

2005 高考 压轴试题专辑

根据《2005年普通高等学校招生全国统一
考试大纲的说明》编写

GAOKAODIYAOYAN

高考调研

- 同步解读高考资讯
- 创新设计复习预案
- 科学探究解题方法

高考调研课题组

数学

责任编辑：孙建开

封面设计：李翔

图书在版编目(CIP)数据

高考调研.数学/《高考调研》编委会编. —海口：南方出版社, 2005. 4

ISBN 7-80701-493-8

I. 高... II. 高... III. 数学课—高中—升学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第017147号

高考调研·数学

出版：南方出版社

邮政编码：570203

社址：海南省海口市海府一横路19号华宇大厦12楼

电话：(0898) 65371546 传真：(0898) 65371264

发行：全国各新华书店

印刷：郑州文华印务有限公司

开本：787×1092 1/16

印张：20 字数：400千字

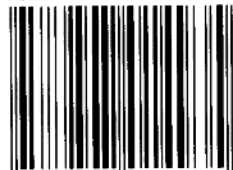
印数：0001-10000册

版次：2005年4月第1版 2005年4月第1次印刷

书号：ISBN 7-80701-493-8/G·401

定价：25.00/套(5册)

ISBN 7-80701-493-8



9 787807 014935

高考调研

目 录

(高中数学)

组 编

《高考调研》编写组

编委会

赵春祥 王 勇

王初明 张大任

徐永忠 李加强

曹 兵 王郁园

侯克全 陈 玲

回顾、展望及复习策略	(1)
2005年高考数学模拟试题(一)	(3)
2005年高考数学模拟试题(二)	(7)
2005年高考数学模拟试题(三)	(10)
2005年高考数学模拟试题(四)	(13)
2005年高考数学模拟试题(五)	(16)
2005年高考数学模拟试题(六)	(19)
2005年高考数学模拟试题(七)	(23)
2005年高考数学模拟试题(八)	(26)
2005年高考数学模拟试题(九)	(29)
2005年高考数学模拟试题(十)	(32)
2005年高考数学模拟试题参考答案	(36)

回顾、展望及复习策略

一、2004 年高考试题回顾

2004 年全国高考数学试题的最大特点就是“强调基础、侧重能力”。新课程卷命题重视从基础知识、基本方法出发设计试题,题目注意了由易到难的试题编拟思想,在知识网络交汇范围和知识综合性上有所缩小和降低,更加贴近教材和学生事实水平,为学生发挥学习潜能提供了较大空间。试题背景和形式是学生所熟悉的,基本上都是通常意义下的数学问题。选择题和填空题,无论是从题目的形式结构还是从试题陈述方式与解答技巧上来看,基础知识占主导地位,属常规问题,没有超出平时的模拟练习的范围。解答题也在基本概念、性质、公式、表达形式以及基本图象和图形的考查上有所侧重,并且还侧重考查通性通法,淡化特殊技巧。

2004 年全国高考数学试题还有以下特点:

考查时既要注意全面,更要注意突出重点。对支撑数学学科知识体系的主干知识,考查时保证较高的比例,并保持必要的深度。

I、函数作为高中代数最基本、最重要的内容,在所占卷面总分的比值都较大幅度地超过教学大纲中规定的相应课时比值。特别是新教材试卷强化了导数在函数中的工具作用,利用导数研究函数的单调性、极值、最值等问题占较大分值。

II、圆锥曲线是支撑数学知识体系的主要内容之一,高考考查时保持着较高的比例,并达到必要的深度,使它构成高考数学试题的主题,是多年来常考不衰的热点内容。

III、纵观全国各个不同省份和地区的 2004 年高考试卷,加大了新增知识的考查力度,注意新旧知识的综合的基本精神不会变都得到了充分体现。这样命题的目的在于支持课程改革。当然,对这些内容的考查,命题人在题目上控制了难度,基本上贯彻了考纲及新课标中对这些内容的要求。

IV、2004 年高考试题最明显的特点是淡化了近几年炒作的两种题型,即应用题和探索性问题。从不同思维层次上对学生能力进行考查是高考命题的方向,也是改变过去试卷结构的有效措施。应用问题更侧重生产、生活实际中产生的数学现象,考查数学应用的社会性和时代性,有意避开了模拟实际问题的“包装型”应用题。

V、2004 年高考命题在考查知识的迁移、组合、

融会的创新意识和创新能力的题型上也有新的突破,重视对数学知识整体性和综合性的考查,在知识网络的交汇处设计试题,注意知识的联系与综合,注意对考生综合能力的考查,力图实现全面考查数学基础和数学素质的目标。

