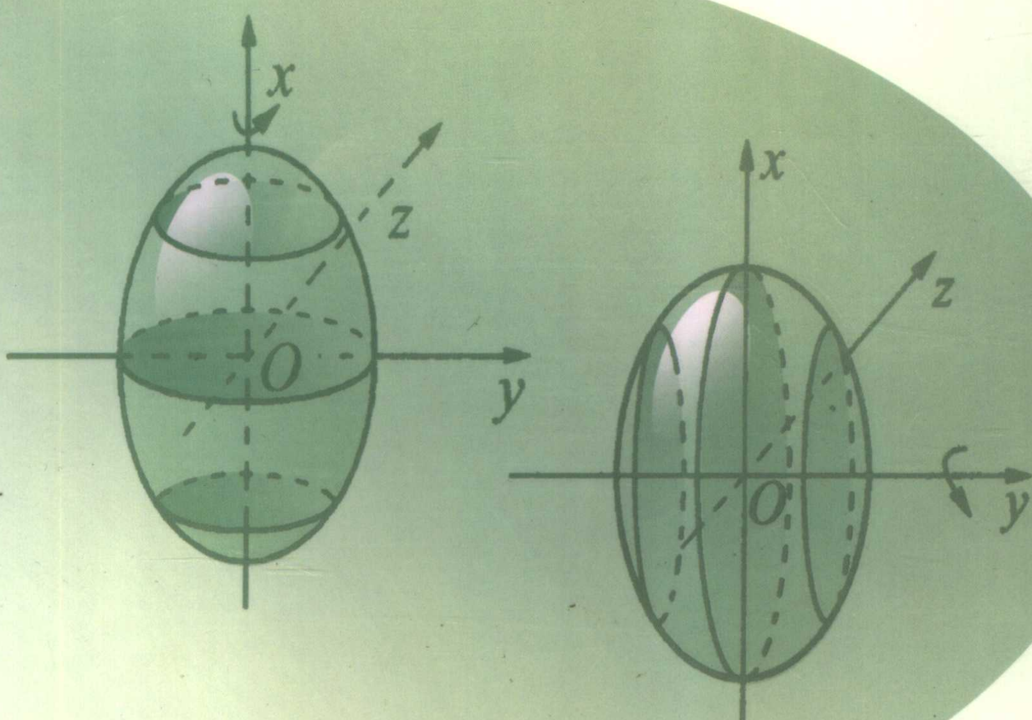
高等院校精品课程规划教材

XIANDAI GAODENG SHUXUE

现代高等数学

陈 辉 叶立军 主编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大學出版社

高等院校精品课程规划教材

现代高等数学

主　编　陈　辉　叶立军
编著者　（按照参编章节顺序）
叶立军　谷　峰　王学武
杜玲玲　沈忠华　夏卫锋

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

现代高等数学/陈辉,叶立军主编. —杭州：浙江大学出版社,2006.1

高等院校精品课程规划教材

ISBN 7-308-04552-8

Ⅰ. 现… Ⅱ. ①陈…②叶… Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 134305 号

内 容 提 要

本书根据教育部文科高等数学教学大纲的基本要求编写而成,在框架设计、内容安排及呈现方式上均体现现代数学教学理念,在讲解数学知识的同时,强调培养学生的数学思维,力图使学生对数学的基本特点、方法、思想及其在社会与文化中的应用有一个完整的认识,以培养具有合理知识结构和文化观念的创新型人才。

本书的主要内容包括函数、极限、导数及其应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、行列式及其运算、矩阵及其运算、线性方程组、随机数学的基本思想等。

本书起点较低,主线突出,并且编写了较多的数学文化知识,以增加学生对数学思想和方法的了解,提高他们的数学文化素质。

本书可作为高等院校文科类各专业的高等数学教材,也适用于生命科学、医药等非工科类学生。

责任编辑 阮海潮

出版发行 浙江大学出版社

(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310028)

(电话：0571—88925592,88273066(传真))

(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)

(网址：http://www.zjupress.com)

