第一册

(初中一年级)

数学竞赛阶梯训练

浙江教育出版社

数学竞赛阶梯训练

第一册

（初中一年级）

浙江教育出版社

图书在版编目（C I P）数据

数学竞赛阶梯训练.第1册,初中一年级/岑申,王而冶主编.—杭州:浙江教育出版社,1999.1(2001.4重印)

ISBN 7-5338-3212-4

Ⅰ.数… Ⅱ.①岑…②王… Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第21393号

责任编辑:吴明华

封面设计:韩 波

数学竞赛阶梯训练

第一册

（初中一年级）

浙江教育出版社出版发行(杭州市体育场路347号 邮编310006)

诸暨报印刷厂印刷

开本787×1092 1/32 印张4.875 字数100000

1999年1月第1版 2001年4月第4次印刷

ISBN 7-5338-3212-4/G·3190 定价:5.00元

前　言

经验表明，学科竞赛活动，只要指导思想正确，有计划有组织地进行，对于促进教学工作，发现和培养优秀人才，提高教师的业务水平都有积极意义。

当前，我国基础教育战线正大力推进实施素质教育。在新的形势下，为使教育进一步适应经济、社会发展的需要，必须赋予素质教育更深刻的内涵，即把培养学生的创新意识和创造能力放在核心地位。在这方面，学科竞赛可以也应该发挥更好的作用。

这一套初中数学竞赛辅助用书，目的是为师生组织、参加全国及浙江省初中数学竞赛提供参考。编排体系大致与省编教材保持一致。知识内容一般不超越已学内容的范围，但在方法、能力上有所提高，在知识的实际应用方面略有加强，从而体现出在普及基础上提高的原则。为便于练习，每讲后都安排了一定量的“练习”，每章后又安排了一定量的“习题”，读者可根据自身实际，有选择地使用。全书共分四册，前三册分别供初一至初三各年级数学兴趣小组使用，第四册为综合性训练内容。

在强调学科竞赛的积极作用的同时，我们也不赞成把竞赛搞得过滥、过热，不赞成搞大运动量的强化训练。我们主张教师指导与学生自学相结合，科学合理安排竞赛数学的教学。

本书在 1999 年 1 月第 1 版出书后，受到了广大师生的热烈

欢迎，现又根据大家意见作了适当修改补充，更加突出了数学应用意识和创新能力的培养。

浙江省教育学会中学数学教学分会

2000 年 8 月

目　　录

第一章　数与一次方程

第一讲　巧　　算

要使计算正确而迅速，首先要掌握各种运算的算理，包括概念、法则、运算律和运算的一般顺序. 在具体计算时，要注意算式的特点，运用运算律适当更换运算次序，使计算简便. 平时练习中要不断归纳积累拆、拼、凑整、交换等运算技巧.

例 1　计算：91384×25.

解　原式$=91384\times(100\div4)$

$=91384\times100\div4$

$=2284600$.

注意　十进数的末尾是零或者几个零，会给运算带来方便，所以在乘法运算中常常可将因数 5，25，125，写成 $10\div2$，$100\div4$，$1000\div8$. 在除法运算中，除数是 5，25，125，则写成相应的形式.

例 2　计算：$-24\times9\dfrac{11}{12}-18\dfrac{6}{13}\div\left(-\dfrac{6}{13}\right)$.

分析　因为带分数的实质是整数和真分数的和，如能运用乘法分配律来改变运算顺序，会使运算简化.

解　原式$=-24\times\left(10-\dfrac{1}{12}\right)-\left(18+\dfrac{6}{13}\right)\times\left(-\dfrac{13}{6}\right)$

$=-240+2+39+1$

$=-198$.

例 3 计算：

$$\left|-\frac{177}{577}\right|+\left|\frac{177}{577}-\frac{119}{299}\right|-\left|-\frac{119}{299}\right|.$$

分析 如果将中间那个绝对值内部的差先算出来，再化去绝对值的符号，看来不是件轻松事，如果注意到算式中各分母的特点，先去掉绝对值符号，然后运用交换律和结合律就能使运算简便.