VI、主干知识构建的试卷主题结构发生变化,旧课程卷的五大热点(即函数与方程、不等式、数列、直线与平面、圆锥曲线)格局已打破,新的热点内容浮出水面。

二、2005 年高考命题展望及复习策略

2005 年高考命题应是总体保持稳定,难度略有上调,题型继续创新,突出能力特别是创新能力的考查,继续增加思考型题目,扩展和更新高考命题的重点、热点,加大对新教材增加内容的考查力度。

I、函数是高中数学的重要内容,它是一条纽带,把中学数学各个分支紧紧地联系在一起,以函数为载体,综合不等式、方程、数列交叉汇合处为主干,构筑成知识网络型代数推理题,多年来在高考试题中出现的频率相当高,占据着令人瞩目的地位。因此,以函数为纲的命题原则不会改变,与函数、方程、不等式、数列等相关联的考题,会构筑解目标与已知条件之间的跨度大、题型新颖、内容综合、解法灵活、思维抽象的高考热点题型。

II、由于向量、概率与统计、导数、简易逻辑、线性规划是新教材中的新增内容,它们体现了现代数学思想,是衔接初、高等数学的桥梁。因此,这些新增内容必然成为支撑数学学科知识体系的重点知识,从而构成数学试题的主题的重要知识板块。如何凸现这些新内容在解题中的独特功能,便成为命题专家的“兴奋点”和新题型的增长点。

1. 利用导数研究函数的单调性、极值、最值问题,较之传统方法具有简捷明快、容易掌握等特别明显的优越性,为解决函数问题提供了有利的方法,使得函数问题得到简化。高考对导数在旧知识应用方面的考查,形成五大热点:热点 1——利用导数的几何意义处理曲线的公切线问题;热点 2——利用导数研究三次函数、分式函数的性质问题;热点 3——利用导数研究函数的单调性、单调区间以及已知函数的单调性,确定函数式中的参变量变化范围等问题;热点 4——利用导数处理含参数的恒成立不等式问题;热点 5——利用导数解决实际问题中的最

优化问题.

2. 由于向量具有几何和代数的“双重身份”,使它成为中学数学知识的一个交汇点和联系多项内容的媒介.因此,在研究其他许多问题时,它获得了广泛的应用.

(1) 有些平面解析几何在引入向量的坐标表示后,使向量之间的运算代数化,这样就可以将“形”和“数”紧密地结合在一起.因此,许多几何问题,特别像共线、共点、垂直等较难问题的处理,目标就是将几何问题坐标化、符号化、数量化,从而将推理转化为大家熟悉的代数运算.①一般研究夹角问题是从数量积入手;②研究长度问题则从模的运算性质切入;③研究共线、共点问题则从实数与向量的积着手.处理解析几何问题常常需要建立平面直角坐标系,选取合适的线段作为向量,将向量用坐标表示,利用平面向量的有关定理、公理列出方程从而获解.

(2) 新课程9(下B)引入了空间向量,给传统的立体几何内容注入了新的活力,为几何推理运算化开辟了新的途径.通过引入空间向量,用向量代数来处理立体几何问题,淡化了传统几何中的“形”到“形”的推理方法,从而降低了思维难度,使解题变得程序化,这是用向量解立体几何问题的独到之处.①空间图形的平行关系包括直线与直线平行,直线与平面平行,平面与平面平行,利用两个向量共线的条件和共面向量定理,它们都可以用向量方法来研究解决.②空间的线线、线面、面面垂直关系,都可以转化为空间两个向量的垂直问题来解决.在这里,两个向量垂直的充要条件是解决问题的主要工具.③在立体几何中设计的角有异面直线所成的角、直线与平面所成的角、二面角等.关于角的计算,均可归结为求两个向量的夹角问题.对于空间向量有“ $\cos <, > =$ ”.利用这一结论,我们可以较方便地处理立体几何中的角的问题.④立体几何中涉及的距离问题较多,如两点间的距离,点与线的距离,点、线与平面的距离,两异面直线的距离等,它是立体几何中的一个难点.利用向量的模及向量在单位上的射影可以求解有关的距离问题.

