法. 从“知识立意”向“能力立意”转变是高考试题改革的重点之一. 近年高考强调基础和能力并重、知识与能力并举，十分重视创新型的试题，以考查学生的潜能. 有创意的试题打破了那种“背题型、记套路”的传统教学模式，这有利于考查考生的综合素质，更有利于素质教育向纵深发展.

【备选题 6】设 A 为不等式 $\log_x(5x^2-8x+3)>2$ 的解集，B 为不等式 $2^{x^2-2x-k^4}>\frac{1}{2}$ 的解集. 若 $A\subseteq B$，求实数 k 的取值范围.

3. 有关抽象函数的不等式的解法

【例 7】定义在 $(0,+\infty)$ 内的函数 $f(x)$，对任意的 $x,y\in(0,+\infty)$ 都有 $f(xy)=f(x)+f(y)$，当且仅当 $x>1$ 时 $f(x)>0$ 成立.

(1)设 $x,y\in(0,+\infty)$，求证：$f(\frac{y}{x})=f(y)-f(x)$；

(2)设 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，$f(x_1)>f(x_2)$，试比较 x_1,x_2 的大小；

(3)解不等式 $f(\sqrt{a^x-1})>f(a^x-3)\ (0<a<1)$.

【分析】有关抽象函数的不等式其实就是研究抽象函数的单调性，在把抽象函数不等式转化为普通不等式时，不能忘记抽象函数的定义域要求.

【解析】(1) $\because f(x)+f(y)=f(xy)$，

$\therefore f(\frac{y}{x})+f(x)=f(\frac{y}{x}\cdot x)=f(y)$，

$\therefore f(\frac{y}{x})=f(y)-f(x)$.

(2) $\because f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)-f(x_2)>0$

$\Leftrightarrow f(\frac{x_1}{x_2})>0\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}>1\Leftrightarrow x_1>x_2$，

$\therefore x_1>x_2$.

(3)由(2)知，$f(\sqrt{a^x-1})>f(a^x-3)$ 等价于

$$\begin{cases}\sqrt{a^x-1}>0,\\ a^x-3>0,\\ \sqrt{a^x-1}>a^x-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^x-3>0,\\ \sqrt{a^x-1}>a^x-3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^x>3,\\ a^x-1>(a^x-3)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^x>3,\\ a^{2x}-7a^x+10<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^x>3,\\ (a^x-2)(a^x-5)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^x>3,\\ 2<a^x<5\end{cases}$$

$\Leftrightarrow 3<a^x<5$

$\Leftrightarrow\log_a 3>x>\log_a 5$.

$\therefore$ 原不等式的解集为 $(\log_a 5,\log_a 3)\ (0<a<1)$.

【点评】本题将函数与不等式两大不同的知识块在网络交汇处融为一体，具有很强的综合性和时代性. 高考试题中，对于解不等式要求较高，往往与二次函数、指数函数、对数函数等有关概念和性质密切相关.

从近几年的高考试题来看，解不等式的内容年年都有，有的是直接考查解不等式，有的则是间接考查解不等式(如本例)，其难度系数一般在 0.6 左右. 对不等式的基本性质以及各种类型的不等式的解法要求熟练掌握，对思维能力和运算化简能力有较高要求.

【备选题 7】已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$，当 $x>0$ 时，$f(x)<1$，且满足 $f(x+y)=f(x)f(y)$，$f(2)=\frac{1}{9}$.

(1)求证：$f(x)$是$\mathbf{R}$上的减函数；

(2)解不等式$f(x)f(3x-1)<\frac{1}{27}$.

考点3:有关求参数的取值范围问题

在方程或不等式中求参数的取值范围这一类问题是近年高考中一处多姿多彩的风景.由于这类题型涉及面广、综合性强、方法灵活,所以揭示这类题目的内在规律,探讨其特有的解题方法很有现实意义.求解这类问题的常用策略有:转化为与之对应的函数,利用相应函数的性质求解;分离参数,转化为函数的最值问题来求解;利用"主元思想",转化为关于参数的一次函数问题来求解;数形结合,用运动变化的思想来求解.

