高等学校精品规划教材

DAXUE SHUXUE

大学数学（二）

（高职高专适用）

主编 武群
副主编 丁梅 刘萍

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高等学校精品规划教材

大学数学（二）

（高职高专适用）

主　编　武　群

副主编　丁　梅　刘　萍

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本教材分为《大学数学一》和《大学数学二》。《大学数学二》分为八章，内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程、拉普拉斯变换、数学实验等。每节均配有习题，并在全书的最后给出习题答案。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高等学校及本科院校举办的二级职业技术学院工科类各专业的数学教材。

图书在版编目（CIP）数据

大学数学．2/武群主编．—北京：中国水利水电出版社，2005

高等学校精品规划教材．高职高专适用

ISBN 7-5084-2629-0

Ⅰ．大… Ⅱ．武… Ⅲ．高等数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第140276号

书　　名	高等学校精品规划教材（高职高专适用） **大学数学（二）**
作　　者	主编　武群　　副主编　丁梅　刘萍
出版　发行	中国水利水电出版社（北京市三里河路6号　100044） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：(010) 63202266（总机）、68331835（营销中心）
经　　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京安锐思技贸有限公司
印　　刷	北京市兴怀印刷厂
规　　格	787mm×1092mm　16开本　27.25印张　646千字
版　　次	2005年2月第1版　2005年11月第2次印刷
印　　数	5001—8000册
定　　价	**37.00**元

前　言

本教材依据教育部最新制定的“高职高专教育高等数学课程教学基本要求”而编写的。本教材力求贯彻专科教学要突出理论知识的应用和实践动手能力的培养的原则，“突出实用性，加强实践性，强调针对性，注意灵活性”，对基础理论的教学以够用、必需为度，注意减少理论推导，着重理论的应用，加强实践教学环节，以便学生受到较好的专业训练和实践动手能力的培养。

本教材有如下特点：①由于高职高专学校的教学总时数少，我们在编写过程中，打破了传统的高等数学和工程数学之间的界限，对课程进行了必要的优化；②强调高职高专学校学以致用的特点，将数学软件包 Mathematica 的基本用法以及相关的数学实验作为教材内容编在教材里，以提高学生使用计算机解决实际问题的能力；③结合高职高专的特点，适度淡化了深奥的数学理论，强化了几何说明；④强化了数学思想、数学概念、数学方法的教学，为专业基础课和专业课的学习打下良好的基础，在例题的选排上，优选了在几何、物理方面的应用；⑤在课后习题的选择上，既考虑循序渐进的原则，又考虑重点、难点的结合；⑥每章末编排了拓展与训练，不仅深化了基础知识，拓宽了教材内容，而且配有一定深度的例题与习题，可供一部分学生选择性学习。

本教材包括《大学数学一》、《大学数学二》共两册。

《大学数学一》内容包括一元函数微分学、一元函数积分学、常微分方程、拉普拉斯变换和相关的数学实验。

《大学数学二》内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、线性代数、概率论与数理统计和相关的数学实验。

参加本教材编写的有刘萍（第五～九章、第十二章、第十三章、第十九章）；武群（第一～三章、第十章、第十一章、第十五章、第十六章）；丁梅（第四章、第十四章、第十七章、第十八章）。全书框架结构安排由刘萍承担。《大学数学一》由刘萍统稿、定稿。《大学数学二》由武群统稿、定稿。

山东大学教授、博士生导师江守礼老师承担了本教材的审稿工作，认真审阅了全部原稿，并提出了许多有价值的建设性意见。

在编写过程中，参阅了同济大学数学教研室主编的《高等数学》第四版、第五版，盛祥耀主编的《高等数学》，李心灿主编的《高等数学》，丁家太主编的《微积分解题方法》，侯风波主编的《高等数学》，郭锡伯主编的《高等数学实验课讲义》，彭玉芳编著的《线性代数》，骆承钦主编的《线性代数》，南京工学院数学教研室编著的《积分变换》，周肇锡主编的《积分变换》等国内许多正式出版的教材。

在出版过程中，得到了山东电力高等专科学校领导和老师的大力支持与帮助，特别是

崔强同志作了大量的工作。在此，向以上对本教材的编写和出版工作提供大力支持和帮助的同志一并表示衷心感谢。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高等学校及本科院校举办的二级职业技术学院工科类各专业的数学教材。

本系列教材的内容根据各专业的不同要求可进行选择性教学。

由于作者水平所限，加之时间仓促，本教材难免有不足之处，敬请读者斧正。

作　者

2005年1月

目　　录

第十章　向量代数与空间解析几何

空间解析几何是用代数的方法研究空间图形的一门学科，它不仅是学习多元微积分不可缺少的知识，而且在自然科学中也有广泛应用.

