巧思巧解

QIAOSIQIAOJIE

数学

高中二年级

(下)

广西教育出版社

巧思巧解

QIAOSIQIAOJIE

数学

高中二年级（下）

廖永康
李祖兴 编著

广西教育出版社

巧思巧解丛书

数 学

高中二年级(下)

廖永康 李祖兴 编著

☆

广西教育出版社出版

南宁市鲤湾路8号

邮政编码:530022 电话:0771－5865797

本社网址 http://www.gep.com.cn

读者电子信箱 master@gep.com.cn

全国新华书店经销 广西民族印刷厂印刷

*

开本 890×1240 1/32 6.375 印张 152 千字

2005年9月第1版 2005年9月第1次印刷

印数:1－5 000 册

ISBN 7-5435-4116-5/G·3268 定价:12.00 元

前言

由于数学概念、公式、定理的高度抽象性，常用的数学方法的概括性与普遍性，数与数、形与形、数与形之间的相互联系，以及中学数学知识、技能具有的基础特点，决定了中学中大量数学问题的解法不是惟一的，这就使数学题的一题多解成为可能.

一题多解的实现，依赖于解题者对基础知识的掌握程度和解题能力的强弱，依赖于解题者一系列分析、综合的思维活动能力.因此，对一题多解在数学教学中的作用的研究和有效地实施就显得很必要了.实践证明，适时地把一题多解引入数学教学过程，符合教育规律，对推进素质教育必定能起到积极的作用.

在长期的教学实践中，我们搜集了许多中学数学题的一题多解的范例.现根据新课标和教材的要求，精选与高中二年级数学有关的一些范例和练习，编成这本书奉献给广大读者.希望它能成为中学生和自学青年加深学习的良师益友，成为中学教师指导学生学习的重要参考资料.

本书紧扣新课标与现行教材的教学内容，通过精选的范例介绍典型常规的解题方法和某种特殊方法.解题时注重挖掘问题的本质，以中学常用的数学思想为指导，从多侧面、多角度探求解题思路，提高读者的解题能力.题后还附有简评，比较各种解法的优劣，并总结一定的规律.每单元后的练习题虽提供了两种以上的参考解法，望大家再琢磨出更多的好解法，更好地提高自己的解题能力.

热诚欢迎广大读者对本书提出宝贵的意见.

编著者

2005 年 2 月

目录

一、空间直线和平面

（一）平面

1. 若一条直线与三条平行直线都相交，则这四条直线在同一个平面内.

已知：如图1，$a/\!/b/\!/c$，且 $d\cap a=A$，$d\cap b=B$，$d\cap c=C$.

求证：直线 a、b、c、d 在同一个平面内.

思路1 要证 d 与 a、b、c 共面，可先证 d 与 a、b 共面. 因为 $a/\!/b$，可由 a、b 确定一个平面，设为 α. 由 d 与 a、b 相交可证 d 在 α 内. 为证 a、b、d 与 c 共面，可由 $b/\!/c$ 确定平面 β，然后证平面 α 与 β 重合，这需要运用确定平面的公理，即设法证明两相交直线 b 与 d 既在 α 上又在 β 上.

证法1 如图1，$\because$ $a/\!/b$，

$\therefore$ 可过 a、b 作平面 α.

$\because$ a、b 与 d 分别交于 A、B，即 d 上有两点 A、B 在 α 内，

$\therefore$ d 也在 α 内.

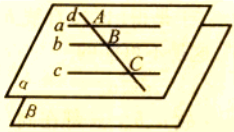

图1

又$\because$ $b/\!/c$，$\therefore$ 可过 b、c 作平面 β.

$\because$ b、c 与 d 分别交于 B、C，即 d 上有两点 B、C 在 β 内，

$\therefore$ d 也在 β 内.

于是，相交直线 b 与 d 在 α 内，又在 β 内. 而根据公理，过两条相交直线有且只有一个平面.

$\therefore$ 平面 β 与 α 重合.