【例8】设全集$U=\mathbf{R}$.

(1)解关于x的不等式$|x-1|+a-1>0(a\in\mathbf{R})$;

(2)记A为(1)中不等式的解集,集合

$B=\{x\mid\sin(\pi x-\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}\cos(\pi x-\frac{\pi}{3})=0\}$,若$(\complement_U A)\cap B$中恰有3个元素,求$a$的取值范围.

【分析】本题是集合运算并由此确定元素个数的问题,因此在把各个集合具体化后,一般需结合韦恩图来解题.

【解析】(1)依题意得:

当$a>1$时,解集是$\mathbf{R}$;

当$a\leqslant 1$时,解集是$\{x\mid x<a$或$x>2-a\}$.

(2)当$a>1$时,$\complement_U A=\varnothing$;

当$a\leqslant 1$时,$\complement_U A=\{x\mid a\leqslant x\leqslant 2-a\}$.

$\because\sin(\pi x-\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}\cos(\pi x-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\sin\pi x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\pi x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\pi x+\frac{3}{2}\sin\pi x=2\sin\pi x$,

$\therefore$依题意$\sin\pi x=0$,得$\pi x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,即$x=k\in\mathbf{Z}$,所以$B=\mathbf{Z}$.

①当$a>1$时,$\complement_U A=\varnothing$,故$(\complement_U A)\cap B$不可能有3个元素;

②当$a\leqslant 1$时,由$\complement_U A=\{x\mid a\leqslant x\leqslant 2-a\}$及$(\complement_U A)\cap B$恰有3个元素,结合韦恩图得:$-1<a\leqslant 0$.

【点评】本题通过集合这一载体,将绝对值不等式解法、简单三角式的化简和已知三角函数值求角等知识联系在一起进行考查,试题信息量大,综合性强.

【例9】二次函数$y=ax^2+bx+c$的值恒为非负,且$b>a$,求$\frac{a+b+c}{b-a}$的取值范围.

【解析】由题设得$\begin{cases}a>0,\\ b^2-4ac\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow c\geqslant\frac{b^2}{4a}$,

$$\therefore\frac{a+b+c}{b-a}\geqslant\frac{a+b+\frac{b^2}{4a}}{b-a}=\frac{4a^2+4ab+b^2}{4a(b-a)}=\frac{(2a+b)^2}{4a(b-a)}$$

$$=\frac{[(b-a)+3a]^2}{4a(b-a)}=\frac{(b-a)^2+6a(b-a)+9a^2}{4a(b-a)}$$

$$=\frac{b-a}{4a}+\frac{9a}{4(b-a)}+\frac{3}{2}$$

$$\geqslant 2\sqrt{\frac{b-a}{4a}\cdot\frac{9a}{4(b-a)}}+\frac{3}{2}=3.(\because b-a>0)$$

当且仅当$\begin{cases}b=4a,\\ c=\frac{b^2}{4a}\end{cases}$时,$(\frac{a+b+c}{b-a})_{\min}=3$,显然无最大值.$\therefore\frac{a+b+c}{b-a}$的取值范围是$[3,+\infty)$.

【点评】多未知数问题的处理办法常常是消元.$\frac{a+b+c}{b-a}$中有三个未知数,必须消去一个或两个未知数.由$c\geqslant\frac{b^2}{4a}$可以消去一个未知数.对于分式函数最值问题,常用拆项法解决.特别是分子次数高于分母次数或者等于分母次数时,一般可考虑拆项,而且拆项时需看分母所需,本题中将$(2a+b)^2$拆成$[(b-a)+3a]^2=(b-a)^2+6a(b-a)+9a^2$,是为了实现分子与分母$4a(b-a)$的呼应.

【备选题8】已知函数$f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x}$.

(1)当$x\in[1,+\infty)$时,$f(x)>0$恒成立,试求实数a的取值范围;

(2)当$x\in[1,+\infty)$时,$f(x)>a$恒成立.试求实数a的取值范围.