经　　销 全国各新华书店

排　　版 杭州大漠照排印刷有限公司

印　　刷 浙江省临安市曙光印务有限公司

开　　本 787mm×960mm 1/16

印　　张 15.75

字　　数 326 千

版 印 次 2006 年 1 月第 1 版 2006 年 1 月第 1 次印刷

书　　号 ISBN 7-308-04552-8/O·337

定　　价 24.00 元

前　　言

随着社会的不断发展，数学在社会生活中的作用越来越明显，高科技的本质是数学，数学是科学的工具和语言，其重要的思维方式和文化精神等不断被人们所接受。由于数学自身的特点和人类社会的不断进步，数学在现代文化中已经扮演着中心角色。当代文化发展的重要特征之一就是数学化，数学的方法、思想与精神不仅在自然科学和工程技术领域中起着重要的作用，而且正在以越来越快的速度渗透到社会科学的各个领域，显示出巨大的推动作用和启发作用。事实上，早在100多年前，马克思就曾指出："一门学科只有在成功地应用数学时，才算达到了真正完善的地步"。看来当代社会科学的发展已经进入了这个阶段了。

为此，数学大众化的思想也为人们所熟悉，人人学有价值的数学，不同的人学不同的数学，不同的人在数学上得到不同的发展。为了适应各个专业对"高等数学"课程日益增长的需要，许多高等院校纷纷在文科各专业开设了高等数学课。

各个专业的数学教学有许多自身的特点：既要学习有用的数学知识，又要领略理性思维的挑战；学生的基础不同，各专业的需求不同；因此，编写适合各个专业教学需要的高等数学教材显得很有必要。

本书针对文科、生命科学、医药等非工科类学生的实际需要、知识结构和思维特点以及文科高等数学教学大纲，在内容选取和结构设计上都作了较为周密的安排。全书按照"模块式"结构、逐层递进的原则，以便适应不同专业的需要和学时的多少灵活地选取或组合。在本书的编撰中，努力做到介绍数学知识的同时，强调培养学生的数学思维；书中还渗透了一些数学思想方法；融入了数学发展史、数学方法论以及数学在现代社会中的应用，力

图使学生对数学的基本特点、方法、思想、历史及其在社会与文化中的应用与地位有大致的认识，以培养具有新型知识结构与文化观念的创造性人才。

本书在框架设计、内容安排及呈现方式上均体现现代数学教学理念，内容反映数学理论知识。在编写过程中，努力形成三个特色：一、深入浅出地介绍高等数学知识，有利于广大学生学习；二、全面展示数学解题思路，有利于培养学生的解题能力；三、着力反映数学发展历史，有利于打造学生反思和探究的品质。

本书由杭州师范学院理学院数学系教师总结多年的教学经验、根据现行的高等数学教学大纲编撰而成。内容包括微积分、线性代数以及概率论与随机数学思想。本书由陈辉、叶立军任主编，叶立军撰写第一章、第三章，谷峰撰写第二章，王学武撰写第六章，杜玲玲撰写第四章、第五章，沈忠华撰写第七章、第八章、第九章，夏卫锋撰写第十章。

在本书的编写过程中参阅了许多专家学者的著作和研究成果，在此表示衷心的感谢。由于作者学识有限，时间仓促，书中难免有错漏之处，恳请各位专家、广大师生批评指正。

主　编

于西子湖畔

2005 年 12 月

目　　录

第一章　函数及数学中的几个猜想

初等数学的研究对象基本上是常量及其运算，而高等数学所研究的主要是变量之间的依赖关系. 从古到今数学的发展大体经历了五个时期：① 公元前600年以前的数学萌芽时期；② 公元前600年到17世纪中叶的初等数学时期；③ 17世纪中叶到19世纪20年代的变量时期；④ 19世纪20年代到第二次世界大战的近代数学时期；⑤ 20世纪40年代以来的现代数学时期.

每一时期的数学发展水平，从来都是和生产实践、科学技术的水平密切相关的. 首先，生产实践和科学技术向数学提出需要解决的问题，刺激数学向生产实践和科学技术发展的方向发展. 其次，生产实践和科学技术向数学提供了丰富的研究资料和物资条件，计算机技术的发展推动整个数学的发展就是最典型的案例. 此外，生产实践和科学技术为检验数学结论的正确性提供了真理性标准. 因此，数学的发生和发展归根到底是由生产实践决定的. 同时数学发展到一定阶段，对于生产实践又具有一定的相对独立性.

本章在复习中学数学教材中有关函数内容的基础上，进一步研究函数的概念、基本初等函数的图形以及函数的简单性质，分析初等函数的结构.

第一节　预备知识

一、集合

1. 集合的基本概念

"集合"是现代数学中一个重要的基本概念. **集合**是指具有某种特定性质的事物的全体. 构成集合的每一个对象称为该集合的**元素**.