因此，直线 a、b、c、d 都在同一个平面 α 内.

注 要证 d 与 a、b、c 共面，可先证 d 与 a、b 共面．还有另一种思路是：因为 $a /\!/ b$，所以由 a 与 b 可确定一个平面 α；又因为 $d \cap a = A$，所以由 a 与 d 又可确定一个平面 β. 在运用确定平面的公理时，利用直线 a 与 a 外一点 B 在 α 内，同时又在 β 内，也可说明 α 与 β 重合．同理可证平行线 b 与 c 确定的平面 γ 也可与 α 重合，于是得证.

思路 2 同证法 1，先证得 d 在由 a、b 确定的平面 α 内．接下去，采用反证法证明 c 也在 α 内.

证法 2 如图 2.

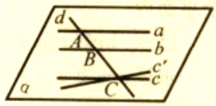

图 2

$\because$ $a /\!/ b$，

$\therefore$ a、b 确定一个平面，设为 α.

$\because$ $A \in a$，$B \in b$，

$\therefore$ $A \in \alpha$，$B \in \alpha$.

$\because$ 直线 $AB \subset \alpha$，即 $d \subset \alpha$.

假设直线 c 不在 α 内，即 $c \not\subset \alpha$，

$\because$ $C \in d$，即 $C \in \alpha$，

$\therefore$ 过点 C 在 α 内可作直线 $c' /\!/ b$.

于是得出"过直线 b 外一点 C 能作两条直线 c 与 c' 都平行于 b"，这是不可能的.

$\therefore$ $c \subset \alpha$.

故 a、b、c、d 都在同一个平面 α 内.

思路 3 在由相交直线 a 与 d 确定平面 α 后，可考虑逐一证明直线 b、c 都在平面 α 内．要证直线 b 在 α 内，可用同一法，即过交点 B，在平面 α 内作直线 b'，使 $b' /\!/ a$，再证明 b' 与 b 重合.

证法 3 如图 3，过相交直线 a 与 d 作一个平面 α．在平面 α 内，过 b、d 的交点 B 作直线 b'，使 $b' /\!/ a$.

由于已知直线 b 也过 B 且平行于 a.

根据平行公理，经过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行，

$\therefore$ 直线 b' 与 b 重合，

即 b 在平面 α 内.

又 $c \cap d = C$，且 $c /\!/ b /\!/ a$，

同理可证，c 也在平面 α 内.

故直线 a、b、c、d 都在同一平面 α 内.

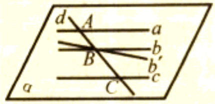

图 3

证诸直线共面的问题时，本例的三种证法都是有代表性的．证法 1 为证明平面重合的方法，根据确定平面的公理可知，若两条相交直线都在平面 α 内，又在平面 β 内，则 α 与 β 重合．依据这些公理还有：若一条直线和此直线外的一点都在平面 α 内，又在平面 β 内，则 α 与 β 重合；若不在一条直线上的三点都在平面 α 内，又在平面 β 内，则 α 与 β 重合.

证法 2 和证法 3 是先由两条平行（或相交）直线确定一个平面，然后证明其余的直线也在此平面内，为此，它们分别采用了反证法和同一法.

反证法和同一法均属间接证法．证明有些命题，用直接证法不易证明时，可用间接证法．反证法证题的一般步骤是：①假设结论的反面成立；②据理推出矛盾的结论（如与题设矛盾，或与定义、公理、定理矛盾，或自相矛盾等等）；③断定结论的反面错误；④断定结论的正面正确．同一法则是先作出一个与题目要求证明的结论相同的图形，然后再证明图形与题设的图形完全一致，从而达到证明的目的.

2. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，C_1D_1、D_1D、DA、AB、BB_1、B_1C_1 的中点分别为 P、Q、R、L、M、N，试证明 P、Q、R、L、M、N 在同一平面内.