本章首先建立空间直角坐标系，然后引进向量及其代数运算，最后以向量为工具研究空间的平面与直线、空间曲线与曲面.

第一节　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

在平面解析几何中，已经建立了平面直角坐标系，使平面上的点与一对有序实数一一对应，得到了点的坐标，并以此来确定平面上一点的位置. 下面就要建立空间直角坐标系，确定空间点的位置，进而研究空间的曲线与曲面等.

1. 空间直角坐标系

过空间一点 O，引三条两两互相垂直的数轴 Ox、Oy、Oz，分别称为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴)，统称为坐标轴. 它们都以 O 为原点，且具有相同的长度单位. 其正方向要符合右手规则(如图 10-1 所示)，即以右手握住 z 轴，让右手的其余四指从 x 轴的正向，以 $\pi/2$ 的角度转向 y 轴的正向，这时大拇指所指的方向就是 z 轴的正向. 这样，三条坐标轴就组成一个空间直角坐标系，点 O 称作坐标原点.

2. 坐标平面与卦限

每两条坐标轴所确定的平面称为坐标面，分别记作 xOy 平面、yOz 平面、zOx 平面. 通常将 xOy 平面放在水平位置. 三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分称作一个卦限. 含有 x、y、z 轴的正半轴称作第Ⅰ卦限，从第Ⅰ卦限开始，从 Oz 轴的正向向下看，按逆时针方向，依次称作第Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限，第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限下面对应的空间部分依次称作第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限，如图 10-2 所示.

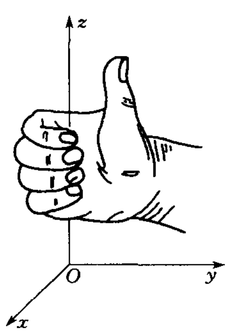

图 10-1

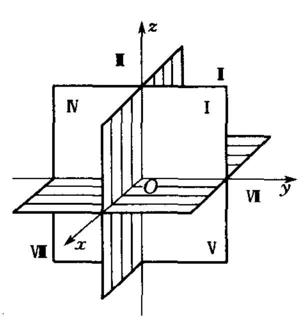

图 10-2

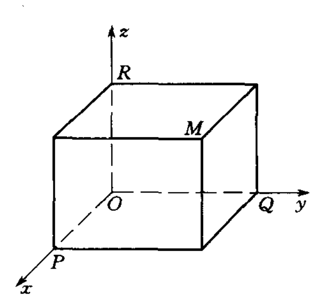

图 10-3

3. 空间一点与数组的关系

设 M 为空间直角坐标系中的一点，过 M 点分别作垂直于三条坐标轴的平面，与这三条坐标轴的交点分别为 P、Q、R，且这三点在坐标轴上的坐标分别是 x、y、z，则 M 点就唯一确定了一组有序数组 x、y、z. 同样，如果给定一组有序数组 x、y、z，且它们分别在 x 轴、y 轴、z 轴上依次对应 P、Q 和 R 点，若过 P、Q、R 点分别作平面垂直于坐标面，则这三张平面确定了唯一的交点 M；这样，空间的一点和有序数组之间的关系为一一对应关系. 有序数组 x、y、z 就称作是点 M 的坐标，记作 $M(x, y, z)$，x、y、z 分别称作点 M 的横坐标(x 坐标)、纵坐标(y 坐标)、竖坐标(z 坐标)，如图 10-3 所示.

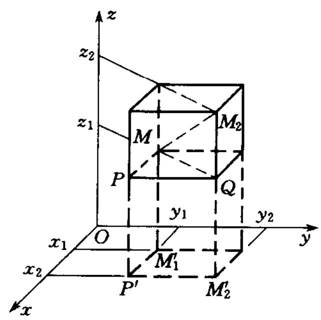

图 10-4

显然，原点 O 的坐标为(0, 0, 0)，坐标轴上的点至少有两个坐标为 0，坐标面上的点至少有一个为 0. 例如，在 y 轴上的点，就会有 $x=z=0$；在 xOz 坐标面上的点，有 $y=0$.