考点4:有关不等式的证明

不等式的证明非常活跃,它可以和很多知识如:函数、数列、三角等相联系,证明时不仅要用到不等式的性质、不等式证明的技能、技巧,还要用到相关内容的技能、技巧,应注意加强逻辑推理能力的训练.

1. 有关三个"二次"的问题

【例 10】已知 $a\geqslant\frac{1}{2}$，函数 $f(x)=-a^2x^2+ax+c$.

(1)证明：对任意 $x\in[0,1]$，$f(x)\leqslant1$ 的充要条件是 $c\leqslant\frac{3}{4}$；

(2)已知关于 x 的实系数二次方程 $f(x)=0$ 有两个实数根 α、β，证明：$|\alpha|\leqslant1$ 且 $|\beta|\leqslant1$ 的充要条件是 $c\leqslant a^2-a$.

【分析】本题属于三个"二次"的问题，这类问题在解题时，首先要充分利用相应的二次函数的性质，特别是图象特征与单调性，由此可得解法.

【解析】(1) $f(x)=-a^2(x-\frac{1}{2a})^2+c+\frac{1}{4}$，

$\because a\geqslant\frac{1}{2}$，$\therefore 0<\frac{1}{2a}\leqslant1$，即 $\frac{1}{2a}\in(0,1]$，

当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)_{\max}=f(\frac{1}{2a})=c+\frac{1}{4}$.

充分性：$\because c\leqslant\frac{3}{4}$，

$\therefore x\in[0,1]$ 时，$f(x)\leqslant c+\frac{1}{4}\leqslant1$，

$\therefore f(x)\leqslant1(x\in[0,1])$.

必要性：$\because x\in[0,1]$ 时，$f(x)\leqslant1$，而 $\frac{1}{2a}\in(0,1]$，

$\therefore f(\frac{1}{2a})=c+\frac{1}{4}\leqslant1$，

$\therefore c\leqslant\frac{3}{4}$.

(2)二次函数 $f(x)$ 的图象开口向下，对称轴方程为 $x=\frac{1}{2a}$，因为 $a\geqslant\frac{1}{2}$，故 $\frac{1}{2a}\in(0,1]\subsetneqq[-1,1]$，

$\therefore\begin{cases}|\alpha|\leqslant1,\\|\beta|\leqslant1\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=0$ 的两根 α、β 在 $[-1,1]$ 内

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\geqslant0,\\\frac{1}{2a}\in[-1,1],\\f(1)\leqslant0,\\f(-1)\leqslant0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(1)\leqslant0,\\f(-1)\leqslant0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}c\leqslant a^2-a,\\c\leqslant a^2+a\end{cases}\Leftrightarrow c\leqslant a^2-a,$$

$\therefore |\alpha|\leqslant1$ 且 $|\beta|\leqslant1$ 的充要条件是 $c\leqslant a^2-a$.

【点评】本题考查了对一元二次方程、二次函数和一元二次不等式这三个"二次"之间关系的本质认识，对学生灵活处理参数的能力及不等式的转换能力有较高要求. 三个"二次"问题在高考中经常会出现.

【备选题 9】已知 $a>0$，函数 $f(x)=ax-bx^2$.

(1)当 $b>0$ 时，若对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)\leqslant1$，证明：$a\leqslant2\sqrt{b}$；

(2)当 $b>2$ 时，证明：对任意 $x\in[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$，$|f(x)|\leqslant1$ 的充要条件是 $\frac{\sqrt{2}}{2}b-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant2\sqrt{b}$.

2. 函数(曲线)与不等式的联系

【例 11】已知 $a>0$，函数 $f(x)=\frac{1-ax}{x}$，$x\in(0,+\infty)$. 设 $0<x_1<\frac{2}{a}$，记曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_1,f(x_1))$ 处的切线为 l.

(1)求 l 的方程；

(2)设 l 与 x 轴的交点为 $(x_2,0)$，证明：

①$0<x_2\leqslant\frac{1}{a}$；②若 $x_1<\frac{1}{a}$，则 $x_1<x_2<\frac{1}{a}$.