【例 1.1】 所有正整数的全体构成一个集合，则每一个正整数都是该集合的元素.

通常，我们用大写字母 A、B、C……表示集合，用小写字母 a、b、c……表示集合中的元素.

如果 x 是集合 A 的元素，记作 $x\in A$，读作"x 属于 A"；如果 x 不是集合 A 的元素，记作 $x\notin A$，读作"x 不属于 A".

N 表示全体自然数构成的集合;**Z** 表示全体整数构成的集合;**Q** 表示全体有理数构成的集合;**R** 表示全体实数构成的集合.

2. 集合的表示法

(1)列举法:按任意顺序列出集合中所有的元素,并用花括号"{ }"括起来.如:$A=\{0,2,8\}$.

(2)描述法:把集合中元素所具有的某个共同属性描述出来,用 $A=\{x|x$ 具有的共同属性$\}$表示.如:$A=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$ 是用描述法表示的集合,而该集合用列举法表示是 $A=\{1,2\}$.

3. 集合的类型

所包含的元素的个数只有有限个的集合称为有限集,如 $A=\{1,2\}$ 是有限集.

所包含的元素的个数有无限个的集合称为无限集,如 $B=\{x|x>0\}$ 是无限集.

不含有任何元素的集合称为空集,记作 $\varnothing$.

【例 1.2】 $A=\{x \mid x^2+1=0, x$ 为实数$\}$为空集.

4. 子集

定义 1.1 有两个集合 A 与 B,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 叫做 B 的子集,记作 $A\subseteq B$ 或者 $B\supseteq A$,读作 A 包含于 B 或 B 包含 A.

显然有 $A\supseteq A$,$\varnothing\subseteq A$.

定义 1.2 若集合 A 和集合 B 含有相同的元素,则两个集合相等,记作 $A=B$.

$$A=B \quad \Leftrightarrow \quad A\subseteq B \text{ 且 } B\subseteq A.$$

二、实数与实轴

实数充满整个数轴而没有空隙,也就是实数不仅具有稠密性,而且具有连续性.实数与数轴上的点之间建立了一一对应关系.

三、绝对值

定义 1.3 任何实数 x 的绝对值,记为 $|x|$,定义为 $|x|=x$,若 $x\geqslant 0$;$|x|=-x$,若 $x<0$.

x 的绝对值 $|x|$ 表示为数轴上点 x 到原点的距离.实数绝对值具有如下性质:

(1) $|x|=\sqrt{x^2}$;

(2) $|x|\geqslant 0$,当且仅当 $x=0$ 时有 $|x|=0$;

(3) $|-x|=|x|$;

(4) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$;

(5) $|x+y|\leqslant |x|+|y|$; $|x-y|\geqslant ||x|-|y||\geqslant |x|-|y|$;

(6) $|xy|=|x||y|$;

(7) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}(y\neq 0)$.

四、区间和邻域

区间与邻域是高等数学中常用的实数集.

1. 区间

(1) 开区间：(a,b),用集合表示是 $\{x\mid a<x<b\}$,用不等式表示是 $a<x<b$,在数轴上则是以 a,b 为端点但不包含端点 a 和 b 的一条线段.

(2) 闭区间：$[a,b]$,用集合表示是 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$,用不等式表示是 $a\leqslant x\leqslant b$,在数轴上则是以 a,b 为端点且包含端点 a 和 b 的一条线段.

(3) 半开半闭区间：$[a,b)$,用集合表示是 $\{x\mid a\leqslant x<b\}$,用不等式表示是 $a\leqslant x<b$,在数轴上则表示以 a,b 为端点且包含左端点 a 的一条线段.类似地有 $(a,b]$.

上述端点为有限值的区间称为有限区间,有限区间可求区间长度.

(4) 5 种无穷区间：

$(a,+\infty)$ 用集合表示是 $\{x\mid x>a\}$,表示大于 a 的全体实数 x 的集合.

$[a,+\infty)$ 用集合表示是 $\{x\mid x\geqslant a\}$,表示大于或等于 a 的全体实数 x 的集合.

$(-\infty,a)$ 用集合表示是 $\{x\mid x<a\}$,表示小于 a 的全体实数 x 的集合.

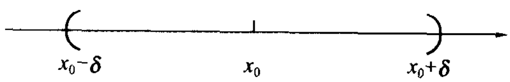
$(-\infty,a]$ 用集合表示是 $\{x\mid x\leqslant a\}$,表示小于或等于 a 的全体实数 x 的集合.

