

高等学校教材

实变函数 简明教程

邓东皋 常心怡 编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

0174.1

38

高等学校教材

实变函数简明教程

邓东皋 常心怡 编

高等教育出版社

内容提要

本书是作者在长期讲授综合性大学与师范院校本科“实变函数”课程的基础上编写的,主要介绍 Lebesgue 测度与积分理论。内容包括:集合与点集、Lebesgue 测度、可测函数、Lebesgue 积分、微分与不定积分、Lebesgue 空间 L^p 等。

本书着力于阐述概念的背景来源,解决问题的思想方法,每部分内容在整个理论体系中的作用和地位,以及它们与别的概念、理论的内在联系等,其中包含作者许多独到、精辟的见解。内容少而精,紧密围绕实变函数的基本训练,尽可能引起读者的兴趣和减少学习上的困难。

本书可作为综合性大学、理工科大学、师范院校“实变函数”课程的教材或教学参考书。对于青年数学教师和数学工作者是一本较好的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

实变函数简明教程/邓东皋,常心怡编. —北京:高等教育出版社,2005.5
ISBN 7-04-016700-X

I. 实... II. ①邓... ②常... III. 实变函数-高等学校-教材 IV. O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 031688 号

策划编辑 李艳馥 责任编辑 李 陶 封面设计 王凌波 责任绘图 吴文信
版式设计 王艳红 责任校对 杨凤玲 责任印制 朱学忠

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010-58581000
经 销 北京蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京鑫海金澳胶印有限公司

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>

开 本 787×960 1/16
印 张 10
字 数 180 000

版 次 2005 年 5 月第 1 版
印 次 2005 年 5 月第 1 次印刷
定 价 13.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 16700-00

前言

我们分别在中山大学与陕西师范大学讲授过多年的实变函数课程,本书就是在讲课的基础上编写的。本书希望在下面的三个方面进行一些尝试。

第一,实变函数是数学与相关专业的一门重要的基础课,但学生学起来较普遍地觉得比较困难。难在什么地方呢?首先是不不知道为什么要引进许多概念,例如,为什么要讲 Lebesgue 积分、测度, L^p 空间等。不知道这一点,学习当然就没有积极性,自然便感到困难;其次是很多概念不知道为什么要如此引进,许多定理为什么要这样证明。本书的第一项努力的目标就是希望把概念的背景来源,解决问题的思想方法,所讲授的内容在整个理论体系中的作用与地位,以及它与别的概念、理论等的内在联系等揭露出来,使读者尽可能地减少学习中的盲目性与困难,更好地掌握所学内容的思想本质。

第二,少而精。现在这门课的学时愈来愈少,因此本书仅限于介绍最必要的内容。对这些必要的内容,力图交代来龙去脉,讲深讲透。这样,有些内容讲述的篇幅可能会长一些,但是归结到数学的叙述和证明,仍然是十分简练的。

第三,学生觉得实变函数难学,还有一点就是觉得习题太难。因此,本书尽可能配置一些对学生训练有益而又容易动手的习题,并尽可能安排得由浅入深。但我们要告诉读者,有些题目的确较难,读者一下子做不出来也很正常,收在这里便于读者慢慢思考。学过一段以后回头再做,可能会获得新的启发。

我们这样尝试,是希望本书不仅能适用于一般综合性大学与师范院校数学专业的本科,还能适用于非数学专业,以致更多大专院校的有关专业。当然,对有些院校,使用本书时还需要给学生介绍一些参考书,而对另一些院校,在使用时则可以在内容上有所取舍,例如第五、六章的一些内容和定理的证明可以省略。

本书在酝酿与编写的过程中,编者之一在北京大学任教时,曾与张恭庆院士有过不少的交流与讨论,其中特别是关于数学史上三次完备化的观点,是 20 世纪 70 年代张恭庆院士提出来的,编者对此十分赞成,把它写进了本书。衷心感谢张恭庆院士的指导与帮助。

限于水平,错漏难免,欢迎批评指正。

编者

2004.9.10.