解 $\because \quad \frac{177}{577}<\frac{119}{299},$

$$\therefore \quad \left|-\frac{177}{577}\right|+\left|\frac{177}{577}-\frac{119}{299}\right|-\left|-\frac{119}{299}\right|$$
$$=\frac{177}{577}+\frac{119}{299}-\frac{177}{577}-\frac{119}{299}$$
$$=0.$$

例 4 计算：$1+2+3+\cdots+98+99+100.$

解 原式$=(1+100)+(2+99)+(3+98)+\cdots+(50+51)$

$$=\frac{(1+100)\times 100}{2}$$
$$=5050.$$

注意 这道题的各个加数之间有一个很特殊的关系，从小到大排列的加数，每一个数比后面相邻的一个数都小 1. 所以今后如果遇到有这种特征的和式，即将加数从小到大排列后，每两个相邻加数的差是同一个常数，我们都可以采用本题方法，将首项加末项，乘以项数再除以 2. 你能用上述方法计算下列各式吗？

(1) $11+13+15+17+19+21+23$；

(2) $(-3)+(-1)+1+3+\cdots+9+11.$

例 5 计算：$\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{9}{8}+\frac{17}{16}+\frac{33}{32}+\frac{65}{64}-7.$

解 原式$=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{4}\right)+\left(1+\frac{1}{8}\right)+\left(1+\frac{1}{16}\right)$

$+\left(1+\frac{1}{32}\right)+\left(1+\frac{1}{64}\right)-7$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+6-7$

$=\frac{32+16+8+4+2+1}{64}-1$

$=-\frac{1}{64}.$

例 6 计算：$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{1994\times1995}.$

解 原式$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$

$+\left(\frac{1}{1994}-\frac{1}{1995}\right)$

$=1-\frac{1}{1995}$

$=\frac{1994}{1995}.$

注意 例 6 运用了$\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. 更一般地还有$\frac{d}{n\times(n+d)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+d}$. 你能用上面的方法计算

$\frac{2}{12\times14}+\frac{2}{14\times16}+\frac{2}{16\times18}+\frac{2}{18\times20}+\frac{1}{20}$吗？

例 7 计算：$\frac{1}{1\times5}+\frac{1}{5\times9}+\frac{1}{9\times13}+\frac{1}{13\times17}+\frac{1}{17\times21}.$

分析 $\because\quad \frac{4}{1\times5}=\frac{1}{1}-\frac{1}{5},$

$\therefore\quad \frac{1}{1\times5}=\frac{1}{4}\times\frac{4}{1\times5}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5}\right),$

这样我们就找到了以下的分拆方法.

解 原式$=\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+$

$$\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{17}\right)+$$

$$\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{21}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\frac{1}{13}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{17}+\frac{1}{17}-\frac{1}{21}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{21}\right)$$

$$=\frac{5}{21}.$$

例 8 计算：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}$.

解 设$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}$，则

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^{11}},$$

两式相减得

$$\frac{1}{2}S=1-\frac{1}{2^{11}},$$

$\therefore\quad S=2-\frac{1}{2^{10}}=\frac{2047}{1024}$.

注意 这里把S乘以$\frac{1}{2}$，然后两式“错位”相减，就可以消去绝大多数的项，使计算得到简便，这种方法在巧算中有一定的典型性.

【练习】

1. $(-2)^{21}+(-2)^{22}$等于(　　)

(A) 2^{21}.　　(B) -2^{21}.　　(C) -2^{43}.　　(D) -1.

2. $26\times(-26)\times26\times(-26)\times26\times(-26)$的值是(　　)

(A) 308915772.　　(B) -308915776.

(C) 308915776.　　(D) -308915772.

3. 计算:$(\underbrace{333\cdots3}_{1998}\underbrace{11\cdots1}_{1998}-\underbrace{11\cdots1}_{1998}\underbrace{33\cdots3}_{1998})\div\underbrace{33\cdots3}_{1998}=$________.

4. $\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{8}=\frac{1}{(\quad)}-\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}-\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{8}=$________.

5. 计算:$17\div(-12)-82\div11+(-7)\div12+17\div(-11)$.

6. 计算:(1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$;

(2) $1-3+5-7+\cdots+1997-1999$.

7. 圆上有 2000 个点,经过两点画直线,一共可画几条?