3. 概率统计无论是研究对象还是研究方法都与中学数学的其他内容迥然不同,它在中学数学中的地位是不可替代的.概率与统计在高中数学中具有独立性,由于和实际生活联系紧密,已逐渐成为高考的一个重要内容.在现实生活中,如何有效地配置资源,以便达到最好的效果,这是经常遇到的问题.优

化问题中经常出现的随机现象,概率与统计作为研究随机现象统计规律性的内容在优化问题中有着广泛的应用.这方面的题目是高考应用题的重点之一.值得强调说明的是,2004年高考新课程卷应用题,除了个别省份(江苏省考查线性规划、辽宁省考查应用导数求最值问题)外,其余的省份应用题都是不约而同地选择概率统计.

Ⅲ. 作为高考重点和热点的圆锥曲线方程,历来是高考命题人关注的焦点,远远超过其他各章,且题型、题量、难度保持相对稳定,并达到必要的深度,使得它构成数学高考试题的主题.因此,在复习时,要注意圆锥曲线的内在联系和知识的综合,并学好从圆锥曲线整体的高度考虑问题,在知识网络交汇点处思考问题、解决问题.圆锥曲线常考的四个热点是:曲线轨迹问题的探求、直线与圆锥曲线的位置关系问题、范围问题和最值问题.对于圆锥曲线综合题型,应用型题型和探索性题型均应给予充分重视,要从本质上寻找不同知识板块之间的横向联系,通过分类、梳理、综合,构建数学试题的结构框架,明确解题方向,在知识的迁移、组合、融会的创新意识和创新能力的题型上寻找解题突破口.

Ⅳ. 数学思想方法是数学的精髓,它蕴涵在数学知识发生、发展、应用的全过程,是数学中特有的解决问题的方法,对它的灵活运用,是数学能力的集中体现.因此,每年的高考试卷,都要对考生设计数学思想方法预定目标的考查.数学思想方法本身就包含着对数学概念的深刻理解,如“数形结合思想”;也包含着数学知识之间的逻辑关系,如“化归思想”;还包含着解决数学问题的全面性和条理性,如“分类讨论思想”.解题思路的形成离不开数学思想方法的运用.教材是以章节知识体系编排的,而数学思想方法却渗透在各个章节中,不成体系,复习中要对一些重点内容适度拓展深化,将分散在例题、习题中的相关知识、数学思想方法等集中整理,积累到自己的知识结构网络中,并做到融会贯通,熟练运用.

数学思想与数学方法的合理选择表现考生的思维敏捷性,把多样的数学思想方法置于“平凡”的数学问题之中,可以瞬间抓住问题本质,简便、快捷地把问题转化,减少错漏且赢得后继的解题时间,展现其较高的数学素养.所以,在高考模拟训练时,一定要结合数学思想方法的运用,即逐个认识、体会各个数学思想方法的本质特征、思维与操作程序,主动地、有意识地将数学思想方法引入自己的解题实践中,从而提高复习效率.

2005 年高考数学模拟试题 (一)

第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. (理) 设复数 $z = \frac{1+i}{1-i} + (1-i)^2$, 则 $(1+z)^7$ 的展开式的第五项是 ()

- (A) -21 (B) 35
(C) -21i (D) -35i

(文) 设 $n \geq 2$, 若 a_n 是 $(1+x)^n$ 的展开式中含 x^2 的系数, 则 $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} =$ ()

- (A) $2 - \frac{2}{n}$ (B) $1 - \frac{1}{n}$
(C) $1 - \frac{2}{n}$ (D) $2 - \frac{1}{n}$

2. 命题甲: $(\frac{1}{2})^x, 2^{1-x}, 2^{x^2}$ 成等比数列, 命题乙: $\lg x, \lg(x+1), \lg(x+3)$ 成等差数列, 则甲是乙的 ()

- (A) 充分非必要条件
(B) 必要非充分条件
(C) 充要条件
(D) 既非充分又非必要条件

3. 已知函数 $f(x)$ 的反函数是 $f^{-1}(x) = \log_{m+1}(\frac{2005}{x} + m)$ ($m > 0$), 则方程 $f(x) = 2005$ 的解集为 ()

- (A) $\{-1\}$ (B) $\{-1, 1\}$
(C) $\{1\}$ (D) \emptyset

4. 已知 $x > 0$, 有不等式 $x + \frac{1}{x} \geq 2, x + \frac{4}{x^2} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{4}{x^2} \geq 3, \dots$, 启发我们推广: $x + \frac{a}{x^n} \geq n+1$ ($n \in \mathbf{N}^+$), 则 a 的值为 ()

