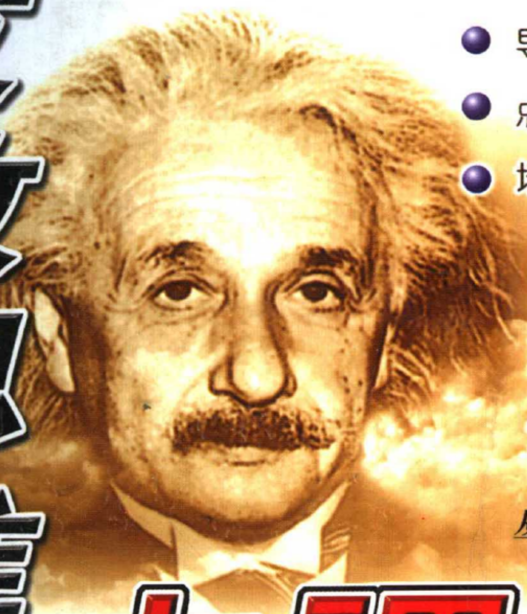
发散思维大课堂

- 同步最新教材
- 导引思维发散
- 点燃智慧火花
- 培养创新能力



丛书主编　希扬

第二次修订版

高一数学

试验修订本(下)

本书主编 源　流

龍門書局

发散思维大课堂

第二次修订版

高一数学

（试验修订本）（下）

源　流　主编

源　流　陈明铸　齐　健　王惠英　编著
叶畋田　陈民胜　郭莉君

龍門書局

北　京

图书在版编目(CIP)数据

发散思维大课堂. 高一数学：试验修订本. 下/希扬主编；源流分册主编；源流等编著. —修订版. —北京：龙门书局，2003.1

ISBN　7-80160-071-1

Ⅰ.发…　Ⅱ.①希…②源…③源…　Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 081894 号

责任编辑：张启男 / 封面设计：东方上林工作室

龍門書局出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京人卫印刷厂印刷
科学出版社发行　各地书店经销

*

2001 年 1 月第　一　版　开本：850×1168　1/32
2003 年 1 月第二次修订版　印张：10 3/4
2003 年 1 月第三次印刷　字数：344 000
印数：140 001－240 000

定　价：12.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前言

发散思维即求异思维，它从一点出发沿着多方向达到思维目标。用图表示，它就是从一点出发向知识网络空间发出的一束射线，使之与两个或多个知识点之间形成联系。它包含横向思维、逆向思维及多向思维。发散思维具有多向性、变通性、流畅性、独特性的特点，即思考问题时注重多思路、多方案，解决问题时注重多途径、多方式。它对同一个问题，从不同的方向、不同的侧面、不同的层次，横向拓展，逆向深入，采用探索、转化、变换、迁移、构造、变形、组合、分解等手法，开启学生心扉，激发学生潜能，提高学生素质，这对造就创造性人才至关重要。

本套丛书力求贴近整个教学环节，立足于培养学生的创造思维能力，增强学生思维的灵活性、拓展性，以便提高学生解决实际问题的能力。为此，我们紧密联系学生学习实际，全面深入反映近年来的全国高考、各省市中考的试题。紧扣教学大纲和现行教材，从初一到高二，按现行教材同步到每个章节或单元。

基本目标要求 使学生会运用目标管理的方法，掌握学习重点和方向，做到有的放矢，学习每章（或每单元）可达到预期的学习目的和效果。

基础知识导引 高度概括每章（或每单元）的内在知识体系，精辟分析中、高考的知识点。

重点难点点拨 以画龙点睛之笔突出重点、难点，以此作为展开发散思维的主线。

发散思维导练 是本套丛书的主体结构，它分为以下两部分：

发散思维分析 从知识点、重点、难点出发，分析本章（或本单元）的知识内容、相互关系，并运用发散思维方法揭示思维规律，突出解题规律，以达到融汇贯通的目的。

发散思维应用 精选典型例题，通过重点问题的多角度、多侧面、多层次的发散思维，透析、培养学生概念辨析、综合概括、转化变换、思维迁移、逆向运用、实验设计、书写表达、多解多变的全方位能力。