第二讲　一次方程

利用等式的性质,通过去分母、去括号、移项、合并,最终可以将一元一次方程化成最简方程 $ax=b$. 对于最简方程 $ax=b$,就有以下三种可能:

(1) 当 $a\neq0$,方程有唯一解:$x=\frac{b}{a}$;

(2) 当 $a=0$,且 $b=0$ 时,方程的解为任何数;

(3) 当 $a=0$,且 $b\neq0$ 时,方程无解.

解多元一次方程组的基本途径是通过消元,将问题转化为解一元一次方程. 消元的基本方法有代入法和加减法.

例 1　当 $b=1$ 时，关于 x 的方程

$$a(3x-2)+b(2x-3)=8x-7$$

有无数多个解，则 a 等于(　　)

(A) 2.　　(B) -2.　　(C) $-\frac{2}{3}$.　　(D) 任何数.

分析　将 $b=1$ 代入原方程得：

$3ax-2a+2x-3=8x-7$，整理，得

$(3a-6)x=2a-4$.

因为方程有无数多个解，

所以 $3a-6=0$，且 $2a-4=0$，

$\therefore\quad a=2$.

所以应选 A.

例 2　方程 $|x+3|-|x-1|=2(x+1)$ 的实数解个数有

(　　)

(A) 1 个.　(B) 2 个.　(C) 3 个.　(D) 无数多个.

分析　要把原方程化简，就必须先去掉其中的绝对值符号. 由于 $x+3$ 与 $x-1$ 的正负是由 x 的取值范围确定的，因此要分以下三种情况讨论：

(1) 当 $x\leqslant -3$ 时，原方程变为 $-x-3+x-1=2x+2$，解得 $x=-3$，满足 $x\leqslant -3$ 的条件，所以 $x=-3$ 是原方程的解；

(2) 当 $-3<x\leqslant 1$ 时，原方程变为 $x+3-1+x=2x+2$，化简得 $(2-2)x=0$，所以满足 $-3<x\leqslant 1$ 的每一个 x 值都是方程的解；

(3) 当 $x>1$ 时，$x+3-x+1=2x+2$，$x=1$，不满足 $x>1$ 的条件，应予舍去.

综上所述，$-3\leqslant x\leqslant 1$ 的每一个值都是原方程的解，所以应选 D.

例 3 解方程 $116[1+3+5+\cdots+(2n-1)]$

$$=115(2+4+6+\cdots+2n)(n\text{ 为正整数}).$$

解 原方程即

$$\frac{(1+2n-1)n}{2}\times 116=\frac{(2+2n)n}{2}\times 115,$$

两边同除以 n（因为 $n\neq 0$），并化简整理，得

$$116n=115(1+n),$$

解得 $$n=115.$$

例 4 解关于 x 的方程

$$\frac{x-a-b}{c}+\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}=3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\neq 0\right).$$

解 原方程可化为

$$\left(\frac{x-a-b}{c}-1\right)+\left(\frac{x-b-c}{a}-1\right)+\left(\frac{x-a-c}{b}-1\right)=0,$$

整理得 $(x-a-b-c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0.$

$\because\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\neq 0,$

$\therefore\quad x=a+b+c.$

例 5 已知 m,n 是绝对值小于 4 的整数，方程组

$$\begin{cases}3x+my=5, & (1)\\ x+ny=4, & (2)\end{cases}$$

是否必定有唯一解？试说明理由.

解 (2)×3−(1)，得

$$3ny-my=7,$$

$$(3n-m)y=7.$$

若 $3n=m$，则方程无解，那么原方程组也无解；由已知得 n,m 都只能取 $-3,-2,-1,0,1,2,3$. 当 n 取 $-1,0,1$ 时，m 相应取 $3,0,3$ 时，$3n=m$ 成立，原方程组无解；除上述取值外原方程组

必定有唯一解.

例 6 求证:不论 m 为何数,关于 x,y 的方程 $2mx+x-3my+y+m-3=0$ 总有确定的解,并求出这个解.

解 原方程可化为:

$$(2x-3y+1)m+(x+y-3)=0, \qquad (*)$$

令 $\begin{cases}2x-3y+1=0,\\ x+y-3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\dfrac{8}{5},\\ y=\dfrac{7}{5}.\end{cases}$ 因为不论 m 为何值,将所得的解代入($*$)式,左边$=0$,即原方程的左边$=0$,所以不论 m 取何值,原方程总有确定的解,这个解是 $\begin{cases}x=\dfrac{8}{5},\\ y=\dfrac{7}{5}.\end{cases}$

注意 本题的解法中方程解的概念是推理的重要依据.