目 录

绪 论	1
第一章 集合与点集	7
§ 1.1 集合及其运算	7
§ 1.2 集合的基数	14
§ 1.3 $\mathbf{R}^n$ 中的点集	23
§ 1.4 点集上的连续函数	31
第一章习题	35
第二章 Lebesgue 测度	40
§ 2.1 外测度	42
§ 2.2 可测集与测度	45
§ 2.3 可测集的特征	52
第二章习题	55
第三章 可测函数	58
§ 3.1 可测函数的概念与基本性质	58
§ 3.2 可测函数列的收敛	65
§ 3.3 可测函数与连续函数	75
第三章习题	78
第四章 Lebesgue 积分	82
§ 4.1 非负可测函数的积分	83
§ 4.2 一般可测函数的积分	90
§ 4.3 积分的极限定理	94
§ 4.4 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的比较	100
§ 4.5 Fubini 定理	105
第四章习题	114
第五章 微分与不定积分	118
§ 5.1 变上限积分的微分	119
§ 5.2 绝对连续性与 Newton - Leibniz 公式	128

II 目录

第五章习题	134
第六章 Lebesgue 空间 L^p	137
§ 6.1 L^p 空间	138
§ 6.2 L^2 空间	145
第六章习题	151

绪 论

我们来介绍本教程的主要内容以及这些内容在整个数学领域中的地位.

本教程主要讲授勒贝格(Lebesgue)积分与测度的理论.为什么要学习这些理论呢?我们从数学史上的三次“完备化”说起.

(一) 数学史上的三次“完备化”

(1) 有理数的完备化——实数系

读者从数学分析课程中知道,有理数系对极限运算是不封闭的,即在有理数系内,(有理数的)柯西(Cauchy)基本列并不一定有(有理数的)极限存在^①.因此,需要把有理数系扩张为实数系,即把有理数系“完备化”而得到实数系.实数系对极限运算是封闭的.这是数学史上的第一次完备化.

实数系的建立,使微积分奠定在严格而坚固的理论基础上,这是一件大事.这件事与群论的建立,非欧几何的产生一起,被誉为19世纪数学的三大发现,它们改变了整个数学发展的进程,形成了近代数学与现代数学.

有人可能会问,实用上能计算出数值来的都是有理数,为什么还要实数?我们的回答是,没有 π ,没有 e ,还有多少数学?没有实数系,微积分能走多远?

(2) 黎曼(Riemann)积分的完备化——Lebesgue 积分

在数学分析中,Riemann 积分的概念与理论是十分重要的一部分.它的威力在数学分析的后续课程——常微分方程、复变函数论、概率论以及力学课程中,已经相当充分地表现出来了.但是 Riemann 积分有一个很大的缺点,就是 Riemann 可积函数列的极限并不一定是可积的,或者说 Riemann 可积函数类对极限运算是不封闭的.试看下面的例子.

把 $[0,1]$ 中全体“二进有理数”写出来:

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \dots \quad (1)$$

它们由 $0, 1$ 以及 $\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \dots, \frac{2^n-1}{2^n} (n=1, 2, \dots)$ 组成.把(1)中的数列记为 $r_1, r_2, r_3, \dots, r_k, \dots$,它们的数值构成集合 $\{r_k\}$,我们来定义函数列:

^① 参看邓东皋、尹小玲编著的《数学分析简明教程》(高等教育出版社,1999年第一版)上册.300~302

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x = r_1, \dots, r_k, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中 $k=1, 2, \dots$. 对每个固定的 k , f_k 在 $[0, 1]$ 的间断点只有 $r_1, \dots, r_k$, 是只有有限个间断点的有界函数, 因而是 Riemann 可积的. 但这个函数列有极限 $f(x)$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \quad x \in [0, 1],$$

其中

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in \{r_k\}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

它在 $[0, 1]$ 上与狄利克雷 (Dirichlet) 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

极为相似, 在 $[0, 1]$ 的每一点都不是连续的, 因此也就在 $[0, 1]$ 不是 Riemann 可积的. 事实上, 按定义, Riemann 积分为 Riemann 和的极限, 即