$(-\infty,\infty)$ 用集合表示是 $\{x\mid -\infty<x<\infty\}$,表示全体实数,在几何上表示整个数轴.

注意　∞ 是一个记号,不是一个数,因此与 ∞ 相伴的肯定是圆括弧.

2. 邻域

定义 1.4　点 x_0 的 δ 邻域,是指以 x_0 为中心,长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$,用绝对值不等式表示是 $|x-x_0|<\delta$.这里 $x_0\in\mathbf{R},\delta\in\mathbf{R},\delta>0$,点 x_0 称为该邻域的中心,δ 称为该邻域的半径,在数轴上可表示为：



例如,2 的 3 邻域就是 $|x-2|<3$,即 $(-1,5)$.

注意　2 的 3 邻域与 3 的 2 邻域是不同的.

有时我们需研究不含中心 x_0 的去心邻域,x_0 的 δ 去心邻域可用不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 表示.

第二节　函　　数

笛卡儿在"几何学"中引入了坐标与度量，开创了解析几何，使过去对立着的两个研究对象"数"和"形"统一起来，完成了数学史上一项划时代的变革. 笛卡儿引入变量以后，随之而来的便是函数概念. 虽然他没有使用变量和函数这两个词，但两者的关系如此密切，它们在历史上是同时出现的. 笛卡儿在指出 y 和 x 是变量时，已注意到 y 依赖于 x 而变化. 这正是函数思想的萌芽.

客观事物是在不断地发展变化的，因此，对某个特定的现象进行观察时，其中出现的各种量也在不断地变化，例如，杭州市区的气温、某区域噪声的分贝数、杭州市的房地产指数等等都在不断地变化. 这些变化的量都是变量.

高等数学与初等数学的重要区别在于高等数学以变量为研究对象，而初等数学主要以常量为研究对象.

一、函数的概念

定义 1.5　若 x 和 y 是两个变量，D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集. 如果对任何的 $x\in D$，按照一定的规则 f 有惟一确定的实数值与之对应，则称 f 是定义在 D 上的**函数**，也称 f 为变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 此处 D 称为函数 f 的定义域，称 x 为自变量，y 为**因变量**.

对于每一个 $x\in D$，按规则 f 所对应的惟一的 y 称为函数 f 在 x 处的函数值. 当 x 取遍 D 的每一个值时，对应的变量 y 取值的全体组成的数集称为该函数的值域，记作 $R(f)$.

如果两个函数的定义域相同，并且对应规则也相同，则称此两个函数相同，表示同一函数.

例如，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $g(x)=x+1$ 由于定义域不相等，它们就不是同一个函数.

我们约定：无特别标明时，函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量的一切实数所组成的实数集. 求函数的定义域要把握以下几点：

① 分母不为零；

② 偶次根号下非负；

③ $\log_a(h(x))$ 中 $h(x)>0$；

④ $\arcsin h(x)$ 及 $\arccos h(x)$ 中 $|h(x)|\leqslant 1$.

当然，在应用问题中还要考虑实际的因素，如价格不能小于零等.

【例 1.3】　求函数 $y=\dfrac{x+3}{x-4}$ 的定义域.

解　只有当分母 $x-4\neq 0$ 时，此函数才有意义，所以函数的定义域为 $x\neq 4$ 的全体

实数，即 $D=\{x \mid x\neq 4\}$.

【例 1.4】 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f(x^2)$，$f[f(x)]$，$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

解 $f(x^2)=\dfrac{1}{1-x^2}$，$D=\{x \mid x\neq -1,1,x\in \mathbf{R}\}$

$$f[f(x)]=f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=1-\frac{1}{x},D=\{x \mid \neq 0,1,x\in \mathbf{R}\}$$

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=f(1-x)=\frac{1}{1-(1-x)}=\frac{1}{x},D=\{x \mid x\neq 0,1,x\in \mathbf{R}\}$$

【例 1.5】 判断 $f(x)=x$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2}{x}$ 是否为同一函数.

解 当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=g(x)$，但当 $x=0$ 时 $f(x)$ 有定义而 $g(x)$ 无定义，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 定义域不相同，两者不是同一函数.