- (A) n^n (B) 2^n
(C) n^2 (D) 2^{n+1}

5. 如图 1-1, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle CAB = \angle CBA = 30^\circ$. AC, BC 边上的高分别为 BD, AE , 则以 A, B 为焦点且过 D, E 的椭圆和双曲线的

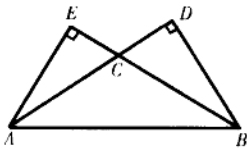


图 1-1

离心率的倒数和为 ()

- (A) $\sqrt{3}$ (B) 1 (C) $2\sqrt{3}$ (D) 2

6. (理) 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^x & (x < 0) \\ x+a & (x \geq 0) \end{cases}$, 在点 $x=0$ 处连续, 则 a 的值为 ()

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

(文) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} f(x+2) & (x < 2) \\ 2^{-x} & (x \geq 2) \end{cases}$, 则 $f(-3)$ 的值为 ()

- (A) 2 (B) 8 (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{2}$

7. 已知向量 $a = (\ln x, -2), b = (1, \ln x), x \in [e^{-1}, e]$, 方程 $a \cdot b = 3m$ 有解 (关于 x 的方程), 则 m 的取值范围为 ()

- (A) $m \geq \frac{1}{9}$ 或 $m \leq -\frac{1}{9}$

- (B) $-\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{1}{3}$

- (C) $m \geq \frac{1}{3}$ 或 $m \leq -\frac{1}{3}$

- (D) $-\frac{1}{9} \leq m \leq \frac{1}{9}$

8. (理) 已知 $f(3) = 2f'(3) = -2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 3f(x)}{x - 3}$ 的值为 ()

- (A) -4 (B) 8
(C) 0 (D) 不存在

(文) $y = \frac{1}{e}x^2$ 在 (e, e) 处的切线方程是 ()

- (A) $y = ex - 2$ (B) $y = ex + 2$
(C) $y = 2x + e$ (D) $y = 2x - e$

9. 设 $M = \{ \text{平面内的点}(a, b) \}, N = \{ f(x) \mid f(x) = a \cos 2x + b \sin 2x \}$, 给出 M 到 N 的映射 $f: (a, b) \rightarrow f(x) = a \cos 2x + b \sin 2x$, 则点 $(1, \sqrt{3})$ 的象 $f(x)$ 的最小正周期为 ()

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) 2π

- (C) π (D) $\frac{\pi}{4}$

10. 如果直线 $y = kx + 1$ 与圆 $x^2 + y^2 + kx + my - 4 = 0$ 交于 M, N 两点, 且 M, N 关于直线 $x + y = 0$ 对称, 则不等式组 $\begin{cases} kx - y + 1 \geq 0, \\ kx - my \leq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域

的面积是 ()

- (A) 2 (B) 1
(C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

11. 如图 1-2, 在棱长为 a 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 内有一个内切球 O , 过正方体中两条互为异面直线的棱 A_1A, BC 的中点 P, Q 作直线, 该直线被球面截在球内的线段的长为 ()

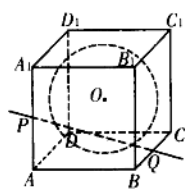
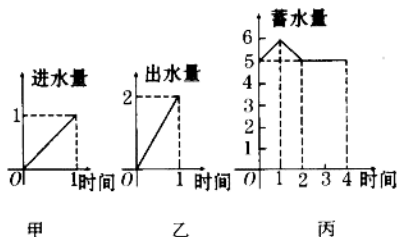


图 1-2

- (A) $(\sqrt{2} - 1)a$
(B) $\frac{a}{2}$
(C) $\frac{a}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{2}a}{2}$

12. 一水池有 2 个进水口, 1 个出水口, 每个水口进出水速度如图甲、乙所示, 某天 0 点到 4 点该水池的蓄水量如图丙所示.



给出以下三个论断: ①0 点到 1 点只进水不出水; ②1 点到 2 点不进水只出水; ③3 点到 4 点不进水也不出水, 则一定正确的论断是 ()

- (A) ① (B) ①②
(C) ①③ (D) ①②③

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线上.

13. (理) 已知随机变量 ξ 和 η , 其中 $\eta = 12\xi + 7$, 且 $E\eta = 34$, 若 ξ 的分布列如下表:

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	m	n	$\frac{1}{12}$

则 m 的值为 _____.

(文) 口袋中有 4 个白球, n 个红球, 从中随机地摸出两个球, 这两个球颜色相同的概率大于 0.6, 则 n 的最小值为 _____.

