高等学校教材

高等数学

上册

南京理工大学应用数学系　编

高等教育出版社

高等学校教材

高等数学

上册

南京理工大学应用数学系 编

高等教育出版社

内容简介

本书分上、下两册出版. 上册主要内容包括函数、极限、函数的连续性,一元函数微分学及其应用,一元函数积分学及其应用;下册主要内容包括向量代数与空间解析几何,多元函数微分法及其应用,重积分及其应用,曲线积分与曲面积分,无穷级数,微分方程.

本书注重数学概念的几何直观表述,图文并茂,叙述详尽,说理透彻,通俗易懂。书中所选例题、习题覆盖面广,具有代表性。

本书可作为高等工科院校理工科各专业本科生的教材,也可供工程技术人员学习参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 . 上册/南京理工大学应用数学系编. —北京:高等教育出版社,2004.8

ISBN 7—04—014388—7

Ⅰ.高... Ⅱ.南... Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第049161号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	北京大容彩色印刷有限公司		
开　　本	787 × 960　1/16	版　　次	2004年8月第1版
印　　张	24	印　　次	2004年9月第2次印刷
字　　数	450 000	定　　价	26.60元

物料号：14388-00

前　言

本书是为适应21世纪数学教学的需要，按照教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的精神，在南京理工大学1997年出版使用的《高等数学教程》的基础上修订而成的。本书凝结了编者多年教学实践经验和体会，同时吸收了国内外现行的有特色教材的优点。

本书强调将基础知识的学习、数学思想方法的学习以及数学素质的培养融为一体。注重数学概念的几何直观表述，图文并茂，叙述详尽，说理透彻，通俗易懂。书中所选例题、习题覆盖面广，具有代表性。每节均配有习题，书末附有习题答案。凡超过“高等数学课程教学基本要求”的内容都用 * 标明。

本书分上、下两册出版。上册主要内容是函数、极限、函数的连续性，一元函数微分学及其应用，一元函数积分学及其应用；下册内容有向量代数与空间解析几何，多元函数微分法及其应用，重积分及其应用，曲线积分与曲面积分，无穷级数，微分方程。

本书共分十二章。全书由杨孝平教授主持编写和审阅，参加编写工作的有许春根（第一章），王为群（第二、三章），尹群（第四、五、六章），吴新民（第七、八章），刘德钦（第九、十章），俞军（第十一、十二章），陆毓麒教授也审阅了全书的书稿。感谢南京理工大学应用数学系的教师，他们对本书的编写提出了宝贵的意见和建议。特别感谢主审人陆毓麒教授和杨孝平教授，他们对书稿进行了认真细致的审查，提高了本书的质量。本书的出版得到了南京理工大学教务处的关心和资助，得到了高等教育出版社王瑜和李陶编辑的大力支持，在此谨向他们致以谢意。

由于编者水平有限，书中错误与不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编　者

2004年1月

目　　录

第一章　函数　极限　连续

中学所学过的数学习惯上称之为初等数学，也是人类 17 世纪以前所认知的数学，研究的数基本上是常数或常量，研究的形是孤立的、不变的规则几何形体，研究常量间的代数运算和不同几何形体内部及相互间的关系. 到了 17 世纪，人们开始研究的数是变数或变量，研究的形是不规则的几何形体，而且数和形开始紧密地联系起来. 此时，由英国科学家牛顿(Newton)和德国科学家莱布尼茨(Leibniz)各自独立地创立了微积分. 微积分的创立是人类对自然界认识的一大飞跃，是数学发展中的一个转折点. 微积分是高等数学课程的主要研究内容，函数是微积分的主要研究对象，极限理论是微积分的基础. 本章将介绍映射、函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质.

第一节　映射与函数

一、集合和映射

1. 集合

集合是数学中的一个基本概念，一般地，所谓集合(或集)是指具有某种特定性质的事物的全体. 组成这个集合的事物称为该集合的元素.

通常用大写字母 $A, B, X, Y, \cdots$ 表示集合，用小写字母 $a, b, x, y, \cdots$ 表示元素. 若事物 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a \in A$；若事物 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a \notin A$，或 $a \overline{\in} A$. 含有有限多个元素的集合称为有限集，不是有限集的集合称为无限集.