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (2)$$

其中等式右方的和式, 对应于 $[0, 1]$ 的分法:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1,$$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. 如果 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 可积, 则等式

(2) 右方的极限存在. 但我们知道, 在任何小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 中, 既存在 $\{r_k\}$ 中的点, 也存在非 $\{r_k\}$ 中的点, 取 $\xi_i \in \{r_k\}$, $i=1, 2, \dots, n$, 则黎曼和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = 1;$$

而取 $\xi_i \notin \{r_k\}$, $i=1, 2, \dots, n$, 则

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = 0.$$

由此可知, 等式 (2) 左边的极限是不存在的, 也就是说, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 不是可积的. 这样, 我们便看到了, 存在黎曼可积的函数列, 它在积分区间中的每一点都有极限, 但极限函数不是黎曼可积的.

黎曼可积函数列的极限可以不是黎曼可积的, 自然也就说不上积分号下取极限了, 即不可能有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

上面的例子表明, 黎曼可积函数类对极限运算是不封闭的. 换句话说, 黎曼可积函数类 (对极限运算) 是不完备的. 我们希望扩张黎曼可积函数类, 即重新

定义一种积分,它的可积函数类对极限运算是封闭的.说得更明确一点就是,我们要给出一种新的积分定义,使得,第一,原来在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积的函数,按新的积分定义也是可积的.第二,如果按新的积分定义是可积的函数列 $f_k(x)$,它有极限存在

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x),$$

则按新定义 $f(x)$ 的积分也存在(即按照新定义 f 也是可积的),进一步,还希望有“积分号下取极限”成立,即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

这种新定义的积分就是 Lebesgue 积分.它是 Lebesgue 在 20 世纪初引进的.讲述这种积分的概念与理论,便是本教程的主题.

下面顺便说一下数学史上的第三次完备化.

(3) 经典函数概念的完备化——广义函数(又称分布)

在 19 世纪末,工程师赫维赛德(Heaviside)在解电路方程时,提出了一种运算方法,称之为算子演算(又称作运算微积).这套演算要求对如下的函数(称为 Heaviside 函数)

$$Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x < 0, \\ 1, & \text{当 } x \geq 0 \end{cases}$$

求微商,他并且把这个微商记作 $\delta(x)$.按经典分析的理论, $Y(x)$ 在 $x=0$ 并不可微,因此这个 $\delta(x)$ 根本不能成其为函数,但它却对简化运算很有效,并且有很直观的物理意义.例如它可以表示点电荷的电荷密度,脉冲电流的电流强度等,因而受到欢迎.

20 世纪 30 年代,英国物理学家狄拉克(Dirac),从物理理论出发,直接引进了“函数” $\delta(x)$ (现在称为 Dirac δ 函数),定义为

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \neq 0, \\ +\infty, & \text{当 } x = 0 \end{cases}$$

并且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

他同时还引进了许多涉及 $\delta(x)$ 的运算,如:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-y)f(y) dy = f(x).$$

由此可见,

$$\int_{-\infty}^x \delta(y) dy = Y(x) \quad (-\infty < x < +\infty),$$

所以这个 $\delta(x)$ 也就是 Heaviside 函数的微商. Dirac 用他的这套运算处理许多物

理问题,显得特别简单.但从数学分析的函数定义来看,这样的函数 $\delta(x)$ 是不存在的.

仔细想想就会发现,这个“函数” $\delta(x)$ 却是经典意义下的函数的极限.例如,取

$$f_k(x) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{k}{1+k^2x^2} \right)$$

(见图 0.1), 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x) dx = 1,$$

而且显然有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \delta(x)$$

(如果承认积分号下取极限,便有 $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$).