二、空间两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$、$M_2(x_2, y_2, z_2)$为空间中相异的两点，求它们之间的距离

$$d=|M_1M_2|$$

过点 M_1、M_2 各作三个分别与三个坐标轴垂直的平面，如图 10-4 所示，显然有

$$\begin{aligned} d^2 &= |M_1M_2|^2 \\ &= |M_1Q|^2+|QM_2|^2 \\ &= |M_1P|^2+|PQ|^2+|QM_2|^2 \\ &= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 \end{aligned}$$

所以 $$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

原点 O 与点 $M(x, y, z)$的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

【例】 在 z 轴上求与两点 $A(-4, 1, 7)$，$B(3, 5, -2)$等距离的点.

解 设所求点为 $M(x, y, z)$，由于点 $M(x, y, z)$在 z 轴上，所以有：$x=y=0$，据题意有

$$|MA|=|MB|$$

即有 $\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}$

解得 $$z=\frac{14}{9}$$

所以，所求的点为 $M\left(0, 0, \frac{14}{9}\right)$.

习　题　10-1

1. xOy 面、yOz 面上的点有什么特点？
2. x 轴、z 轴上的点有什么特点？

3. 指出下列各点在哪个卦限：

$A(1,2,-3)$；$B(-1,-2,3)$；$C(2,-3,4)$；$D(-2,-3,-4)$；$M(-2,3,-4)$；$N(2,3,4)$.

4. 求点 $P(1,2,3)$关于原点的对称点、关于 x 轴的对称点、关于 xOy 面的对称点.

5. 设点 P 在 x 轴上，它到点 $P_1(0,2,3)$的距离为到点 $P_2(0,1,-1)$的距离的两倍. 求：点 P 的坐标.

6. 已知点 $P(6,5,4)$. 试求：(1)P 点到三坐标面的距离；

(2)P 点到三坐标轴的距离.

第二节　向量及其运算

一、向量的概念

在物理学和工程技术中，有些物理量如温度、时间、面积、质量、密度等，只有大小，没有方向，这一类物理量称作数量或标量；还有一类物理量如位移、速度、力等，既有大小，又有方向，这一类物理量称作矢量或向量. 向量通常用有向线段表示. 以 A 为起点，B 为终点的有向线段所表示的向量，记作$\overrightarrow{AB}$. 向量也可用一个拉丁字母上面加一个箭头或用一个黑体字母表示，如向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{E}$、$\vec{F}$ 或 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$.

向量的大小叫作向量的模. 向量$\overrightarrow{AB}$、$\vec{a}$、$\boldsymbol{a}$ 的模分别记作 $|\overrightarrow{AB}|$、$|\vec{a}|$、$|\boldsymbol{a}|$. 模等于 1 的向量称作单位向量. 模等于零的向量叫做零向量，记作 0 或 $\vec{0}$，零向量的方向不确定. 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量，称作向量 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作$-\boldsymbol{a}$.

在直角坐标系中，起点为原点，终点为 M 的向量$\overrightarrow{OM}$称作点 M 的向径，常用 $\boldsymbol{r}$ 表示.

在研究过程中发现，有些向量与起点有关，有些向量与起点无关，即一个向量在保持其大小和方向不变的条件下，可以自由移动，这种向量称作是自由向量. 今后，我们主要研究自由向量.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，方向相同，就称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

如果两个非零向量的方向相同或相反，则称这两个向量平行；如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，就记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向可以看作是任意的，因此可以认为零向量与任何向量都平行.

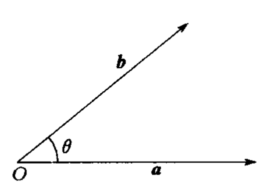

图 10-5

如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，把它们的起点移到同一点 O，把两向量所夹的不超过 π 的角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$或$(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$. 即$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\theta$. 特别地，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\theta=0$；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，$\theta=\pi$(见图 10-5).

如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量，规定它们的夹角可在 0 与 π 之间任意取值.

二、向量的运算

1. 向量的加减法

在物理学中，如果有两个力 F_1 和 F_2 作用在同一质点上，那么它们的合力可按平行四边形法则求得(见图 10-6). 对于速度、位移等也有同样的结果. 总结这些物理量所遵循的规律，我们对一般的向量规定加法运算如下：

定义 1　设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是两个向量，以 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ 为邻边作一个平行四边形 $OACB$，则对角线向量 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和(见图 10-7)，记为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

上述求向量和的方法叫做平行四边形法则.

由于平行四边形的对边平行且相等，所以从图 10-8 可以看出，还可以这样来求两向量的和：作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，以 $\overrightarrow{OA}$ 的终点 A 为起点做 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，连接 OC，就得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，其中 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，这一方法称作向量加法的三角形法则.