表示集合的方法通常有两种，一种是列举法. 例如，若记 $\mathbf{N}$ 为全体自然数的集合，则 $\mathbf{N}$ 可以表示为

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}.$$

另一种是描述法. 例如，如果集合 A 是由具有某种特性 P 的元素 x 的全体所组成的，则可表示为

$$A = \{x \mid x \text{具有特性} P\}.$$

如集合 $A=\{x \mid x^2-1=0\}$，表示方程 $x^2-1=0$ 的全体实数根所组成的集合. 本教材所用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合，如果没有特别声明，所涉及到的数均是实数.

全体自然数所成的集合记为 $\mathbf{N}$；全体整数所成的集合记作 $\mathbf{Z}$；全体有理数所成的集合记作 $\mathbf{Q}$；全体实数所成的集合记作 $\mathbf{R}$. $\mathbf{N}_+$ 表示全体正整数的集合，$\mathbf{R}_+$ 表示正实数集.

下面介绍关于集合的几个常用概念.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$），读作 A 包含于 B（或 B 包含 A）. 显然 $A\subseteq A$. 如果 $A\subseteq B$ 且 B 中确有不属于 A 的元素，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$. 例如：$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$.

如果 $A\subseteq B$ 且 $B\supseteq A$，此时两集合 A、B 由相同的元素组成，称 A 等于 B（或 B 等于 A），记作 $A=B$（或 $B=A$）.

不含有任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$. 例如，集合 $E=\{x \mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x^2+1=0\}$ 是一个空集. 规定空集是任意集合的子集，即对任意集合 A，有 $\varnothing\subseteq A$.

由两个集合 A 与 B 中的所有元素（相重的只取一次）所组成的集合称为 A、B 的并集，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$；由两个集合 A 与 B 中的所有公共元素组成的集合称为 A、B 的交集，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$. 由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的差集（简称差），记作 $A\backslash B$，$A\backslash B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$. 有时，我们研究某个问题限定在一个大的集合 I 中进行，所研究的其他集合 A 都是 I 的子集，此时，我们称 I 为全集或基本集，称 $I\backslash A$ 为 A 的余集或补集，记作 A^c.

在两个集合之间还可以定义直积（又称笛卡儿(Descartes)乘积）. 设 A、B 是任意两个集合，在集合 A 中任意取一个元素 x，在集合 B 中任意取一个元素 y，组成一个有序对 (x, y)，把这样的有序对作为新的元素，它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的直积，记为 $A\times B$，即

$$\boxed{A\times B=\{(x, y) \mid x\in A \text{ 且 } y\in B\}.}$$

例如，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x, y) \mid x\in\mathbf{R}$ 且 $y\in\mathbf{R}\}$，即为平面直角坐标平面 xOy 面上全体点的集合，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

2. 实数集

实数集 $\mathbf{R}$ 是“高等数学”课程研究的基本数集. 实数的完备性是极限理论的基础，我们仅从几何直观来简要地说明什么是实数的完备性.

有理数集是实数集的一个子集.有理数的一个重要特性是它的稠密性,即任意两个不相等的有理数之间必存在一个有理数.事实上,设 r_1 与 r_2 是两个不同的有理数,不难证明,$\dfrac{r_1+r_2}{2}$ 就是介于 r_1 与 r_2 之间的一个有理数.由此可见,任意两个有理数之间必有无穷多个有理数.在数轴上来表示,就是任何两个有理数点之间必定含有无穷多个有理数点.有理数点在坐标轴上的分布是处处稠密的,但是,数轴上的点并不都是有理数点,还有无理数点.例如,在数轴上,O 为原点,

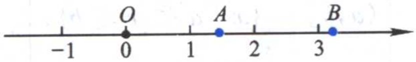


图 1.1

A、B 为数轴上的两点(如图 1.1).其中 OA 的长度为单位正方形的对角线长度,OB 的长度为单位圆的周长的一半,则 A、B 两点就不是有理数点,而是无理数点.有理数点并未布满整个数轴,还有很多无理数点,而实数布满了整个坐标轴,也就是说,实数集和数轴上的所有点是一一对应的.实数的这个特性称为实数的连续性或完备性,而有理数集不能与数轴上的所有点一一对应,因此,有理数是不完备的.

定义 1　设 A 为一非空数集,若存在 $L\in\mathbf{R}$,使得对任意 $x\in A$,都有 $x\leqslant L$,则称 A 有上界(或上有界),称 L 为 A 的一个上界.若存在 $l\in\mathbf{R}$,使得对任意 $x\in A$,都有 $x\geqslant l$,则称 A 有下界(或下有界),称 l 为 A 的一个下界.若 A 既有上界又有下界,则称 A 有界,否则,称 A 无界.