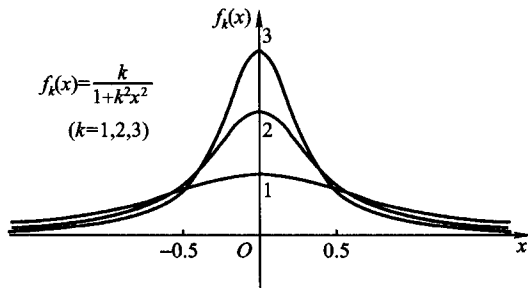


图 0.1

从这里我们可以看出,经典意义下的函数类,对极限运算是不封闭的.同积分需要完备化一样,人们希望重新给出函数的定义,使新的函数类对极限运算是封闭的,而且它们有微分与积分的运算.这种新的函数被称为广义函数(也称为分布),它包括了常见的经典意义下的函数以及它们的极限,例如上面的 $\delta(x)$. 广义函数的基本理论由施瓦茨(L. Schwartz)在 20 世纪 50 年代给出, Schwartz 也因此获得菲尔兹(Fields)奖.这是数学史上的第三次完备化,它是建立在第二次完备化的 Lebesgue 积分理论基础上的.第三次完备化的详细论述,则属于另一门后续数学课程——泛函分析的内容了.

(二) Lebesgue 积分的思想

一维 Riemann 积分的几何意义是曲线下曲边梯形的面积,新的积分在几何上也应该包含这一意义. Riemann 积分与 Lebesgue 积分这两种积分的差别在于求面积的方法不同, Riemann 积分从自变量所在的区间 $[a, b]$ 的分法出发, Lebesgue 则从函数的值域的分法着手.为简单起见,设 $y = f(x)$ 是在 $[a, b]$ 上定义的

非负有界函数, 即 $0 \leq m \leq f(x) < M$. 对 $[m, M]$ 作任意的分法

$$m = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = M,$$

考虑点集

$$E_i = \{x \in [a, b] \mid y_{i-1} \leq f(x) < y_i\},$$

(见图 0.2) 这时曲线上点的纵坐标在 y_{i-1} 与 y_i 之间的这一部分小“曲边梯形”的

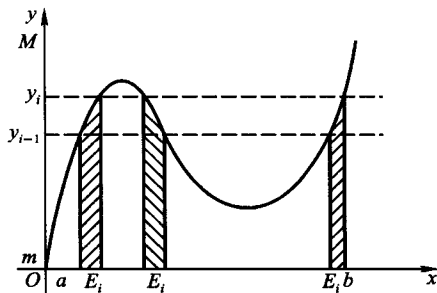


图 0.2

面积应近似地等于底乘高. 这时高可取作 y_{i-1} , 底应是集合 E_i 的“长度”. 但一般说来, E_i 不是区间, 因此不见得有长度, 故我们需要把“长度”的概念推广到 E_i , 记为 $\text{mes}(E_i)$ (这就是 E_i 的一维 Lebesgue 测度, 本书后面再详述). 这样, 小“曲边梯形”的面积就近似地为

$$y_{i-1} \text{mes}(E_i).$$

作和

$$\sum_{i=1}^n y_{i-1} \text{mes}(E_i),$$

它便是 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的曲边梯形面积的近似值. 令 $\delta = \max_{1 \leq i \leq n} (y_i - y_{i-1}) \rightarrow 0$, 如果上述和的极限存在, 便定义这极限值为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的积分 (Lebesgue 积分):

$$(L) \int_{[a, b]} f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n y_{i-1} \text{mes}(E_i).$$

Lebesgue 本人曾用生动的譬喻来解释他的方法并说明其优越性. 他写道: “在 Cauchy 的方法 (指 Riemann 积分) 中, 是这样操作的, 就像没有经验的店员清点硬币和纸币那样, 拣到那个就点那个. 然而, 我们在操作时就像老练并且有条理的店员那样, 嘴里说着: 我有 $\text{mes}(E_1)$ 个一法郎的硬币, 价值 $1 \times \text{mes}(E_1)$, 我有 $\text{mes}(E_2)$ 个二法郎的硬币, 价值 $2 \times \text{mes}(E_2)$, 我有 $\text{mes}(E_5)$ 个五法郎的硬币, 价值 $5 \times \text{mes}(E_5)$, $\cdots$. 我总共有 $1 \times \text{mes}(E_1) + 2 \times \text{mes}(E_2) + 5 \times \text{mes}(E_5) + \cdots$ 法郎. 当然, 这两个店员得到同样的结果, 可是, 在这些和数 (shǔ)