14. 将数字 1, 2, 3, ..., 9 这九个数字填写在如图 1-3 所示的 9 个空格中, 要求每一行从左到右依次增大, 每一列从上到下也依次增大, 当数字 4 固定在中心位置时, 则所有填写空格的方法共有 _____ 种 (用数字作答).

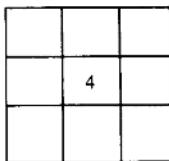


图 1-3

15. 对于任意正整数 n , 定义“ n 的双阶乘 $n!!$ ”如下:

当 n 是偶数时, $n!! = n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot \dots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$;

当 n 是奇数时, $n!! = n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$.

现有如下四个命题:

① $(2004!!) \cdot (2003!!) = 2004!$;

② $2004!! = 2^{1002} \cdot 1002!$;

③ $2004!!$ 的个位数是 0;

④ $2003!!$ 的个位数是 5.

其中正确的命题有 _____ (把符合要求的命题序号都填上).

16. 某人要买房, 随着楼层的升高, 上、下楼耗费的精力增多, 因此不满意度升高, 当住第 n 层楼时, 上下楼造成的不满意度为 n , 但高处空气清新, 嘈杂音较小, 环境较为安静, 因此随楼层升高, 环境不满意度降低, 设住第 n 层楼时, 环境不满意度为 $\frac{8}{n}$, 则此人应选 _____ 楼.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分) (理) 设 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 的边 BC, AC, AB 的长, 且 $a^2 + b^2 - mc^2 = 0$ (m 为常数), 若 $(\cot A + \cot B) \tan C = 1$, 求 m 的值.

(文) 已知 $\tan 2\theta = -2\sqrt{2}$, $\pi < 2\theta < 2\pi$, 求 $2\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin \theta - 1$ 的值.

$\sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$

18. (本小题满分12分)
如图1-4, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是正方形, 侧棱 $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $PD = CD$, E 是 PC 的中点, 作 $EF \perp PB$ 交 PB 于 F .

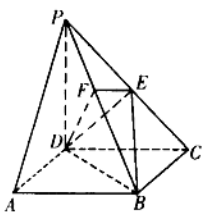


图1-4

(I) 证明: $PA \parallel$ 平面 EDB ;

(II) 证明: $PB \perp$ 平面 EFD ;

(III) 求二面角 $C-PB-D$ 的大小.

19. (本小题满分12分) 已知 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) 是定义在 \mathbf{R} 上的函数, 其图象交 x 轴于 A, B, C 三点. 若点 B 的坐标为 $(2, 0)$, 且 $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 和 $[4, 5]$ 上有相同的单调性, 在 $[0, 2]$ 和 $[4, 5]$ 上有相反的单调性.

(I) 求 c 的值;

(II) 在函数 $f(x)$ 的图象上是否存在一点 $M(x_0, y_0)$, 使得 $f(x)$ 在点 M 处的切线斜率为 $3b$? 若存在, 求出点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由;

(III) 求 $|AC|$ 的取值范围.

20. (本小题满分12分) 如图1-5, 甲、乙两人分别位于方格中 A, B 两处; 从某一时刻开始, 两人同时以每分钟一格的速度向东或西或南或北方向行走, 已知甲向东、西行走的概率均为 $\frac{1}{4}$, 向

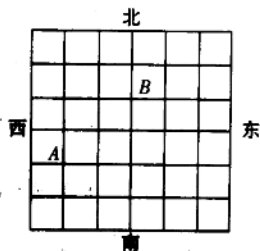


图1-5

南、北行走的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 p ; 乙向东、西、南、北行走的概率均为 q .

(I) 求 p 和 q 的值;

(II) 试判断最少几分钟, 甲、乙两人可以相遇, 并求出最短时间内可以相遇的概率.

21. (本小题满分12分)(理) 已知 O 为坐标原点, A 、 B 为抛物线 $y^2 = 4x$ 上的点, 如图 1-6, 问是否存在最小的 t 值, 使 $\triangle OAB$ 的面积 $S = t \cdot \tan \angle AOB$, 若不存在, 则说明理由; 若存在, 则求当 t 取最小值时, $\triangle OAB$ 的垂心 H 的轨迹方程.

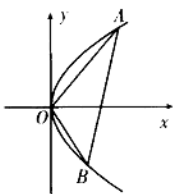


图 1-6

(文) 如图 1-7 所示, 点 $F(a, 0)$ ($a > 0$), 点 P 在 y 轴上运动, M 在 x 轴上, N 为动点, 且 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PF} = 0$, $\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{PM} = \mathbf{0}$.