***定义 2**　设 A 为一非空数集,若存在 A 的一个上界 s,使得对 A 的任何上界 L,都有 $s\leqslant L$,则称 s 为 A 的上确界,记作 $\sup A$.若存在 A 的一个下界 i,使得对 A 的任何下界 l,都有 $i\geqslant l$,则称 i 为 A 的下确界,记作 $\inf A$.

由上述定义可知,任何一个有上界(下界)的数集都有无穷多个上界(下界).上确界是所有上界中最小的,下确界是所有下界中最大的,我们不加证明地给出下列确界存在定理.

***定理 1**　任一有上(下)界的非空实数集 A 必有上(下)确界.

确界存在定理仅对实数集成立,在有理数集中不成立,实数集的确界存在定理是区别实数集和有理数集的本质属性,它是实数完备性的一种表现.

常用的实数集合有区间、邻域、去心邻域.设 a、b 是两个实数,且 $a<b$,满足不等式 $a<x<b$ 的全体实数 x 所组成的集合叫做以 a、b 为端点的开区间,记作 (a,b),即

$$\boxed{(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.}$$

满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的全体实数 x 所组成的集合称为以 a、b 为端点的闭区间，记作$[a,b]$，即

$$\boxed{[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.}$$

同样，数集 $\{x \mid a < x \leqslant b\}$ 或$\{x \mid a \leqslant x < b\}$ 称为半开区间，分别记作$(a,b]$或$[a,b)$，即

$$\boxed{\begin{aligned}(a,b] &= \{x \mid a < x \leqslant b\};\\ [a,b) &= \{x \mid a \leqslant x < b\}.\end{aligned}}$$

上述各种区间是有限区间，a,b 分别称为区间的左端点、右端点；数 $b-a$ 称为区间的长度. 除了上述有限区间外，常常还遇到下述的无穷区间. 满足不等式 $-\infty < x < +\infty$ 的所有实数 x 的集合称为无穷区间，记作

$$\boxed{(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty < x < +\infty\}.}$$

类似地有下述半无穷区间：

$$\boxed{\begin{aligned}(a,+\infty) &= \{x \mid a < x < +\infty\};\\ [a,+\infty) &= \{x \mid a \leqslant x < +\infty\};\\ (-\infty,b) &= \{x \mid -\infty < x < b\};\\ (-\infty,b] &= \{x \mid -\infty < x \leqslant b\}.\end{aligned}}$$

邻域也是一种常用的集合. 设 a 是任一实数，δ 是正实数，数集 $\{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域(图 1.2)，记作 $U(a,\delta)$，即

$$\boxed{U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}}$$

或

$$\boxed{U(a,\delta)=\{x \mid |x-a| < \delta\},}$$

a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

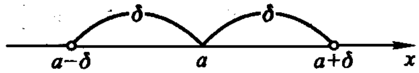


图 1.2

数集 $\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $U^0(a,\delta)$. 即

$$\boxed{U^0(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.}$$

这里，不等式 $0<|x-a|$ 表示 $x \neq a$.

3. 常量与变量

在自然现象里，在实践活动中，人们经常会遇到各种各样的量，例如：长度、面积、体积、质量、温度、压强、时间、距离等等. 在某一过程中，只取固定值的量称为常量；可以取不同值的量称为变量. 例如，把一个密闭容器内的气体加热时，气体的体积和分子数保持不变，是常量. 但气体的温度和压强可以取不同值，它们是变量. 又如，圆的直径可以取不同的值，是变量. 但圆周率，即圆周长与直径之比恒等于 π，是常量.

一个量是变量还是常量，不是绝对的，需要视具体情况而定. 例如重力加速度 g 的值是随着纬度和高度的变化而变化的，是一个变量. 但是在地球表面附近的局部地区内，由于纬度和高度变化很小，g 的值变化不大，可以把重力加速度 g 看作常量.

实际上，常量也可看成一种特殊的变量，正如把静止看成运动的特例一样，把常量看成某一过程中始终取同一值的变量. 通常我们用字母 a,b,c 等表示常量，用 x,y,z 等字母表示变量.