思路 1 由于经过平面外一点有且只有一个平面与已知平面平行，若能证得 LP、RN、MQ 都相交于长方体的中心 O，而且这些相交线确定的平面既过此点 O，又与某平面(如平面 BC_1D)平行，即可证得题设的六点共面.

证法 1 如图 4，设长方体的中心为 O，则 O 是长方体对角线 AC_1 的中点.

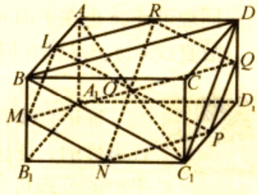

图 4

$\because$ $AL \mathrel{\underline{\parallel}} C_1P$,

$\therefore$ 四边形 ALC_1P 为平行四边形，且对角线 AC_1、LP 交于长方体的中心 O.

同理，由 $AR \mathrel{\underline{\parallel}} C_1N$ 知，RN 与 AC_1 交于 O；由 $MN \mathrel{\underline{\parallel}} RQ$ 知，MQ 与 RN 交于 O，

即 MQ、LP、RN 都过长方体中心 O.

连结 BC_1、C_1D、BD.

$\because$ $LR /\!/ BD$, $MN /\!/ BC_1$, $PQ /\!/ C_1D$,

$\therefore$ 相交线 MQ、LP、RN 两两确定的平面通过中心 O，而且和平面 BC_1D 平行.

故 MQ、LP、RN 在同一平面内，

即 P、Q、R、L、M、N 在同一平面内.

思路 2 根据“若一条直线与两条以上的平行线都相交，则这些直线都在同一平面内”，可考虑证明 LP 与三条平行线 LR、MQ、NP 都相交，则可证得题设的六点在同一平面内.

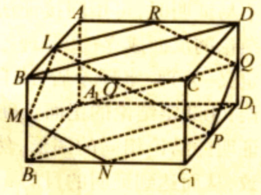

图 5

证法 2 如图 5，连结 MQ、LP 及 BD、B_1D_1.

$\because$ $LR /\!/ BD, BD /\!/ MQ$,

又 $NP /\!/ B_1D_1, B_1D_1 /\!/ MQ$,

$\therefore$ $LR /\!/ MQ /\!/ NP$.

同理可证 $LM /\!/ QP$.

又 $LM = \frac{1}{2}AB_1 = \frac{1}{2}DC_1 = QP$,

$\therefore$ 四边形 $MPQL$ 为平行四边形,对角线 LP 与 MQ 相交于 O.

由 LP 与三条平行线 LR、MQ、NP 都相交,得知这四条直线在同一平面内,

故 P、Q、R、L、M、N 在同一平面内.

思路 3 根据两平行线确定一个平面和不在同一直线上的三点确定一个平面,可以先证题设的六点中的若干点分别在两个平面内,然后证这两个平面重合.

证法 3 如图 6.

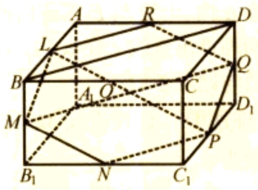

图 6

$\because$ $LR /\!/ BD, BD /\!/ MQ$,

$\therefore$ $LR /\!/ MQ$,

于是 LR 与 MQ 确定一个平面 α.

同理可证 $RQ /\!/ LP$,

$\therefore$ RQ 与 LR 确定一个平面 β.

而不在同一直线上的三点 L、R、Q 既在 α 上也在 β 上,

$\therefore$ 平面 α 与 β 重合.

即点 M、L、R、Q、P 都在 α 内.

同理可证 N 也在平面 α 内.

故 P、Q、R、L、M、N 在同一平面内.

证法 1 运用了两平行平面的关系，证法 2 运用了直线与平行线相交的关系，而证法 3 只运用确定平面的公理．显然，证法 3 较简捷．类似以上的重合法是证明点共线、共面或线共面的常用方法．

（二）空间直线

3. 如图 7，已知不共面的三条直线 a、b、c 都过 O 点，点 A、B、E、F 均不同于 O，且 $A\in a$，$B\in a$，$E\in b$，$F\in c$. 求证：直线 AE 与 BF 为异面直线.