巩固基础训练　提高能力测试　可以帮助学生借此检验课堂学习效果；同时家长可借此考查学生对课本各章节知识的掌握程度。

为了紧扣高考，配合普通高考向 $3+X$ 综合高考过渡，在每册书后附有三套"发散思维综合能力测试题"，并在正文中增设了题组评论、高考样题分析、创造巧解等栏目内容，以供学生针对中、高考题型进行综合训练。为配合试验修订版教材在全国的推广使用，本套丛书根据教材改革精神及时调整、增编了高一、高二数学、物理、化学、英语、语文(通用)等学科试验修订版本。

本书用到如下各种发散思维：

题型发散　是将典型问题，变换其题型的一种发散思维。

解法发散　是通过一题多法、多题一法进行变通训练的发散思维。

纵横发散　是通过两个或多个发散点间的联系以及发散点与其它知识点间的联系，借助例题形成发散思维。

转化发散　是通过保持原命题的实质而变换其形式的发散思维。

组合发散　将多个发散点组合起来形成的一种发散思维。

迁移发散　是用信息迁移或方法迁移解决新情景问题的一种发散思维。

分解发散　是把一个复杂命题分解成一些单纯命题，并逐个加以分析和解决的发散思维。

逆向发散　是由目标至条件的定向思考的一种发散思维。

创造发散　是克服思维定势，不按常规思维解决问题的一种发散思维。

综合发散　是通过教材各章发散点之间的联系，一个学科与其它学科之间的联系综合思考的一种发散思维。

总之，本套丛书由浅入深，精析多练，学练结合，阶梯训练，逐步提高，并揭示中、高考的测试规律，使学生的复习与应试实际更贴近，从而提高学生灵活运用知识、增强迁移应变能力和创造性思维能力。

由于本套丛书编写时间紧迫和编者水平所限，不妥之处，祈望读者不吝赐教。

源　流

2000 年 3 月

目录

第四章　三角函数

基本目标要求

一、理解任意角的概念、弧度的意义；能正确地进行弧度与角度的换算.

二、掌握任意角的正弦、余弦、正切的定义，了解余切、正割、余割的定义.

三、掌握同角三角函数的基本关系式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$；掌握正弦、余弦的诱导公式.

四、了解周期函数与最小正周期的意义.

五、能正确运用以上公式，进行简单三角函数式的化简、求值和恒等式证明.

六、掌握两角和与两角差的正弦、余弦正切公式；掌握二倍角的正弦、余弦、正切公式；了解半角公式，和差化积与积化和差公式；通过公式的推导，了解它们内在联系，从而培养逻辑推理能力. 能运用上述公式，进行简单三角函数式的化简、求值和恒等式证明.

七、了解如何运用正弦线、正切线画出正弦函数、正切函数的图象，了解利用诱导公式由正弦函数的图象画出余弦函数的图象；并通过这些图象了解正弦、余弦、正切函数的性质；会用"五点法"画出正弦函数、余弦函数和函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的简图.

八、会用已知三角函数值求角，并会用符号 $\arcsin x$，$\arccos x$，$\arctan x$ 表示.

基础知识导引

一、三角函数的概念

1. 角的定义

射线 Ox 绕其端点 O 旋转到位置 Ox'，记作 $\angle xOx'$；射线 Ox、Ox'分别称为$\angle xOx'$的始边和终边；端点 O 叫做$\angle xOx'$的顶点.

按逆时针方向旋转所形成的角叫做正角，按顺时针方向旋转所形成的

角叫做负角.当一条射线没有作任何旋转时,也认为形成了一个角,这个角叫做零角.

2. 角的弧度制

(1)角度制和弧度制:规定周角的$\frac{1}{360}$为1度的角,这种用度作单位来度量角的单位制叫角度制;把等于半径长的圆弧所对的圆心角称“1弧度”的角,这种用弧度为单位来度量角的单位制称弧度制.

(2)角度制与弧度制的关系:

① 把角度换成弧度

$360^\circ = 2\pi\ \text{rad}, 180^\circ = \pi\ \text{rad}$,

$1^\circ = \frac{\pi}{180}\ \text{rad} \approx 0.01745\ \text{rad}$.

② 把弧度换成角度

$2\pi\ \text{rad} = 360^\circ, \pi\ \text{rad} = 180^\circ$,

$1\ \text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'$.