不清的时候,即硬币的总数为无穷时,两种方法的差别就大了”.^①

为了把上述 Lebesgue 积分的概念弄清楚,首先遇到的是集合

$$E_i = \{x \in [a, b] \mid y_{i-1} \leq f(x) < y_i\},$$

一般说来,这不是直线上的一个区间,而是由 $[a, b]$ 里的点构成的一个集合. 其次,就是要把长度的概念推广到这种直线上的一个集合,建立所谓的 Lebesgue 测度. 然后在此基础上就可以讲授 Lebesgue 积分了. 所以,本教程讲述的次序是,先从集合与点集讲起,再讲 $\mathbf{R}^n$ 中点集的 Lebesgue 测度,然后讲述 Lebesgue 积分理论.

(三) 积分完备化的意义

在前面介绍的数学史上的三次完备化中,后两次完备化构成了 20 世纪前半叶两个新数学分支的主要内容,这两个分支便是实变函数论与泛函分析^②. 本课程讲述的便是实变函数论这个分支的最基本的理论. 它为泛函分析与现代概率统计的建立奠定了基础,是 20 世纪数学的重要基础之一. 可以毫不夸张地说,Lebesgue 测度与积分、广义函数、泛函分析,在现在,不仅是数学家的通用工具,甚至已经是物理学家、经济师与高级工程技术人员的通用语言了. 所以,为了进一步学习现代数学、物理以及新的科学技术,有必要通过本课程打好知识基础.

在一般的数学分析课中,都是先讲一元函数微积分,再讲多元函数微积分. 本课程将不同于数学分析的处理,把一元与多元统一起来考虑,也就是直接讲述 n 维欧氏空间点集的测度以及在其上定义的函数的 Lebesgue 积分. 这样讲,比较简明精炼. 读者有数学分析的基础,学起来应该是不困难的.

本课程的理论性很强,几乎没有什么数值或函数的计算,其性质有点像中学里的“平面几何”课. 因此希望读者在学习过程中,十分注意概念的叙述与理解,用心分析指导推理的思路,努力锻炼用严格的数学语言表达自己的思想,这是学好本课程的关键. 应该看到,学好本课程所获得的,不仅是必要的知识基础,而且是理性思维的一次很好的训练.

① 参阅 V·季霍米罗夫:20 世纪前叶的数学,数学译林,2001 年第一期,292~302.

② 参看注解①季霍米罗夫的文章. 也可以看 Jean-Kahane 的文章:Lebesgue 积分的产生及其影响,数学进展,第 31 卷第 2 期,2002 年 4 月,97~106.

第一章 集合与点集

正如绪论中介绍的,我们要研究定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数在集合 $E \subset \mathbf{R}^n$ 的积分,这就需要定义如

$$\{x \in E \mid y_{i-1} \leq f(x) < y_i\}$$

这样的点集的测度,为了使积分的定义可行并能应用,就必须研究这样的集合的运算及其一般性质. 另外,在本课程中我们还会讨论积分同连续、可微之类的函数基本性态之间的关系,以及某些函数类的性质,这也需要集合运算做工具. 因此本章从一般的集合入手,再转入讨论本课程所必须的 $\mathbf{R}^n$ 中点集的一些最基本的性质.

§ 1.1 集合及其运算

集合是现代数学最基本的概念,它的严格定义只能由集合论公理系统给出,但在本课程范围内,只需要对集合有一个朴素的认识,即把集合看成是由一些确定的不同事物(或抽象的对象)组成的整体就够了. 这些对象称为集合的元素,一般用大写字母 $A, B, C, \dots, X, Y, Z$ 表示集合,而用小写字母 $a, b, c, \dots, x, y, z$ 表示元素. a 是集合 A 的元素记作 $a \in A$,读作 a 属于 A ; a 不是集合 A 的元素记作 $a \notin A$,读作 a 不属于 A . 元素与集合是不同层次的数学对象,它们之间只有属于和不属于这两种关系,二者必居其一. 对于一些特殊的集合,如整数集,自然数集,正整数集,有理数集和实数集,分别用专门的记号(大写正粗体字母) $\mathbf{Z}, \mathbf{N}, \mathbf{N}_+, \mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}$ 表示,其中 $\mathbf{N}_+$ 为自然数集 $\mathbf{N}$ 中除去 0 的集. 集合的表示一般有两种方法,一种是把它的元素全部列举出来,例如,