4. 映射

定义 3　设 A、B 是两个非空集合，若对每个 $x\in A$，按照某种确定的法则 f，有唯一确定的 $y\in B$ 与它相对应，则称 f 为从 A 到 B 的一个映射，记作

$$f:A\to B,\ 或\ f:x\mapsto y=f(x),\ x\in A.$$

其中 y 称为 x 在映射 f 下的像，x 称为 y 在映射 f 下的一个原像(或逆像)，A 称为映射 f 的定义域，记作 $D(f)$ 或 D_f，A 中所有元素 x 的像 y 的全体所构成的集合，称为 f 的值域，记作 R_f 或 $f(A)$，即

$$R_f=f(A)=\{y \mid y=f(x),\ x\in A\}.$$

映射也可简单地看成如图 1.3 所示的输入、输出系统，输入是原像 x，输出是像 y. 应当注意，定义中 x 的像是唯一的，但 y 的原像不一定是唯一的，并且值域 $f(A)\subseteq B$.

映射的概念中有两个基本要素，就是定义域和对应法则. 若 f，g 都是从 A

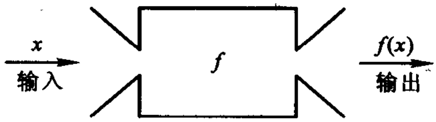


图 1.3

到 B 的映射，并且 $\forall x \in A$，$f(x) = g(x)$，则称映射 f 与 g 相等，记作 $f = g$.

对应法则就是由 A 中的元 x 确定 B 中的对应元 y 的方法，是两个集合 A 与 B 间对应关系的具体表现. 表示对应法则的方法很多，但不论用什么方法表示，都必须非常明确，不能模棱两可，含糊不清.

例 1 设 A 表示某校全体学生所构成的集合，用一个确定的方法给每个学生编一个学号，B 表示该校学生学号的集合，f 表示编学号的方法，于是它就确定了从 A 到 B 的一个映射 $f: A \to B$.

例 2 设 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，对每个 $x \in \mathbf{R}$，$f(x) = x^2$. 显然，f 是一个映射，f 的定义域 $D_f = \mathbf{R}$，值域 $R_f = \{y \mid y \geqslant 0\}$，它是 $\mathbf{R}$ 的一个真子集，即 $R_f \subsetneqq \mathbf{R}$，对于 R_f 中的元素 y，除 $y = 0$ 外，它的原像不是唯一的，如 $y = 1$ 的原像有 $x = 1$ 和 $x = -1$ 两个.

例 3 设 $F: \mathbf{R}^2 \to B$，其中 B 为所有非负数构成的数集，对每个 $(x, y) \in \mathbf{R}^2$，对应一个 $z \in B$，其中 $z = x^2 + y^2$，该映射简记作：$z = F(x, y) = x^2 + y^2$，$(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

设 f 是从集合 A 到集合 B 的映射，若 $R_f = B$，即 B 中任一元素 y 都是 A 中某元素的像，则称 f 为 A 到 B 的满射；若对 A 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$，它们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f 为 A 到 B 的单射；若映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 为 A 到 B 的一一映射(或双射)(图 1.4).

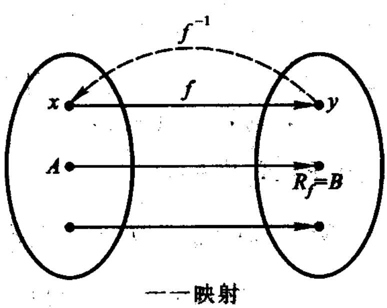


图 1.4

上面例 1 中的映射既是单射，又是满射，因此是一一映射；例 2 中的映射既不是单射，也不是满射；例 3 中的映射不是单射，是满射.

映射又称为算子. 若 A、B 都是实数集，则映射 $f:A\to B$ 就是通常的一元函数；若 $A\subseteq\mathbf{R}^2$，$B\subseteq\mathbf{R}$，则称映射 $f:A\to B$ 为二元函数；若 $A=B$，则 f 是从 A 到自身的映射，通常称这样的映射为 A 上的一个变换，把集 A 中的每个元素都映为自己的映射称为 A 上的恒等映射或单位映射，记作 I_A 或 I，即任给 $x\in A$，$I(x)=x$.

设 f 是 A 到 B 的一一映射（如图 1.4），则由定义，对每个 $y\in B$，有唯一的 $x\in A$，适合 $f(x)=y$，于是，我们可定义一个从 B 到 A 的新映射 g，即 $g:B\to A$，对每个 $y\in B$，规定 $g(y)=x$，这里的 x 满足 $f(x)=y$，这个映射 g 称为 $f:A\to B$ 的逆映射，记作 $f^{-1}:B\to A$，其定义域 $D_{f^{-1}}=B$，值域 $R_{f^{-1}}=A$. 此时，我们称 f 是可逆映射. 由定义可知，若 f 是可逆映射，则 f 的逆映射 f^{-1} 也是可逆映射，且 $(f^{-1})^{-1}=f$.