二、函数的图像

在平面上取定一个直角坐标系 xOy，用 x 轴上的点表示自变量的值，用 y 轴上的点表示函数值，这样，在 D_f 内的每一个 x 及相应的函数值 $f(x)$ 就确定了该平面直角坐标系中的一个点 $P(x,y)$，当 x 在 D 内变动时，点 P 便在坐标平面上移动，所有这些点的集合 $\{P(x,y) \mid x\in D_f,y=f(x)\}$ 就是函数 $y=f(x)$ 的图像.

把函数曲线投影到 x 轴，便在 x 轴上得到函数的定义域 D.

三、函数的表示法

在中学通常说的函数表示法有解析法（公式法）、表格法和图示法，这些大家都比较熟悉了. 在高等数学中还常常用到分段函数，即分段用几个式子来表示一个函数. 例如

符号函数 $SGN(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$

第三节　函数的几种特性

一、单调性

定义 1.6 设有函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，若对区间 (a,b) 内任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，满足 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调增加**的，相应区间 (a,b) 称为 $f(x)$ 的单调增加区间；反之，若对区间 (a,b) 内任意两点 x_1，

x_2，当 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调减少的**，相应区间 (a,b) 称为 $f(x)$ 的单调减少区间.

单调增加与单调减少函数统称为**单调函数**.

【例 1.6】 判断函数 $y=x^3$ 的单调性.

解 由于 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，对于任意 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，有 $f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$. 当 x_1,x_2 异号时，有

$$x_1x_2\leqslant 0, x_1^2+x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-x_1x_2>0,$$

故
$$f(x_2)-f(x_1)>0.$$

当 x_1,x_2 同号时，有

$$x_1x_2\geqslant 0, x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0$$

故
$$f(x_2)-f(x_1)>0.$$

即对任意 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，均有 $f(x_2)>f(x_1)$.

所以，$y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增加函数.

如果能作出函数的图像，那么这个函数的单调性很容易得到，如 $y=x^2$ 是一条抛物线，它在 $(-\infty,0)$ 上单调减少，在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

以后利用导数工具能很方便地判断函数的单调性.

二、有界性

定义 1.7 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in(a,b)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**有界**的；如果不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**无界**的.

由于 $|\sin x|\leqslant 1$，所以 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的.

函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内有定义，对任意的一个 $x\in(0,+\infty)$，均有 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，所以函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内是有界的.

函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 和 $[1,\infty]$ 内都有定义，但在 $(0,1)$ 内是无界的，在 $[1,+\infty)$ 内是有界的.

三、奇偶性

定义 1.8 设有函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点 O 对称，那么：① 若对任何 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称函数为**偶函数**；② 若对任何 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数为**奇函数**.

在几何上，偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点中心对称.

除了奇函数和偶函数以外，还存在大量的非奇非偶函数. 可以证明任何一个函数一定能写成一个奇函数和一个偶函数之和.

x 的奇次幂是奇函数，x 的偶次幂是偶函数.

两个奇函数的积是偶函数，两个偶函数的积是偶函数，奇函数与偶函数的积是奇函数.

【例 1.7】 判断函数 $f(x)=x^2\sin x$ 的奇偶性.

解　函数 $f(x)=x^2\sin x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，对于任意一个 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(-x)=(-x)^2\sin(-x)=-x^2\sin x=-f(x)$，

所以 $f(x)=x^2\sin x$ 为奇函数.

【例 1.8】 判断函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的奇偶性.

解　函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $[-1,1]$，对于任意一个 $x\in[-1,1]$ 有

$$f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}=f(x)$$

所以函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 是偶函数.

【例 1.9】 判断函数 $f(x)=\cos x+\sin x$ 的奇偶性.

解　函数 $f(x)=\cos x+\sin x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，对于任意一个 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(-x)=\cos(-x)+\sin(-x)=\cos x-\sin x$$

因为 $f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$，

所以 $f(x)=\cos x+\sin x$ 为非奇非偶函数.

四、周期性

定义 1.9　设有函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若存在正的常数 l，使得对任意的 $x\in D$，$x+l\in D$，满足 $f(x+l)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，满足这个等式的正数 l，称为函数的周期. 通常所说的周期是指最小正周期.

例如，函数 $y=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数；$y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

第四节　初等函数

一、反函数

定义 1.10　设 $y=f(x)$ 是定义在 $D(f)$ 上的一个函数，其值域为 $R(f)$，如果对每

一个 $y \in R(f)$ 有惟一确定的 $x \in D(f)$ 与之对应，且满足 $y=f(x)$，其对应法则记为 f^{-1}，则此定义在 $R(f)$ 上的函数为 $x=f^{-1}(y)$，并称之为 $y=f(x)$ 的反函数.