【分析】本题是关于函数图象的切线以及函数与不等式的联系问题，这类问题一方面要考虑函数的导数与切线的联系，另一方面要考虑不等式有关性质的应用与函数的单调性与不等式的联系.

【解析】(1) $\because f'(x)=-\frac{1}{x^2}$，

$\therefore$ 切线 l 的方程为 $y-\frac{1-ax_1}{x_1}=-\frac{1}{x_1^2}(x-x_1)$.

(2)在切线方程中令 $y=0$，则 $x_2=x_1(1-ax_1)+x_1=x_1(2-ax_1)$，其中 $0<x_1<\frac{2}{a}$.

① $\because 0<x_1<\frac{2}{a}$，

$\therefore x_2=x_1(2-ax_1)>0$，

又 $x_2=-a(x_1-\frac{1}{a})^2+\frac{1}{a}(x_1\in(0,\frac{2}{a}))$，

$\therefore x_2\leqslant\frac{1}{a}$(当且仅当 $x_1=\frac{1}{a}$ 时取等号).

$\therefore 0<x_2\leqslant\frac{1}{a}$.

② $\because x_1<\frac{1}{a}$，$\therefore ax_1<1$，

$\therefore x_2=x_1(2-ax_1)>x_1$，且由①有 $x_2<\frac{1}{a}$，

$\therefore x_1<x_2<\frac{1}{a}$.

【点评】本题考查的重点是导数的概念和计算、切线的概念和方程、曲线的交点以及不等式的基本性质

和证明.以导数为工具研究函数的变化率,为解决函数极值问题提供了一条有效的途径.将新课程新增加的内容(导数)和一些传统内容(不等式证明)有机地结合在一起设问,这是一种新颖的命题模式.

【备选题 10】已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x$,$g(x)=x\ln x$,设 $0<a<b$,证明 $0<g(a)+g(b)-2g(\frac{a+b}{2})<(b-a)\ln 2$.

3.比较函数值的大小

【例 12】已知 $f(x)=a^x-a^{-x}(0<a<1)$,判断 $f(n)$ 与 $nf(1)$ 的大小,并加以证明($n\in\mathbf{N}^*$).

【分析】本题是比较两个函数值的大小,可先从特殊的几个例子观察,然后再总结出一般关系并进行证明.证明时,可先表示出两个函数值,再用不等式性质进行证明,另外,从需证明的结论可以发现,本题也可以用数学归纳法进行证明.

【解析】$\because 0<a<1$,

$\therefore f(1)=a-a^{-1}=\frac{a^2-1}{a}<0$.

当 $n=1$ 时,$f(1)=1\times f(1)$,

当 $n=2$ 时,

$$f(2)=\frac{a^4-1}{a^2}=f(1)\cdot\frac{a}{a^2-1}\cdot\frac{a^4-1}{a^2}$$

$$=\frac{a^2+1}{a}\cdot f(1)<2f(1),$$

当 $n=3$ 时,

$$f(3)=\frac{a^6-1}{a^3}=f(1)\cdot\frac{a}{a^2-1}\cdot\frac{a^6-1}{a^3}$$

$$=f(1)\cdot\frac{1}{a^3}\cdot\frac{a(1-a^6)}{1-a^2}$$

$$=f(1)\cdot\frac{1}{a^3}(a+a^3+a^5)$$

$$=f(1)(\frac{1}{a^2}+a^2+1)<f(1)\cdot 3=3f(1).$$

下面证明:当 $n\geqslant 2$ 时,恒有 $f(n)<nf(1)$ $(0<a<1)$.