例 7 解方程组

$$\begin{cases}2x+y+z+u+v=6, & (1)\\ x+2y+z+u+v=12, & (2)\\ x+y+2z+u+v=24, & (3)\\ x+y+z+2u+v=48, & (4)\\ x+y+z+u+2v=96. & (5)\end{cases}$$

分析 观察各方程左边的各项系数特征,不难发现,如果把 5 个方程两边分别相加,就得

$$6(x+y+z+u+v)=186,$$

$$\therefore \quad x+y+z+u+v=31. \qquad (6)$$

再如果把(1)式减去(6)式,就得 $x=-25$,

类似地可得 $y=-19,z=-7,u=17,v=65$.

解略.

例 8 已知 n 是偶数,m 是奇数,方程组:$\begin{cases}x-1998y=n,\\11x+27y=m\end{cases}$ 的解 $\begin{cases}x=p,\\y=q\end{cases}$ 为整数.试判断 p,q 的奇偶性.

解 由已知,得 $\begin{cases}p-1998q=n,\\11p+27q=m.\end{cases}$

$\because$ p,q 是整数,

$\therefore$ $1998q$ 是偶数,由 $p-1998q=n$ 得 $p=1998q+n$,

又$\because$ n 是偶数,可知 $1998q+n$ 是偶数,

$\therefore$ p 是偶数.

又由 $11p+27q=m$ 得 $27q=m-11p$.

$\because$ p 是偶数,

$\therefore$ $11p$ 是偶数,

又$\because$ m 是奇数,可知,$m-11p$ 是奇数,

$\therefore$ $27q$ 是奇数,q 是奇数.

【练习】

1. 关于 x 的方程 $b(x-b)-c(x-c)=0$ 有唯一解时,b,c 应满足(　　)

   (A) $b\neq0,c\neq0$.　　(B) $b=0,c\neq0$.

   (C) $b\neq0,c=0$.　　(D) $b\neq c$.

2. $2x-4x+6x-8x+10x-12x+\cdots-2000x$
   $=-x+3x-5x+\cdots+1999x-6002$ 的解是(　　)

   (A) 1.　(B) -1.　(C) 3.001.　(D) -3.001.

3. 使方程组 $\begin{cases}kx+y=k,\\x+2y=1\end{cases}$ 有无数解的 k 值是________.

4. 方程 $|2-|2x-2||=2$ 的解是________.

5. 已知 $(x+y-1)^2+|2x-y+4|=0$,求 x,y 的值.

6. 甲、乙两同学解方程组$\begin{cases}ax+by=2,\\ cx-3y=-2.\end{cases}$甲得正确解答$\begin{cases}x=1,\\ y=-1.\end{cases}$乙只因抄错 c 值，解得$\begin{cases}x=2,\\ y=6.\end{cases}$试求$\frac{a}{b}-ac$的值.

7. 求方程 $x+3-2k=k(x-2)$（k 为整数）的正整数解.

第三讲　列方程(组)解应用题

列方程（组）解应用题，首先要搞清问题中有哪些量，哪些是已知的，哪些是未知的，各量之间有怎样的数量关系. 找出未知与已知的等量关系则是列方程（组）解应用题的关键所在. 对于较复杂的应用题，我们还可以用图示、列表等方法来分析数量关系.

例 1　一人步行从甲地去乙地，第一天行若干千米，自第二天起，每一天都比前一天多走同样的路程，这样 10 天可以到达乙地. 如果每天都以第一天的速度步行，用 15 天可以到达乙地；如果每天都以第一种走法的最后一天的速度步行到达乙地需要的天数是(　　)

(A) 8 天. (B) 12 天.　(C) 7.5 天.　(D) 10 天.

解　设第一天的速度为 x 千米/天，每一天比前一天多走路程为 y 千米.

依题意有：

$$15x=x+(x+y)+(x+2y)+\cdots+(x+9y).$$

解得 $x=9y$.

用第一种走法最后一天速度步行所需天数是：

$$\frac{15x}{x+9y}=\frac{15x}{2x}=7.5(\text{天}),$$

所以应选 C.