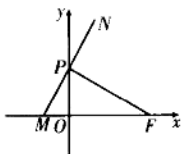


图 1-7

(I) 求点 N 的轨迹 C 的方程;
 (II) 过点 F 的直线 l (不与 x 轴垂直) 与曲线 C 交于 A 、 B 两点, 设点 $K(-a, 0)$, \overrightarrow{KA} 与 \overrightarrow{KB} 的夹角为 θ , 求证: $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

22. (本小题满分14分)(理) 已知函数 $f(x) = -x^3 + ax$ 在区间 $(0, 1)$ 上是单调递增函数.

(I) 求实数 a 的取值范围;

(II) 当 a 取最小值时, 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = b$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}f(a_n)$, 若 $b \in (0, 1)$, 求证: $a_n \in (0, 1)$;

(III) 在(2)的条件下, 是否存在正实数 p , 使得 $0 < \frac{a_n + p}{a_n - p} < 2$ 对一切正整数 n 都成立? 若存在, 则求出 p 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

(文) 已知数列 $\{a_n\}$, $a_1 = 1$, 点 $P(a_n, a_{n+1})$ ($n \in \mathbf{N}^+$) 在直线 $x - y + 1 = 0$ 上.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 函数 $f(n) = \frac{1}{n+a_1} + \frac{1}{n+a_2} + \dots + \frac{1}{n+a_n}$ ($n \in \mathbf{N}^+$, 且 $n \geq 2$), 求函数 $f(n)$ 的最小值;

(III) 设 $b_n = \frac{1}{a_n}$, S_n 表示数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和. 试问: 是否存在关于 n 的整式 $g(n)$, 使得 $S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1} = (S_n - 1)g(n)$ 对于一切不小于 2 的自然数 n 恒成立? 若存在, 写出 $g(n)$ 的解析式, 并加以证明; 若不存在, 请说明理由.

2005 年高考数学模拟试题(二)

第 I 卷(选择题 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,有且只有一项是符合题目要求的.

1. 在复平面内,复数 $i, 1, 4 + 2i$ 对应的点分别为 A, B, C , 现作一个平行四边形 $ABCD$, 则对角线 BD 的长是 ()

- (A) 5 (B) $\sqrt{13}$
(C) $\sqrt{15}$ (D) $\sqrt{17}$

2. 若 $p: -2 < m < 0, 0 < n < 1, q$: 关于 x 的方程 $x^2 + mx + n = 0$ 有两个小于 1 的正根, 则 p 是 q 的 ()

- (A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 非充分非必要条件

3. 角 β 的终边上有一点 $P(x, -\sqrt{3}) (x > 0)$, 且 $\cos \beta = \frac{x}{2}$, 则 $\tan \beta =$ ()

- (A) $-\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{3}$
(C) -2 (D) 2

4. 过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线与 x 轴的交点 E 作斜率为 k 的直线 L 与抛物线交于 A, B 两点, O 是抛物线的顶点, 若 OA, OB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 则 $k_1 k_2$ 的值是 ()

- (A) 2 (B) 3
(C) 4 (D) 与 k 有关的一个代数式

5. 如果函数 $y = f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 且满足 $f(m^2) > f(-m)$, 那么实数 m 的取值范围是 ()

- (A) $(-\infty, -1)$
(B) $(0, +\infty)$
(C) $(-1, 0)$
(D) $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

6. 在一个小鱼塘里有 6 条鲫鱼, 4 条鲤鱼, 某人每天随机地从小鱼塘里取出 3 条鱼放入水箱里进行观察, 观察后又把这 3 条鱼放回鱼塘里, 连续 3 天中, 这个人每天都取到两种鱼的概率是 ()

- (A) $(\frac{4}{5})^3$ (B) $(\frac{4}{5})^2$
(C) $(\frac{2}{3})^3$ (D) $(\frac{2}{3})^2$

7. 已知 $4a - 2b = (-2, 2\sqrt{3}), a = (0, \sqrt{3}), c =$

$(1, \sqrt{3}), |b| = 4$, 则 b 与 c 的夹角是 ()

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$
(C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

8. 从 5 个男同学和 4 个女同学中选出 3 个男同学和 2 个女同学分别参加语、数、外、理、化学科的竞赛, 每人参加 1 科, 则参赛的方法种数为 ()

- (A) 60 (B) 720
(C) 7200 (D) 86400

9. 若定义 $M - N = \{x | x \in M, \text{且 } x \notin N\}$, 则 $M - (M - N) =$ ()