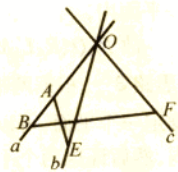

图 7

思路 1 本题宜采用反证法．假设 AE 与 BF 都在平面 α 内，则由 A、B 在 α 内可推得 O 在 α 内，由 O 与 E 在 α 内推得直线 b 在 α 内．同理推出直线 c 在 α 内，从而 a、b、c 共面，导致与题设矛盾.

证法 1 假设直线 AE 与 BF 不是异面直线，则它们共面，设这平面为 α.

$\because$ $A\in\alpha$，$B\in\alpha$，且 $A\in a$，$B\in a$，

$\therefore$ $a\subset\alpha$.

$\because$ $O\in a$，$\therefore$ $O\in\alpha$.

又 $E\in\alpha$，且 $O\in b$，$E\in b$，

$\therefore$ $b\subset\alpha$.

同理 $c\subset\alpha$.

于是 a、b、c 在同一平面 α 内，这与题设“a、b、c 不共面”矛盾.

$\therefore$ AE 与 BF 是异面直线.

思路 2 假设 AE 与 BF 都在平面 α 内．由 a、b 相交，确定平面 β，由 a、c 相交，确定平面 γ. 再证明 α、β、γ 重合，导致 a、b、c 共面，

引出矛盾，即可反证 AE 与 BF 是异面直线.

证法2 假设 AE 与 BF 不是异面直线，则它们共面，设这个平面为 α.

$\because$ $a\cap b=O$，

$\therefore$ 过 a 与 b 确定一个平面 β.

$\because$ $A、B、E\in\alpha$，

又 $A、B、E\in\beta$，

而经过不在同一直线上的三点，有且只有一个平面，所以 α 与 β 重合，即 $b\subset\alpha$.

同理可证，由 a 与 c 确定的平面与 α 重合，即 $c\subset\alpha$.

于是 $a、b、c$ 都在 α 内，这与题设"$a、b、c$ 不共面"矛盾.

$\therefore$ AE 与 BF 是异面直线.

思路3 证明两直线为异面直线，还可利用异面直线判定定理：过平面外一点与平面内一点的直线，和平面内不经过该点的直线是异面直线．此时，需先由其中两条相交直线确定一个平面.

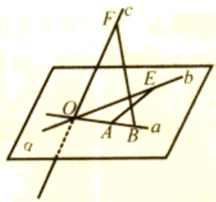

图 8

证法3 如图 8，设由两相交直线 $a、b$ 确定的平面为 α. 根据题意，$A、B$ 为在 α 上不同的两点，所以 $A、B\in\alpha$.

又 $E\in b$，$\therefore$ 直线 $AE\subset\alpha$.

而 $F\notin\alpha$，$B\notin AE$，

因此 BF 为过 α 外一点 F 及 α 内一点 B 的直线，

$\therefore$ 直线 AE 与 BF 为异面直线.

注 上述"异面直线判定定理"的证明如下：如图 9，设 $a\subset\alpha$，$A\notin\alpha$，$B\in\alpha$，$B\notin a$.

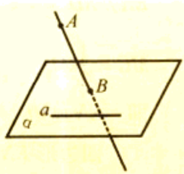

图 9

假设直线 AB 与 a 不是异面直线，则它

们在同一个平面 β 内，那么 $B\in\beta$，$a\subset\beta$. 因为 $B\notin a$，而经过点 B 与直线 a 只能有一个平面，所以 α 与 β 重合，于是直线 $AB\subset\alpha$，得知 $A\in\alpha$，这与已知 $A\notin\alpha$ 矛盾. 故直线 AB 和 a 是异面直线.

前两种证法都是用反证法，但具体推理过程不同，证法 1 运用了公理：如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内；证法 2 运用的是公理：经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面，以及它的推论；证法 3 运用有关的判定定理，这就必须把题设的条件对应转化到定理的前提条件来解决.