$$\because f(n)=a^n-a^{-n}=\frac{a^{2n}-1}{a^n}$$

$$=f(1)\cdot\frac{a}{a^2-1}\cdot\frac{a^{2n}-1}{a^n}$$

$$=f(1)\cdot\frac{a(1-a^{2n})}{1-a^2}\cdot\frac{1}{a^n},$$

且 $1-a^{2n}=(1-a^2)[1+a^2+a^4+\cdots+a^{2(n-1)}]$,

$$\therefore f(n)=f(1)\cdot\frac{1}{a^n}\cdot[a+a^3+\cdots+a^{2n-1}]$$

$$=f(1)\cdot\frac{1}{a^n}\cdot\frac{1}{2}[(a+a^{2n-1})+(a^3+a^{2n-3})+\cdots+(a^{2n-1}+a)].$$

$\because f(1)<0$,$a^i+a^{2n-i}>2a^n(i=1,2,\cdots,2n-1)$,

$\therefore f(n)<f(1)\cdot\frac{1}{2a^n}\cdot 2a^n\cdot n=n\cdot f(1)$,

即 $f(n)<nf(1)$,

$\therefore$ 当 $n\geqslant 2$ 时,$f(n)<nf(1)$,

当 $n=1$ 时,$f(1)=1\times f(1)$.

【点评】本题既是不等式的证明,又是函数向数列的转化,综合性较强.本题在考查不等式证明方面主要用到了均值不等式.

【备选题 11】已知函数 $f(x)=ax^2+2bx+c(a<b<c)$,m 是方程 $f(x)=-a$ 的实数根,且 $f(1)=0$.

(1)求证:$-3<\frac{c}{a}\leqslant-1$,且 $b\leqslant 0$;

(2)判断 $f(m-4)$ 值的正负,并加以证明.

高考命题趋势

1.由于集合与简易逻辑的基础性和工具性作用,高考更注意考查对基本概念的透彻理解,对基本原理的准确把握及与其他知识的密切联系.对于集合,高考中一般以选择题、填空题的形式出现,难度偏小,主要考查集合的概念和运算,以及对集合语言的理解与应用.对于简易逻辑,包括充要条件的判断与应用,既能在选择题、填空题中借考查充要条件来与其他章节的知识相结合,又能在解答题中与方程、不等式知识相结合,一般会辅之以判断命题的真假的新形式.映射,则以基本概念为主,包括象、原象及映射的个数等.

2.不等式仍将是高考数学的重点内容之一.在选择题、填空题、解答题三种题型中均有各种类型的不等式题.

3.单独考查不等式内容的试题将不多见,更多的是与函数、数列、解析几何等交叉和渗透命题,以不等式为工具解决较复杂的综合问题.解不等式内容将充斥整张试卷,特别是利用函数单调性解不等式(包括抽象函数的不等式)值得注意.

4.除了利用均值不等式和函数的性质求最值外,利用导数求函数最值及单调区间的问题更会突出.

5. 以含参变数的函数(特别是二次函数)为中心设计不等式证明题仍是热点;导数(新课程新增内容)与传统的不等式证明有可能有机地结合在一起设问,不排除利用导数方法证明不等式的可能.

考题预测与训练

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x\mid 2x+1\geqslant 0\}$,集合 $N=\{x\mid x^2-(a+1)x+a<0\}$,若 $N\subseteq M$,则 a 的取值范围是 ( )

   (A) $a\geqslant -\frac{1}{2}$. (B) $a>-\frac{1}{2}$.

   (C) $a\geqslant 1$. (D) $a>1$.

2. 设集合 $M=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,$N=\{(x,y)\mid x^2-y=0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,则集合 $M\cap N$ 中元素的个数为 ( )

   (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

3. 设 $a=0.3^2$,$b=\log_2 0.3$,$c=2^{0.3}$,则 ( )

   (A) $a>b>c$.

   (B) $c>a>b$.

   (C) $b>a>c$.

   (D) $a>c>b$.

4. 一元二次方程 $ax^2+2x+1=0(a\neq 0)$ 有一个正根和一个负根的充分而不必要条件是 ( )

   (A) $a<0$. (B) $a>0$.

   (C) $a<-1$. (D) $a>1$.

5. 若不等式 $|ax+2|<6$ 的解集为 $(-1,2)$,则实数 a 等于 ( )

   (A) 8. (B) 2. (C) -4. (D) -8.