- (A) M (B) N
(C) $M \cap N$ (D) $M \cup N$

10. 某收购站分两个等级收购小麦, 一等小麦每千克 a 元, 二等小麦每千克 b 元, 这里 $a > b$, 现有一等小麦 x 千克, 二等小麦 y 千克, 若以两种价格的平均数收购, 则收购站受益的条件是 ()

- (A) $x = y$ (B) $x > y$
(C) $x < y$ (D) $bx = ay$

11. 若函数 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 4})$, 则它的导函数 $y' =$ ()

- (A) $\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 4}}$ (B) $-\sqrt{x^2 - 4}$
(C) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$ (D) $\sqrt{x^2 - 4}$

12. 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 右焦点

F 作为 x 轴垂直的直线, 交双曲线于 A, B 两点, O 是双曲线的中心, 现将坐标平面沿 x 轴折成直二面角, 此时 $\angle AOB = 60^\circ$, 则双曲线的离心率为 ()

- (A) $\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{5}$
(C) $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

第 II 卷(非选择题 90 分)

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分.把答案填在题中的横线上.

13. 一圆与 y 轴相切, 圆心在直线 $x - 3y = 0$ 上, 且被直线 $x - y = 0$ 截得的弦长是 $2\sqrt{7}$, 则此圆的方程是 _____.

14. (理) 设随机变量 ξ 的分布列为 $P(\xi = k) =$

$\frac{c}{k(k+1)}, k=1,2,3$, 其中 c 为常数, 则 $P(0.5 < \xi < 2.5) =$ _____.

(文) 某地区的高中分为三类, 甲类学校共有学生 4000 人, 乙类学校共有学生 2000 人, 丙类学校共有学生 3000 人. 现欲抽样分析某次考试的情况, 若抽取 900 份试卷进行分析, 则从甲类学校抽取的试卷份数应为 _____.

15. 二项式 $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{2})^{40}$ 展开后, 所得的 x 的多项式中, 系数为有理数的项共有 _____ 项.

16. 一个正方体纸盒剪开后如图 2-1 所示, 在原正方体中有如下结论: (1) $AB \perp EF$; (2) AB 与 CM 成 60° 角; (3) EF 与 MN 异面; (4) $MN \parallel CD$. 其中正确结论的序号是 _____.

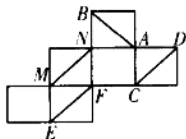


图 2-1

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分) 某企业年初有资金 1000 万元, 如果该企业经过生产经营每年资金增长百分之五十, 但每年年底都要扣除消费基金 x 万元, 余下资金投入再生产, 为实现经过 5 年资金达到 2000 万元 (扣除消费基金后), 那么每年扣除的消费资金 x 应该为多少万元? (精确到万元)

18. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且对于任意的实数 $a, f^{-1}(x+a)$ 与 $f(x+a)$ 互为反函数.

(I) 若 $f(1) = 2$, 求 $f(2)$ 的值;

(II) 判断 $f(x)$ 的单调性, 并给出证明.

19. (本小题满分 12 分) 是否存在锐角 α, β , 使得 (1) $\alpha + 2\beta = \frac{2\pi}{3}$ 和 (2) $\tan \frac{\alpha}{2} \tan \beta = 2 - \sqrt{3}$ 同时成立. 若存在, 求出 α 和 β 的值; 若不存在, 说明理由.

20. (本小题满分 12 分) 已知 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ s & u & v \end{vmatrix} = anv$

+ $muc + bps - sinc - mbv - upa$, 求函数 $f(x) =$

$\begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 0 & -x & 0 \\ 1 & 3x & 2x \end{vmatrix}$ 在 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 的最大值.

21. (本小题满分 12 分) 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 4, AD = 8, AA_1 = 4, M$ 为 B_1C_1 上一点, 且 $B_1M = 2$, 点 N 在线段 A_1D_1 上, $A_1D_1 \perp AN$, 求直线 AD 与平面 AMN 所成角的大小.

22. (本小题满分 14 分) PQ 是过横向型圆锥曲线焦点 F 的弦, PQ 的中垂线 l 交圆锥曲线的对称轴 (对于椭圆指的是长轴, 对于双曲线指的是实轴) 于一点 R , 圆锥曲线的离心率为 e , 试探索三个量 $|PQ|, |FR|, e$ 之间的最简关系式.

2005 年高考数学模拟试题(三)

第 I 卷(选择题 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,有且只有一项是符合题目要求的.