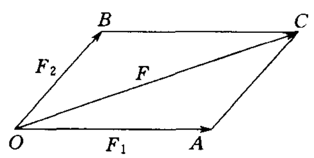

图 10-6

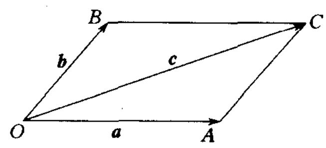

图 10-7

向量的加法满足如下规律：

(1)交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

(2)结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

向量的减法可以看成加法的逆运算，即若 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的向量和为 $\boldsymbol{a}$，则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$$

减法的三角形法则：将向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 平移到同一起点，然后由向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点到向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点引一向量，即得 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，如图 10-9 所示.

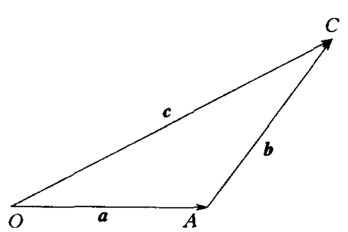

图 10-8

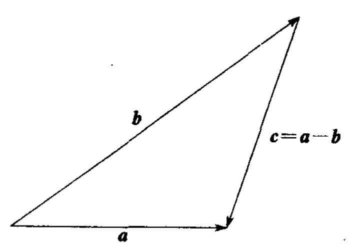

图 10-9

2. 数与向量的乘积

定义 2　实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 得乘积仍是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{a}\lambda$，它由下列两个条件所确定：

(1)$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模是 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍，即

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$$

(2)$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

如果 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=0$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}=0$.

数与向量的乘积满足下列运算规律：

(1)结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$($\lambda$、$\mu$ 为数).

(2)分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，将与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量记作 $\boldsymbol{a}^{\circ}$. 由数与向量乘积的定义，有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}$$

这种记法明显地标示了一个向量的“向”与“量”，为以后的运算带来很大方便.

由 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}$，得

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$$

这说明，向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，可以由该向量除以它自身的模得到.

【例 1】 设 A_1、A_2 为 u 轴上坐标为 u_1、u_2 的任意两点，又 u° 为与 u 轴正向一致的单位向量.

验证：$\overrightarrow{A_1A_2}=(u_2-u_1)u^{\circ}$.

图 10-10

证 当 $u_2-u_1>0$ 时，$\overrightarrow{A_1A_2}$ 与 u° 的方向相同，如图 10-10(a)所示. 由于 $|\overrightarrow{A_1A_2}|=u_2-u_1$，所以 $\overrightarrow{A_1A_2}=(u_2-u_1)u^{\circ}$.

当 $u_2-u_1=0$ 时，$\overrightarrow{A_1A_2}=0$，又 $(u_2-u_1)u^{\circ}=0$，所以 $\overrightarrow{A_1A_2}=(u_2-u_1)u^{\circ}$.

当 $u_2-u_1<0$ 时，$\overrightarrow{A_1A_2}$ 与 u° 的方向相反，如图 10-10(b)所示. 由于 $|\overrightarrow{A_1A_2}|=u_1-u_2$，则

$$\overrightarrow{A_1A_2}=-(u_1-u_2)u^{\circ}=(u_2-u_1)u^{\circ}.$$

我们将 u_2-u_1 称为 u 轴上有向线段 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 的值，记作 A_1A_2，即 $A_1A_2=u_2-u_1$.

当 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 与 u 轴同向时，$A_1A_2>0$；当 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 与 u 轴反向时，$A_1A_2<0$.

设向量 $\overrightarrow{AB}$ 与数轴 u 正向间的夹角为 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$. 过 A 点和 B 点分别作平面垂直于轴 u. 设垂足分别为 A_1 和 B_1，则把 u 轴上有向线段的值叫做向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影，记作

$$\mathrm{Pr}j_u\overrightarrow{AB}=A_1B_1$$

若以 u_1、u_2 分别表示 A_1、B_1 在数轴 u 上的坐标，则有

$$\mathrm{Pr}j_u\overrightarrow{AB}=u_2-u_1$$

由图 10-11 知

$$\mathrm{Pr}j_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta$$

即向量在 u 轴上的投影等于该向量的模乘以该向量与 u 轴夹角 θ 的余弦.

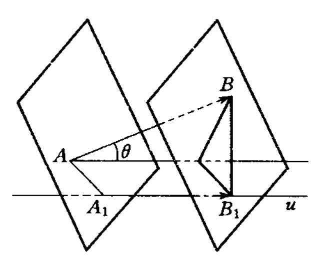

图 10-11

3. 两向量的数量积

定义 3 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是任意两个向量，它们的夹角 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\theta$，则把数量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，

即　$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$