6. (2005 高考辽宁卷)若 $\log_{2a}\frac{1+a^2}{1+a}<0$,则 a 的取值范围是 ( )

   (A) $(\frac{1}{2},+\infty)$. (B) $(1,+\infty)$.

   (C) $(\frac{1}{2},1)$. (D) $(0,\frac{1}{2})$.

7. 已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,且在 $[0,+\infty)$ 上是减函数,$f(a)=0(a>0)$,那么不等式 $xf(x)<0$ 的解集是 ( )

   (A) $\{x\mid 0<x<a\}$.

   (B) $\{x\mid -a<x<0$ 或 $x>a\}$.

   (C) $\{x\mid -a<x<a\}$.

   (D) $\{x\mid x<-a$ 或 $0<x<a\}$.

8. 若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调递增函数,则 $a+b\geqslant 0$ 是 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$ 的 ( )

   (A) 充分而不必要条件.

   (B) 必要而不充分条件.

   (C) 充要条件.

   (D) 既不充分也不必要条件.

9. (2005 高考辽宁卷)在 $\mathbf{R}$ 上定义运算 $\otimes$:$x\otimes y=x(1-y)$. 若不等式 $(x-a)\otimes(x+a)<1$ 对任意实数 x 成立,则 ( )

   (A) $-1<a<1$. (B) $0<a<2$.

   (C) $-\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$. (D) $-\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2}$.

10. 设函数 $f(x)=-\frac{x}{1+|x|}(x\in\mathbf{R})$,区间 $M=(a,b)(a<b)$,集合 $N=\{y\mid y=f(x),x\in M\}$,则使 $M=N$ 成立的实数对 (a,b) 有 ( )

    (A) 1 个. (B) 2 个.

    (C) 3 个. (D) 无数多个.

二、填空题

11. 不等式 $\frac{x-2}{3+2x-x^2}<0$ 的解集是________.

12. 设映射 $f:x\rightarrow -x^2+2x$ 是实数集 M 到实数集 P 的映射,若对于实数 $t\in P$,t 在 M 中不存在原象,则 t 的取值范围是________.

13. 若当 $x\in(\frac{1}{3},3)$ 时,$|\log_a x|<1$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是________.

14. 定义符号函数 $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 则不等式:$x+2>(2x-1)^{\operatorname{sgn} x}$ 的解集为________.

三、解答题

15. 解关于 x 的不等式 $a^{x^4-2x^2}>(\frac{1}{a})^{a^2}(a>0$ 且 $a\neq 1)$.

16. 设集合 $A=\{x|1<x<3\}$，又设 X 是关于 x 的不等式组 $\begin{cases}x^2-2x+a\leqslant 0,\\ x^2-2bx+5\leqslant 0\end{cases}$ 的解集，试确定 a、b 的取值范围，使得 $A\subseteq X$.

17. 已知关于 x 的不等式 $\dfrac{ax-5}{x^2-a}<0$ 的解集是 M.

(1)当 $a=4$ 时，求集合 M；

(2)若 $3\in M$ 且 $5\notin M$，求实数 a 的取值范围.

18. 设命题 p：函数 $f(x)=\lg(ax^2-x+\frac{1}{16}a)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$；命题 q：不等式 $\sqrt{2x+1}<1+ax$ 对一切正实数均成立. 如果命题 p 或 q 为真命题，命题 p 且 q 为假命题，求实数 a 的取值范围.

19. 已知函数 $f(x)=\ln(2-x)+ax$ 在 $(0,1)$ 内是增函数.

(1)求实数 a 的取值范围；

(2)若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=c\in(0,1)$ 且 $a_{n+1}=\ln(2-a_n)+a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，证明：$0<a_n<a_{n+1}<1$；

(3)若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=d\in(0,1)$ 且 $b_{n+1}=2\ln(2-b_n)+b_n$，则数列 $\{b_n\}$ 是否单调？并证明.