(3) 角的概念推广后,每一个角都有惟一的一个实数与它对应;反过来,每一个实数也都有惟一的一个角与它对应.

(4)终边相同的角,与角α终边相同(含α在内)的集合为$\{\theta \mid \theta = 360^\circ \cdot k + \alpha, k \in \mathbf{Z}\}$或$\{\theta \mid \theta = 2k\pi + \alpha, k \in \mathbf{Z}\}$,称为终边相同的角(前一集合中$\alpha$为角度,后一集合中$\alpha$为弧度).

(5)圆心角、半径、弧长之间的关系:$|\alpha| = \frac{l}{r}$,其中α为圆弧所对圆心角的弧度数、l为弧长、r为半径.

3. 任意角的三角函数

(1)定义.将$\angle AOD = \alpha$的顶点O重合于坐标原点,角α的始边OA重合于x轴的非负半轴.在终边上任取一点$P(x, y)$,设$|OP| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$,称比$\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, \frac{y}{x}, \frac{x}{y}, \frac{r}{x}, \frac{r}{y}$分别为角$\alpha$的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割函数,分别记为$\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha, \sec\alpha, \csc\alpha$.由实数集合与角的集合的一一对应知:三角函数也可以看成以实数为自变量的函数.

(2)三角函数线.设角α的终边与以原点为圆心的单位圆交于点P(如图4-1),则有向线段MP、OM、AT、BS、OT、OS的数量分别等于角α的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割的值,分别称为角α的正弦线、余弦线、正切线、余切线、正割线和余割线.

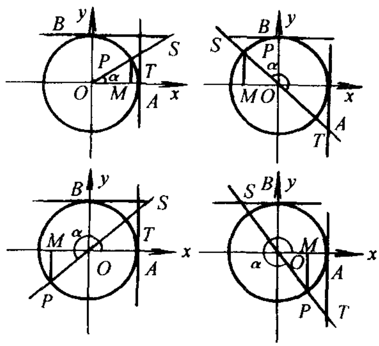


图 4-1

4. 三角函数值的符号

角 α 的三角函数的符号，由角 α 的终边上任意一点的坐标 x、y 的符号确定：当角 α 的终边落在第一、二象限时，$y>0$，故 $\sin\alpha>0$，$\csc\alpha>0$；当 α 的终边落在第三、四象限时，$y<0$，故 $\sin\alpha<0$，$\csc\alpha<0$；当角 α 的终边落在第一、四象限时，$x>0$，故 $\cos\alpha>0$，$\sec\alpha>0$；当角 α 的终边落在第二、三象限时，$x<0$，故 $\cos\alpha<0$，$\sec\alpha<0$；当角 α 的终边落在第一、三象限时，x、y 同号，故 $\tan\alpha>0$，$\cot\alpha>0$；当角 α 的终边落在第二、四象限时，x、y 异号，故 $\tan\alpha<0$，$\cot\alpha<0$.

5. 同角三角函数间的关系

(1)倒数关系：

$$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1,\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1,\qquad \tan\alpha\cdot\cot\alpha=1.$$

(2)平方关系：

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\quad 1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha,\quad 1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha.$$

(3)商数关系：

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

6. 诱导公式

(1)公式一：(终边相同的角的同名三角函数的值相等)

$$\sin(k\cdot360^\circ+\alpha)=\sin\alpha,$$

$$\cos(k\cdot360^\circ+\alpha)=\cos\alpha,$$

$$\tan(k\cdot360^\circ+\alpha)=\tan\alpha,$$

$\cot(k\cdot 360°+\alpha)=\cot\alpha.(k\in\mathbf{Z})$

(2)公式二：

$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$,

$\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha$,

$\tan(180°+\alpha)=\tan\alpha$,

$\cot(180°+\alpha)=\cot\alpha$.

(3)公式三：

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\cos(-\alpha)=\cos\alpha$,

$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha,\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$.

(4)公式四：

$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha,\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$,

$\tan(180°-\alpha)=-\tan\alpha,\cot(180°-\alpha)=-\cot\alpha$.

(5)公式五：

$\sin(360°-\alpha)=-\sin\alpha$,

$\cos(360°-\alpha)=\cos\alpha$,

$\tan(360°-\alpha)=-\tan\alpha$,

$\cot(360°-\alpha)=-\cot\alpha$.