$$A = \{1, 2, 3\},$$

$$B = \{1, 3, 5, \dots, 2k-1, \dots\},$$

前者是由三个数 1, 2, 3 组成的集合,后者是由全部正奇数组成的集合;另一种是用元素所满足的某种性质来刻画,例如,用 $p(x)$ 表示关于 x 的一个命题或条件,则

$$\{x \mid p(x)\}$$

就表示全部使得 $p(x)$ 成立的 x 组成的集合,例如,

$$C = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 < 1\},$$

$$D = \{p \in \mathbf{N}_+ \mid p < 10^{10}, p \text{ 为素数}\},$$

C 就表示平面上的单位圆盘(不带圆周), D 则表示小于 10^{10} 的所有素数组成的集合.

若 A, B 是两个集合, 而 A 的元素必定是 B 的元素, 则记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 读作 B 包含 A 或 A 包含于 B . 我们引入两个逻辑符号, $\forall$ 表示“对任意的”, $\exists$ 表示“存在”, 这样, 用符号来写就是, $A \subset B: \forall x \in A$ 有 $x \in B$. 这时也称 A 是 B 的子集. 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称集合 A 与 B 相等, 记为 $A = B$, 相等的集合由相同的元素组成. 若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$ (A 与 B 不相等), 则称 A 是 B 的真子集, 记为 $A \subsetneq B$.

有一个最特殊的集合就是不含任何元素的集合, 称为空集, 记为 $\emptyset$, 它是为了叙述和运算的方便而引进的. 还规定空集是任何集合的子集, 因此可以写

$$\emptyset = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 1 = 0\} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 1 = 0\} \subset \mathbf{R}^3.$$

下面介绍集合的运算.

定义 1.1 对于给定的集合 A 与 B , 由所有属于 A 或者 B 的元素组成的集合 $\{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 称为 A 与 B 的并集, 记为 $A \cup B$ (图 1.1). 若 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 为一集族 (以集合为元素的集合称为集族, $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 即 $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$, 这里 A_α 是指标 α 所对应的集合, 而 α 可以是集合 I 的任意元素, I 称为指标集), 则它们的并集为

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \mid \exists \alpha \in I \text{ 使得 } x \in A_\alpha\}.$$

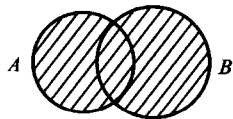


图 1.1 集合的并集

定义 1.2 对于集合 A 与 B , 由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为它们的交集, 记为 $A \cap B$ (图 1.2); 集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 的交为

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \mid \text{对于任意 } \alpha \in I \text{ 有 } x \in A_\alpha\}.$$

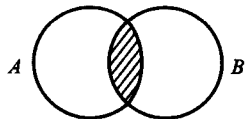


图 1.2 集合的交集

若 $A \cap B = \emptyset$, 称 A 与 B 为不相交的. 若对于集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 中的任意两个集合 A_α 与 A_β ($\alpha, \beta \in I$ 且 $\alpha \neq \beta$) 都有 $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$, 则 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 称为两两不相交或互不相交的. 由定义可见, 一些集合的并集是由它们的一切元素合在一起组成的集合, 交集则是由它们的公共元素组成的集合.

例 1 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$
 $= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \neq 0, -\infty < y < +\infty\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, y \neq 0\}.$

证明等式两边的集合相等, 按定义只要证明左边的集合包含于右边的集合, 同时右边的集合也包含于左边的集合. 请读者自己把证明写出来. 这个例子写出来似乎很复杂, 其实意思是很简单的. 左边的集合表示全平面去掉一个原点; 右

边的第一个集合表示全平面去掉 y 轴,第二个集合表示全平面去掉 x 轴,这两个集合合并起来,自然就是全平面去掉一个原点,即等于左边的集合了.