习惯上把自变量换成 x，因变量换成 y，因此 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$.

于是求反函数分两步，第一，由 $y=f(x)$ 解出 x；第二，x 与 y 互相交换.

函数与其反函数图形关于直线 $y=x$ 对称.

【例 1.10】 求函数 $x=\sqrt{1-x}$ 的反函数.

解 由 $y=\sqrt{1-x}$ 解得 $x=1-y^2$，将式中的自变量 y 与因变量 x 作一对换，则求得 $y=\sqrt{1-x}$ 的反函数为 $y=1-x^2$.

并非所有函数都有反函数，如 $f(x)=2$ 没有反函数，实际上只有一一对应的函数才有反函数.

严格单调的函数必有反函数，而且它们的单调性是一致的，如 $y=e^x$ 是单调增加的，其反函数 $y=\ln x$ 也是单调增加的.

二、基本初等函数

1. 常数函数 $y=c$

2. 幂函数 $y=x^a$（a 为实数）

x^a 在 $(0,+\infty)$ 内总有定义，图形都经过(1,1)点. 把 a 放在自然数范围内考虑，当 a 为偶数时，x^a 为偶函数；当 a 为奇数时，x^a 为奇函数.

3. 指数函数 $y=a^x(a>0, a\neq 1)$

定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$.

不管 a 取何值，函数图形均经过(0,1)点.

当 $a>1$ 时，a^x 为严格单调增加函数，图形是“一撇”；

当 $0<a<1$ 时，a^x 为严格单调减少函数，图形是“一捺”.

4. 对数函数 $y=\log_a x(a>0, a\neq 1)$

定义域为 $(0,+\infty)$，不管 a 取何值，函数均经过(1,0)点；

当 $a>1$ 时，函数为严格单调增加，当 $0<a<1$ 时，函数为严格单调减少.

注意到对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数，所以其相应的图形是关于直线 $y=x$ 对称，它们的定义域和值域恰好互相交换.

5. 三角函数

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$ 等.

6. 反三角函数

这些基本初等函数在初等数学中已经有详细介绍，在此将它们的图形与性质列于附录四.

三、复合函数

先看一个例子：设 $y=\mathrm{e}^u$，$u=x^2$，用 x^2 去替代第一式中的 u，得

$$y=\mathrm{e}^{x^2}$$

可以认为函数 $y=\mathrm{e}^{x^2}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$ 及 $u=x^2$ 复合而成，此类函数称为复合函数.

定义 1.11　设 $y=f(u)$，而 $u=\varphi(x)$，$x\in D$，D 为一实数集，如果对于每一个 $x\in D$，通过 $u=\varphi(x)$ 有惟一确定的值 u，并且 $y=f(u)$ 在 u 处有定义，从而确定 y 值与之对应，这样就得到一个以 x 为自变量，以 y 为因变量的函数，这个函数被称为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记为

$$y=f[\varphi(x)]$$

并称 x 为自变量，u 为中间变量.

由此定义，当里层函数的值域不包含于外层函数的定义域时，只要两者有公共部分，可以限制里层函数的定义域，使其对应的值域包含于外层函数定义域，就可以构成复合函数.

例如，函数 $y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的复合函数. 而 $y=u^2$ 的定义域 $D=\mathbf{R}$，则 D 也是 $u=\varphi(x)=\sin x$ 的定义域.

再如，函数 $y=\arccos u$ 及 $u=3+x^2$ 就不能组成复合函数，原因是 $u=3+x^2$ 的值域 $[3,+\infty)$ 与 $y=\arccos u$ 的定义域的交集为空集，对于 $u=3+x^2$ 的定义域 $\mathbf{R}$ 内的任何 x 值，形式上的复合函数 $y=\arcsin(2+x^2)$ 均无意义，故不能构成复合函数.

复合函数可以由两个以上的函数复合而成. 要会将几个函数合成一个复合函数，也要会将一个复合函数拆成（分解）若干个函数，后者对于导数运算尤为重要.

四、初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算所构成，并能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

例如，$y=x^2+\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$，$y=\arcsin(1-x^2)$ 都是初等函数.

微积分研究的主要对象是初等函数的性质.

第五节　数学中的几个猜想

猜想是在对研究的对象或问题进行观察、实验、分析、比较、联想、类比、归纳的基础上，依据已有的材料和知识做出的符合一定经验与事实的推测性想像的思维方式，它是