以上诱导公式可以概括为

$k\cdot 360°+\alpha(k\in\mathbf{Z}),-\alpha,180°\pm\alpha,360°-\alpha$ 的三角函数值等于 α 的同名函数值，前面加上一个把 α 看成锐角时原函数值的符号.

7.利用诱导公式求任意角的三角函数值的一般步骤

(1)用公式三将任意负角的三角函数化为任意正角的三角函数.

(2)用公式一将大于 360°角的三角函数化为 0°到 360°间的三角函数.

(3)用公式二、四、五将大于 90°的角的三角函数化为 0°到 90°间的三角函数.

(4)得到 0°至 90°间的三角函数可用特殊角的三角函数值或非特殊角的三角函数值查表即可求得.

二、正弦、余弦、正切函数的和、差、倍角公式及半角公式，积化和差与和差化积公式表(见表 4-1)

表 4-1

$$a\sin\alpha \pm b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin\left(a \pm \arctan\frac{b}{a}\right) \quad (a>0,\ b>0)$$

逆用

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

相除

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$-\beta$代β

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

相除

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

相加（减）

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

令$\begin{cases}\theta=\alpha+\beta\\ \varphi=\alpha-\beta\end{cases}$

$$\sin\theta+\sin\varphi=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$$
$$\sin\theta-\sin\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$$
$$\cos\theta+\cos\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$$
$$\cos\theta-\cos\varphi=-2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$$

$\beta=\alpha$

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

相除

$\beta=\alpha$

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

倍角换单角

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

变形

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$
$$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$
$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

变形

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

变形

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

三、三角函数的图象和性质

1. 三角函数的图象和性质见表 4-2

2. 一般正弦函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的图象画法

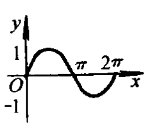
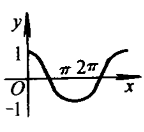
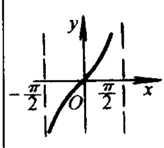
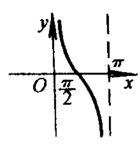
(1)五点描图法.(略)

(2)变换作图法.

① 振幅变换:将 $y=\sin x$ 的图象上各点的纵坐标伸长($A>1$)或缩短($0<A<1$)到原来的 A 倍;② 相位变换:把 $y=A\sin x$ 的图象上所有的点向左($\varphi>0$)或向右($\varphi<0$)平移$|\varphi|$单位;③ 周期变换:使 $y=A\sin(x+\varphi)$ 的各点的横坐标缩短($\omega>1$)或伸长($0<\omega<1$)到原来的$\frac{1}{\omega}$倍;④ 平移变换:最后把所得各点向上($k>0$)或向下($k<0$)平行移动$|k|$个单位.

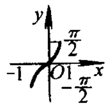
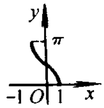
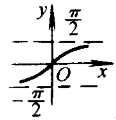
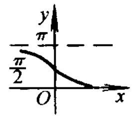
经过上述四次变换,从 $y=\sin x$ 出发,即可得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+k$ 的图象.

表 4-2

函　数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$	$y=\cot x$
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\{x \mid x\in\mathbf{R}, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\}$	$\{x \mid x\in\mathbf{R}, x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$
值　域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
奇偶性	奇	偶	奇	奇
周期性(T为最小正周期)	$T=2\pi$	$T=2\pi$	$T=\pi$	$T=\pi$
单调性	在$[2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}]$上都是增函数 在$[2k\pi+\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}]$上都是减函数 $(k\in\mathbf{Z})$	在$[2k\pi,(2k+1)\pi]$上都是减函数 在$[(2k-1)\pi, 2k\pi]$上都是增函数 $(k\in\mathbf{Z})$	在$(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2})$内都是增函数 $(k\in\mathbf{Z})$	在$(k\pi, k\pi+\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 内都是减函数
极　值	$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$时, $y_{max}=1(k\in\mathbf{Z})$ $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$时, $y_{min}=-1(k\in\mathbf{Z})$	$x=2k\pi$时, $y_{max}=1(k\in\mathbf{Z})$ $x=2k\pi+\pi$时, $y_{min}=-1(k\in\mathbf{Z})$	无	无
图　象				

四、反三角函数的图象和性质(见表 4-3)