例 2 设 f 是定义于 $\mathbf{R}$ 上的实值函数,则

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \mid |f(x)| \leq k\} = \{x \mid f(x) \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R};$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \mid |f(x)| \leq 1/k\} = \{x \mid f(x) = 0\}.$$

证明 先证明前一式. 因为对于任意自然数 k ,

$$\{x \mid |f(x)| \leq k\} \subset \{x \mid f(x) \in \mathbf{R}\} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

故 $\bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \mid |f(x)| \leq k\} \subset \{x \mid f(x) \in \mathbf{R}\}$. 反过来, 因为 $f(x)$ 取实数值, 故对于任意实数 x_0 , 总有某个正整数 k , 使得 $|f(x_0)| \leq k$, 从而 $x_0 \in \{x \mid |f(x)| \leq k\}$, 进而 $x_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \mid |f(x)| \leq k\}$. 即 $\{x \mid f(x) \in \mathbf{R}\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \mid |f(x)| \leq k\}$. 因此前式两端的集合互相包含, 从而等式成立.

再证明后一式. 若 $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \mid |f(x)| \leq 1/k\}$, 则对于任意正整数 k , $|f(x_0)| \leq 1/k$, 因而 $f(x_0) = 0$, 即 $x_0 \in \{x \mid f(x) = 0\}$. 反之若 $x_0 \in \{x \mid f(x) = 0\}$, 则 $f(x_0) = 0$, 因而对任意正整数 k , $|f(x_0)| \leq 1/k$, 这表示 x 属于所有的 $\{x \mid |f(x)| \leq 1/k\}$. 因此 $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \mid |f(x)| \leq 1/k\}$. 合起来说明, 后式两端的集合互相包含, 从而它们相等. $\square$ ^①

本例子的第一个式子说明, 任何一个实数, 其绝对值总不超过一个正整数; 第二个式子说明, 一个数等于 0, 当且仅当对任意的正整数 k , 这个数的绝对值小于等于 $1/k$.

例 3 设 f 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的单调函数, 证明它的间断点集 J 可以表示成

$$J = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \mid |f(x+0) - f(x-0)| > 1/k\}.$$

证明 根据单调函数的间断点都是第一类的, 若 x_0 是 f 的间断点, 即 $x_0 \in J$, 则 $|f(x+0) - f(x-0)| > 0$, 因此对很大的正整数 k_0 有 $|f(x+0) - f(x-0)| > 1/k_0$, 从而 $x_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \mid |f(x+0) - f(x-0)| > 1/k\}$, 这说明

$$J \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \mid |f(x+0) - f(x-0)| > 1/k\}.$$

反过来, 若

^① 以后用 $\square$ 表示“证毕”.

$$x_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \mid |f(x+0) - f(x-0)| > 1/k\},$$

则有正整数 k_0 , 使 $|f(x_0+0) - f(x_0-0)| > 1/k_0$, 因此更有 $|f(x_0+0) - f(x_0-0)| > 0$, 即 $x_0 \in J$, 这说明

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \mid |f(x+0) - f(x-0)| > 1/k\} \subset J.$$

正反两方面的证明说明, 题中等式两端的集合互相包含, 因而它们相等. $\square$

这个例子的意思很简单, 它只说明两点, 第一, 单调函数的间断点只有第一类间断点. 因此, x_0 是 f 的间断点, 当且仅当 $|f(x_0+0) - f(x_0-0)| > 0$. 第二, 一个数是正数, 当且仅当存在正整数 k , 使得这个数大于 $1/k$.

定理 1.1 集合的交与并满足下列运算规律:

(i) 交换律 $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

(ii) 结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

(iii) 分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

这些运算规律还可以推广到任意有限或无限个集合的情形. 例如, 对于集合 A 和集族 $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 有

$$A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha), \quad A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha).$$

它们与数的运算规律很相似, 可在应用中熟悉它们, 证明留给读者.