4. 在空间四边形 $ABCD$ 中，M、N 分别是 AC、BD 的中点，且 MN 为 AC、BD 的公垂线，求证：$AD=BC$，$AB=CD$.

思路 1 $ABCD$ 是空间四边形，说明 AB 与 CD 是异面直线，AC 与 BD 也是异面直线. 解决有关异面直线的问题，经常是采用平移的方法，把一些重要的几何元素（如线段、角……）集中到平面图形中进行研究. 鉴于本题提供有线段的中点，则可以运用三角形的中位线的知识来解决.

证法 1 如图 10，设 E、F、G 分别为 AB、BC、CD 的中点，连结 EM、MG、EN、NG、EF、FG、EG，则有

$$EN /\!/ AD, EN=\frac{1}{2}AD, MG /\!/ AD,$$

$$MG=\frac{1}{2}AD,$$

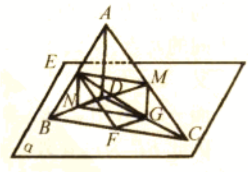

图 10

即 $EN \underline{/\!/} MG$，

$\therefore$ 四边形 $ENGM$ 是平行四边形.

又 $EF /\!/ AC$，$FG /\!/ BD$，$MN\perp BD$，$MN\perp AC$，

$\therefore$ $MN\perp EF$，$MN\perp FG$，

从而 $MN\perp$ 平面 EFG.

$\therefore\quad MN\perp EG$.

因此,四边形 $ENGM$ 是菱形.

$\therefore\quad MG=NG$.

而 $\quad AD=2MG, BC=2NG$,

$\therefore\quad AD=BC$.

取 AD 的中点 H,同理可证四边形 $HNFM$ 为菱形,$MF=NF$,

于是 $AB=CD$.

思路2 由于本题的条件涉及线段的中点,故也可以把问题转化为三角形的中线问题.

证法2 如图11,连结 AN、NC、BM、MD.

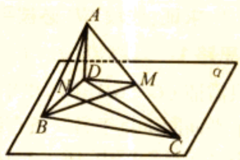

图11

$\because\quad AM=MC, MN\perp AC$,

$\therefore\quad AN=NC$.

$\because\quad BN=ND, MN\perp BD$,

$\therefore\quad MB=MD$.

设 $AB=a, BC=b, CD=c, AD=d$,

则在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle CBD$ 中,由中线长公式,得

$4AN^2=2(a^2+d^2)-BD^2$,

$4CN^2=2(b^2+c^2)-BD^2$.

以上两式相减,得 $\quad a^2+d^2=b^2+c^2$. ①

同理,在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$ 中,可得

$$a^2+b^2=c^2+d^2. \quad ②$$

①-②,得 $d^2-b^2=b^2-d^2$,即 $b^2=d^2$,

$\therefore\quad b=d$,

代入①式,得 $\quad a=c$.

即 $AD=BC, AB=CD$.

利用平移的方法解决有关异面直线的问题，是常用的方法．本题由于提供了线段中点的条件，这就为运用三角形的中位线来促成线的平移带来了方便，同时，也达到了证明线段相等的目的．由此看来，证法1是具有典型性的．证法2是基于三角形中线长的定理，方法较特殊.

5. **如图12，直线 AB 是异面直线 a 和 b 的公垂线，垂足为 A 与 B. β 是过 AB 中点 H 且与 AB 垂直的平面（即线段 AB 的中垂面）．在 b 上任取一点 C，在 a 上任取一点 D，连结 CD. 求证：线段 CD 必被平面 β 所平分.**

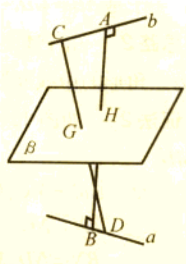

图 12

思路1 设 $CD\cap\beta=G$. 要证 CD 被 β 平分，只需证 $CG=GD$. 因为“平面外一条直线与这个平面同垂直于另一条直线，则这条直线与这个平面平行”，由 $AB\perp\beta$，$AB\perp a$，可得 $a/\!/\beta$. 过 a 可作平面 $\gamma/\!/\beta$. 又知 $b/\!/\beta$，所以可将 AB 平移使之过 C，即过 C 作 $CF/\!/AB$，设分别交 β、γ 于 E、F（图13）．则 $CE=EF$. 由此便可在 CF、CD 确定的平面内证 $CG=GD$.