表 4-3

反三角函数	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\arctan x$	$y=\operatorname{arccot} x$
定义域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
值　域	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	$[0,\pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$(0,\pi)$
图　象				
极　值	$y_{\min}=-\frac{\pi}{2}$ $(x=-1)$ $y_{\max}=\frac{\pi}{2}$ $(x=1)$	$y_{\min}=0$ $(x=1)$ $y_{\max}=\pi$ $(x=-1)$	无	无
性　质	增函数 奇函数	减函数 非奇非偶函数	增函数 奇函数	减函数 非奇非偶函数
反三角函数运算公式	$\arcsin(\sin x)=x$ $(x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}])$	$\arccos(\cos x)=x$ $(x\in[0,\pi])$	$\arctan(\tan x)=x$ $(x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))$	$\operatorname{arccot}(\cot x)=x$ $(x\in(0,\pi))$
反三角函数的三角函数运算公式	$\sin(\arcsin x)=x$ $(x\in[-1,1])$	$\cos(\arccos x)=x$ $(x\in[-1,1])$	$\tan(\arctan x)=x$ $(x\in\mathbf{R})$	$\cot(\operatorname{arccot} x)=x$ $(x\in\mathbf{R})$
反三角函数正负值关系公式	$\arcsin(-x)$ $=-\arcsin x$ $(\lvert x\rvert\leqslant 1)$	$\arccos(-x)$ $=\pi-\arccos x$ $(\lvert x\rvert\leqslant 1)$	$\arctan(-x)$ $=-\arctan x$ $(x\in\mathbf{R})$	$\operatorname{arccot}(-x)$ $=\pi-\operatorname{arccot} x$ $(x\in\mathbf{R})$
互为余角的反三角函数间的关系公式	$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ $(\lvert x\rvert\leqslant 1)$		$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}(x\in\mathbf{R})$	

*五、最简单的三角方程的解(见表 4-4)

表 4-4

方　程	a 的取值范围	方程的解集
$\sin x=a$	$\|a\|>1$	$\varnothing$
	$\|a\|=1$	$\{x\|x=2k\pi+\arcsin a,k\in\mathbf{Z}\}$
	$\|a\|<1$	$\{x\|x=k\pi+(-1)^k\arcsin a,k\in\mathbf{Z}\}$
$\cos x=a$	$\|a\|>1$	$\varnothing$
	$\|a\|=1$	$\{x\|x=2k\pi+\arccos a,k\in\mathbf{Z}\}$
	$\|a\|<1$	$\{x\|x=2k\pi\pm\arccos a,k\in\mathbf{Z}\}$
$\tan x=a$	$\mathbf{R}$	$\{x\|x=k\pi+\arctan a,k\in\mathbf{Z}\}$
$\cot x=a$	$\mathbf{R}$	$\{x\|x=k\pi+\operatorname{arccot} a,k\in\mathbf{Z}\}$

注意　在 $a=0$ 的特殊情况下,方程 $\sin x=a$ 为 $\sin x=0$,则 $x_1=2n\pi$,$x_2=(2n+1)\pi$,合并为$\{x|x=k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$;

$\cos x=0$,则 $x=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$,故其解集为$\{x|x=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$;

$\tan x=0$,则 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,故其解集为$\{x|x=k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$;

$\cot x=0$,则 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,故其解集为$\{x|x=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$.

*六、简单三角方程的解法

*1.解法

*(1)简单三角方程要求掌握以下类型:

若 $\sin f(x)=\sin g(x)$,则

$f(x)=2k\pi+g(x)$,或 $f(x)=(2k+1)\pi-g(x)(k\in\mathbf{Z})$;

若 $\cos f(x)=\cos g(x)$,则

$f(x)=2k\pi\pm g(x)(k\in\mathbf{Z})$;

若 $\tan f(x)=\tan g(x)$,或 $\cot f(x)=\cot g(x)$,则

$f(x)=k\pi+g(x)(k\in\mathbf{Z})$.

*(2)对可化为同角同函数的三角方程,可应用换元法化成代数方程求解.

*(3)对一边可化为三角函数式的积,另一边为零的三角方程,可分别令每一因式等于零求解.

*(4)对可化为只含正弦和余弦的齐次式的三角方程,可在方程两端分

别除以余弦，化为只含正切函数的三角方程求解.