定义 1.3 对于任意集合 A 与 B , 集合

$$\{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

称为 A 与 B 的差(集), 记为 $A \setminus B$ (图 1.3).

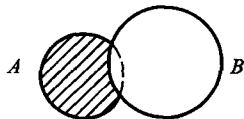


图 1.3 集合的差

例 4 设 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的实函数, 令

$$A = \{x \mid f(x) \geq 0\}, \quad B = \{x \mid f(x) = 0\}, \quad C = \{x \mid f(x) < 0\},$$

则 $A \setminus B = \{x \mid f(x) > 0\}$, $A \cap C = \emptyset$, $B \setminus A = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$, $C \setminus B = C \cap A = \emptyset$.

在有的问题中, 往往所讨论的集合都是同一基本集合 X 的子集, 这时称 X 为全集. 若 $A \subset X$, 则记 $X \setminus A$ 为 A^c , 称它为 A 对于 X 的余集(或补集). 求集合的余集其实是特殊的求差运算. 例如实变函数的定义域都是 $\mathbf{R}^n$ 的子集, 因此, 若某函数的定义域为 E , 则 $E \subset \mathbf{R}^n$, 而 E^c 即指 $\mathbf{R}^n \setminus E$.

下面是集合的差与余的一些基本运算规律, 证明留给读者.

定理 1.2 设 A, B 都是全集 X 的子集, 则

(i) $A \setminus B = A \cap B^c$;

(ii) $(A \setminus B) \cap C = A \cap (C \setminus B)$;

- (iii) 若 $A \supset B$, 则 $A^c \subset B^c$;
 (iv) 若 $A \cap B = \emptyset$, 则 $B \subset A^c$;
 (v) $(A^c)^c = A$.

下一个定理说明, 求集合的余时, 交与并这两种运算在某种意义上有对偶性, 因此又称为对偶性定理, 它在化简集合的运算方面很有用.

定理 1.3 (De Morgan 法则) 任意个集合的并的余集, 等于它们每一个集合的余的交集; 任意个集合的交的余集, 等于它们每一个集合的余的并集, 即

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c; \quad \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c.$$

证明 仍然是证明等式左端和右端的两个集合互相包含. 先证明前一个等式.

若 $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c$, 则 $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. 因此对任意 $\alpha \in I$, 有 $x \notin A_\alpha$, 从而对任意 $\alpha \in I$, $x \in A_\alpha^c$, 而这就是说 $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$. 于是, $\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c \subset \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$. 反过来, 若 $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$, 则对任意 $\alpha \in I$, $x \in A_\alpha^c$, 故 $x \notin A_\alpha$ (对任意 $\alpha \in I$), 因而 $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, 于是 $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c$, 这就是说 $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c \subset \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c$. 正反两方面的证明合起来说明第一个式子成立.

第二个式子的证明留给读者作为练习. $\square$

例 5 利用德摩根 (De Morgan) 法则重新证明例 3.

证明 由于 f 是实值函数, 故

$$\begin{aligned} \{x \mid |f(x+0) - f(x-0)| > 0\} &= \{x \mid |f(x+0) - f(x-0)| = 0\}^c, \\ \{x \mid |f(x+0) - f(x-0)| \leq 1/k\} &= \{x \mid |f(x+0) - f(x-0)| > 1/k\}^c, \end{aligned}$$

从而由 De Morgan 法则,

$$\begin{aligned} J &= \{x \mid |f(x+0) - f(x-0)| = 0\}^c \\ &= \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \mid |f(x+0) - f(x-0)| \leq 1/k\} \right)^c \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \mid |f(x+0) - f(x-0)| > 1/k\}^c \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \mid |f(x+0) - f(x-0)| > 1/k\}. \quad \square \end{aligned}$$

下面引进集列的极限概念, 读者可以把它与数列 (特别是单调数列) 的极限进行类比, 会有助于理解和掌握.

定义 1.4 若集列 $\{A_k\}$ 满足