证法1 如图13，$\because$ $AB\perp\beta$，$AB\perp a$，

$\therefore$ $a/\!/\beta$.

过 a 过平面 $\gamma/\!/\beta$，过 C 作 $CF/\!/AB$，分别交 β、γ 于 E、F. 又过 CF 和 CD 作平面 CDF，设与平面 β、γ 的交线分别为 EG 和 FD，则 $EG/\!/FD$.

$\therefore$ $\triangle CEG\backsim\triangle CFD$.

有 $\dfrac{CE}{EF}=\dfrac{CG}{GD}$.

$\because$ $AB\perp\beta$，$AB\perp b$，$\therefore$ $b/\!/\beta$.

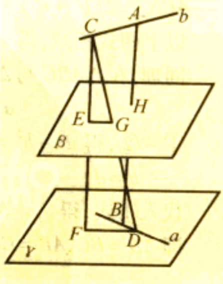

图 13

又 $\beta /\!/ \gamma$，∴ $AH = CE$，$HB = EF$.

而 $AH = HB$，∴ $CE = EF$.

故 $CG = GD$，即 CD 被平面 β 所平分.

思路 2 设 $CD \cap \beta = G$，要证 CD 被 β 平分，需证 $CG = GD$. 若过 C 作 $CE \perp \beta$ 于 E，过 D 作 $DF \perp \beta$ 于 F（图 14），则 $CE /\!/ DF$，而且可证 $CE = DF$. 过 CE 和 DF 作平面，知 G 点在交线 EF 上，于是可设法证 $\triangle CEG \cong \triangle DFG$，从而导出 $CG = GD$.

证法 2 如图 14，过 C 作 $CE \perp \beta$ 于 E，过 D 作 $DF \perp \beta$ 于 F，则 $CE /\!/ DF$.

过 CE 和 DF 作平面与平面 β 相交于 EGF.

∵ $AB \perp a$，$AB \perp b$，且 $AB \perp \beta$，

∴ $a /\!/ \beta$，$b /\!/ \beta$.

∵ $CE = AH$，$DF = HB$，且 $AH = HB$，

∴ $CE = DF$.

又 $\angle CGE = \angle FGD$，

∴ $\mathrm{Rt}\triangle CEG \cong \mathrm{Rt}\triangle DFG$.

故 $CG = GD$，即 CD 被平面 β 所平分.

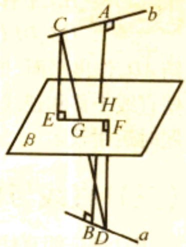

图 14

思路 3 由于 AB 与 CD 不共面，若连结 AD、CD，则可过 AB 和 AD 作平面，过 AD 和 CD 作平面，再利用 $a /\!/ \beta$ 和 $b /\!/ \beta$ 的关系，将 $AH = HB$ 通过两平面的交线 AD 转换为 $CG = GD$.

证法 3 如图 15，连结 AD，交平面 β 于 F. 过 AB 和 AD 作平面交 β 于 HF；过 AD 和 CD 作平面交 β 于 GF.

∵ $AD \perp a$，$AB \perp b$，且 $AB \perp \beta$，

∴ $a /\!/ \beta$，$b /\!/ \beta$.

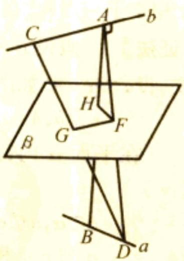

图 15