*(5)对可化为 $a\sin f(x)+b\cos f(x)=c$ 形式的三角方程，可通过引进辅助角 $\varphi=\arctan\frac{b}{a}$ 化成 $\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leqslant 1\right)$求解.

***2.注意事项**

解三角方程中的一个值得注意的问题是方程的增根、失根.和解代数方程一样，当方程在变形过程中使未知数的允许值的范围扩大，则可能增根；当方程在变形过程中使未知数的允许值的范围缩小，则可能失根.解决增根的方法是验根，解决失根的办法是补根.此外，还要注意由于解三角方程使用的方法不同，所得的解可以有不同的表达形式.

*七、最简三角不等式及其解法

(1)$\sin x\geqslant 0$ 的解集为$\{x|2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

(2)$\sin x<0$ 的解集为$\{x|(2k-1)\pi<x<2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

(3)$\cos x\geqslant 0$ 的解集为$\{x|2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$.

(4)$\cos x<0$ 的解集为$\{x|2k\pi+\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$.

(5)$\tan x\geqslant 0$ 的解集为$\{x|k\pi\leqslant x<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$.

(6)$\tan x<0$ 的解集为$\{x|k\pi-\frac{\pi}{2}<x<k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

*八、常用的三角函数不等式

1.(1)$|\sin x|\leqslant 1$.　　(2)$|\cos x|\leqslant 1$.

(3)$|\sec x|\geqslant 1$.　　(4)$|\csc x|\geqslant 1$.

2.若 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则有下列不等式成立：

(1)$\sin x<x<\tan x$.

(2)$1<\sin x+\cos x\leqslant\sqrt{2}$.

(3)$\tan x+\cot x\geqslant 2$.

(4)$\sin x+\csc x>2$.

(5)$\cos x+\sec x>2$.

3.三角形中常用的三角函数不等式：

(1)在$\triangle ABC$ 中，有

①$A>B\Leftrightarrow\sin A>\sin B$；②$1<\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}$.

(2)在锐角$\triangle ABC$ 中，有

①$\sin A>\cos B$, $\sin A>\cos C$,

$\sin B>\cos A$, $\sin B>\cos C$,

$\sin C>\cos A$, $\sin C>\cos B$;

②$\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C$;

③$\tan A\cdot\tan B>1,\tan A\cdot\tan C>1,\tan B\cdot\tan C>1$;

④$2<\sin A+\sin B+\sin C<3$.

重点难点点拨

本章的重点是任意角的三角函数,和角公式,差角公式及倍角公式的应用,三角函数的图象和性质.

本章的难点是确定三角变换,角的变换,由函数图象求函数的解析式,利用有关公式化简、求值、证明,三角函数在代数、几何及实际问题中的应用.为了掌握重点、难点,必须注意以下问题.

一、有关任意角的三角函数的问题

1.关于角的几个概念的区别

(1)终边相同的角与相等的角.

终边相同的角不一定相等,相等的角一定终边相同.

(2)象限角、区间角和轴线角.

象限角:如果使角的顶点与坐标原点重合,角的始边与 x 轴的非负半轴重合,角的终边落在哪个象限,就把这个角叫做哪个象限的角.

第一象限角:$k\cdot360°<\alpha<k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}$;

第二象限角:$k\cdot360°+90°<\alpha<k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}$;

第三象限角:$k\cdot360°+180°<\alpha<k\cdot360°+270°,k\in\mathbf{Z}$;

第四象限角:$k\cdot360°+270°<\alpha<k\cdot360°+360°,k\in\mathbf{Z}$.

区间角:角的量数在某个确定的区间内(上).

轴线角:角的终边落在坐标轴上.

终边在 x 轴上的角 α 的集合为

$$\{\alpha\mid\alpha=k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha\mid\alpha=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$$
$$=\{\alpha\mid\alpha=n\cdot180°,n\in\mathbf{Z}\};$$

终边在 y 轴上的角 α 的集合为

$$\{\alpha\mid\alpha=k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha\mid\alpha=k\cdot360°+270°,k\in\mathbf{Z}\}$$
$$=\{\alpha\mid\alpha=n\cdot180°+90°,n\in\mathbf{Z}\}.$$