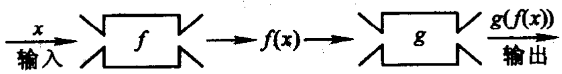
设有两个映射

$$f:A\to B,\ g:B\to C,$$

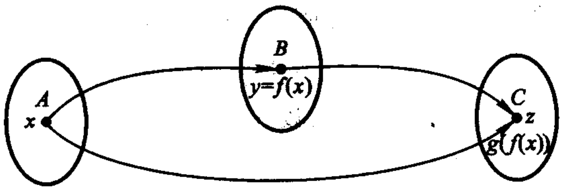
对每个 $x\in A$，对应唯一一个 $y=f(x)\in B$，对这个 $y\in B$，又对应唯一一个 $z=g(y)\in C$，从而按上面对应法则确定了一个从 A 到 C 的映射，这个映射称为 f 和 g 构成的复合映射（如图 1.5），记作 $g\circ f$，即

$$g\circ f:A\to C,$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)),\ x\in A.$$



(a)



(b)

图 1.5

由定义可知，任给两个映射 $f:A\to X$ 与 $g:B\to Y$，当且仅当 $f(A)\subseteq B$ 时才存在复合映射 $g\circ f:A\to Y$.

例 4 设有映射 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)=2x+1$，映射 $g:\mathbf{R}\to[-1,1]$，对每个 $u\in\mathbf{R}$，$g(u)=\sin u$，则映射 f 和 g 构成的复合映射

$g\circ f:R\to[-1,1]$，即：$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)=\sin(2x+1)$，$x\in\mathbf{R}$.

二、函数概念

1. 函数定义

定义 4 设非空数集 $D\subseteq\mathbf{R}$，则称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域. 记作 D_f，即 $D_f=D$.

当自变量 x 取定某个值 $x_0\in D$ 时，所对应的因变量 y 的值叫做函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $y_0=f(x_0)$，或 $y_0=y\big|_{x=x_0}$. 全体函数值的集合称为函数 $f(x)$ 的值域，记作 R_f，则 $R_f=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$.

函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可用其他字母，例如"φ"，"F"，"g"等. 此时 y 是 x 的函数就写成 $y=\varphi(x)$，$y=F(x)$，$y=g(x)$ 等等. 如果同时讨论同一变元 x 的分别具有不同对应法则的几个不同的函数，则不能用同一字母来表示.

在函数的定义中，对每个 $x\in D$，对应的函数值 y 总是唯一的，这样定义的函数称为单值函数. 如果给定一个对应法则，按这个法则，对每个 $x\in D$，有多个确定的 y 值与之对应，我们称这种法则确定了一个多值函数. 对于多值函数，常常将它分成若干个单值函数，其中每一个都称为该多值函数的单值分支. 例如，在直角坐标系中，中心在坐标原点，半径为 R 的圆周上的任意一点 $M(x,y)$ 的坐标满足关系式 $x^2+y^2=R^2$. 该方程在闭区间 $[-R,R]$ 上确定了以 x 为自变量，y 为因变量的函数. 当 x 取 $-R$ 或 R 时，对应的函数值都只有一个，当 x 取 $(-R,R)$ 内任一数值时，对应的函数值就有两个，所以这个函数是多值函数. 它的两个单值分支是：$y=\sqrt{R^2-x^2}$，$x\in[-R,R]$ 及 $y=-\sqrt{R^2-x^2}$，$x\in[-R,R]$. 我们主要讨论的是单值函数. 今后，若无特别声明，所谈到的函数都是指单值函数.

必须注意，定义域和对应法则是确定函数的两大要素. 如果一个函数有几何或物理等实际意义，则其定义域需按实际意义来考虑；如果一个函数只是用解析式子来表示，且未加说明，则它的定义域就是使这一解析式有意义的自变量所取的值的全体. 另外，在数学中，两个函数相同是指它们的定义域和对应法则都分别相同，至于自变量和因变量用什么字母来表示，则是无关紧要的. 例如，函数 $f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x)=2\ln x$ 不是同一函数，这是因为，$f(x)=\ln x^2$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；$g(x)=2\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，它们的定义域不