四、附加题

20. 已知函数 $f(x)$ 对任意的实数 x,y 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2y(x+y)+1$，且 $f(1)=1$.

(1)若 $x\in\mathbf{N}^*$，试求 $f(x)$ 的表达式；

(2)若 $x\in\mathbf{N}^*$ 且 $x\geqslant 2$ 时，不等式 $f(x)\geqslant(a+7)x-(a+10)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

第二专题 高考函数题型分析与预测

考题特征剖析

从 2005 年全国各地 16 套 29 份各种形式的高考试卷及近年的高考试题看，函数(包括导数)问题的考查主要涉及以下几类：

(1)函数的基本概念；

(2)与函数的性质有关的问题；

(3)含参数的函数的讨论问题；

(4)以基本函数出现的综合题；

(5)运用导数的有关知识研究函数的单调性与最值；

(6)利用导数的几何意义研究曲线的切线斜率问题.

函数是高中数学中极其重要的内容，其观点和方法贯穿高中代数的全过程，同时应用于几何问题的解决.在高考中，函数总是占有十分重要的地位，在选择题、填空题与解答题中都有体现，分值约占卷面总分的 20%，其特点是：稳中求变，变中求新、求活.试题设计从传统的套用定义、简单地使用性质，发展到了挖掘本质、活用性质，出现了不少创设情境、定义新知的信息题，与实际密切联系的应用题，以及与其他知识交汇综合的能力题.重点考查考生的逻辑推理能力、基本运算能力和综合解决问题的能力，考查等价转化、函数与方程、分类讨论、数形结合、待定系数法、配方法、换元法、构造法等数学思想方法.

导数知识的引入，给函数命题的设计背景增添了活力.近年的高考试题中与导数知识方法有关的分值约占 20 分左右.从题型上看可归纳以下几点：

(1)以填空题和选择题考查导数的概念，求函数的导数、单调区间，求函数的极值、最值及切线方程；

(2)利用导数的几何意义构建切线与其他曲线形成的几何图形的面积函数，再求最值；

(3)以函数单调性的导数定义为载体，考查解不等式的能力；

(4)利用导数解决实际问题中的最值或不等式的综合问题，属中档偏难题.

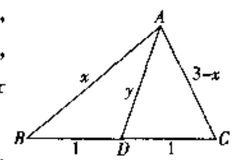
考点题型再现与分析

考点 1：函数的基本概念

函数的基本概念包括函数"三要素"，函数图象等，求函数定义域与解析式是每年必考的内容.函数的图象是函数的直观体现，运用函数的图象研究函数的性质非常方便.函数的图象正成为高考命题的热点之一，解这类题时要把图象和性质结合起来思考，注意双向交流对比.

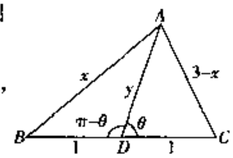
1. 函数的定义域

【例 1】在$\triangle ABC$中，$BC=2$，$AB+AC=3$，中线 AD 的长为 y，若以 AB 的长为 x，试建立 y 与 x 的函数关系，并指出其定义域.



【分析】要求出函数解析式，必须首先找出 AD 与 AB 的关系，从图中可知，可用余弦定理建立起二者之间的关系.

【解析】设 $\angle ADC=\theta$，则 $\angle ADB=\pi-\theta$.根据余弦定理得



$1^2+y^2-2y\cos\theta=(3-x)^2$①，

$1^2+y^2-2y\cos(\pi-\theta)=x^2$②，

由①+②并整理得，

$$y=\sqrt{x^2-3x+\frac{7}{2}}.$$

其中$\begin{cases}x>0,\\x+2>3-x,\\(3-x)+2>x,\end{cases}$ 解得$\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$.

∴函数的定义域为$(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$.

【点评】函数的定义域是使式子有意义的自变量的取值范围，同时也要注意自变量实际意义的要求.

【备选题 1】已知函数 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$，$g(x)=f(x+a)+f(x-a)(|a|\leqslant\frac{1}{2})$，求函数 $g(x)$的定义域.