1. (理) 设全集 $U = \mathbf{R}$, 已知非空集合 $P = \{x \mid |x - 1| < a\}$ 与集合 $M = \{x \mid x^2 - 4 > 0\}$ 之间满足 $P \cap C_U M = P$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- (A) $0 < a < 3$ (B) $0 < a < 1$
(C) $0 < a \leq 3$ (D) $0 < a \leq 1$

(文) 定义 $A - B = \{x \mid x \in A, \text{且 } x \notin B\}$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $P = \{2, 3, 6\}$, 则 $P - M =$ ()

- (A) M (B) P
(C) $\{1, 4, 5\}$ (D) $\{6\}$

2. 已知函数 $f(x) = -\frac{x-a}{x-a-1}$ 的反函数的图象关于点 $(-1, 3)$ 成中心对称图形, 则实数 a 等于 ()

- (A) -4 (B) -2
(C) 3 (D) 2

3. 过圆 $x^2 + y^2 = 10x$ 内一点 $(5, 3)$ 有 k 条弦, 其长度成等差数列, 且最小弦长为数列的首项 a_1 , 最大弦长为数列的末项 a_k , 若公差 $d \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, 则 k 的取值不可能是 ()

- (A) 4 (B) 5
(C) 6 (D) 7

4. 若 $a = 1 - \sqrt{2}$, 则 $1 - C_{16}^1 a + C_{16}^2 a^2 - C_{16}^3 a^3 + \dots - C_{16}^{15} a^{15} + C_{16}^{16} a^{16}$ 的值为 ()

- (A) -2^8 (B) 2^8
(C) $(2 - \sqrt{2})^{16}$ (D) $(2 + \sqrt{2})^{16}$

5. 已知向量 $a = (\cos\theta, \sin\theta)$, 向量 $b = (\sqrt{3}, -1)$, 则 $|2a - b|$ 的最大值、最小值分别是 ()

- (A) $4\sqrt{2}, 0$ (B) $4, 4\sqrt{2}$
(C) $16, 0$ (D) $4, 0$

6. 甲、乙、丙三人参加一次考试, 他们合格的概率分别为 $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}$, 那么恰有 2 人合格的概率是 ()

- (A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{7}{15}$
(C) $\frac{11}{30}$ (D) $\frac{1}{6}$

7. 将一张坐标纸折叠一次, 使得点 $(0, 2)$ 与 $(-2, 0)$ 重合, 且点 $(2004, 2005)$ 与点 (m, n) 重合, 则 $m - n$ 的值为 ()

- (A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) -2

8. (理) 设 $1 + (1+x)^2 + (1+2x)^2 + (1+3x)^2 + \dots + (1+nx)^2 = a_0 + a_1x + a_2x^2$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0^2}{a_1}$ 的值为 ()

- (A) 2 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 0

(文) 设 $1 + (1+x)^2 + (1+2x)^2 + (1+3x)^2 + \dots + (1+nx)^2 = a_0 + a_1x + a_2x^2$, 则 $\frac{a_0^2}{a_1}$ 的值为 ()

- (A) $\frac{n}{n+1}$ (B) $\frac{n+1}{n}$
(C) 1 (D) $\frac{n^2}{(n+1)^2}$

9. 已知三次函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (4m-1)x^2 + (15m^2 - 2m - 7)x + 2$ 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 是增函数, 则 m 的取值范围为 ()

- (A) $m < 2$ 或 $m > 4$ (B) $-4 < m < -2$
(C) $2 < m < 4$ (D) 以上皆不正确

10. 下列四个命题中正确的是 ()

- (A) α, β 为第一象限的角, $\alpha > \beta$, 则 $\cos\alpha < \cos\beta$
(B) $\cos\alpha \cdot \cos\beta = 1$, 则 $\sin(\alpha + \beta) = 0$

(C) 函数 $y = \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 单位, 得 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图象

- (D) $y = \sin(\frac{2}{3}x + \frac{7\pi}{2})$ 没有奇偶性

11. 已知 A, B 是抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上的两个点, O 为坐标原点. 若 $|OA| = |OB|$, 且 $\triangle AOB$ 的垂心恰好是抛物线的焦点, 则直线的方程为 ()

- (A) $x = p$ (B) $x = 3p$
(C) $x = \frac{5}{2}p$ (D) $x = \frac{3}{2}p$

12. 若正四棱锥 $S - ABCD$ 的侧棱长为 $\sqrt{2}$, 底面边长为 $\sqrt{3}$, E 是 SA 的中点, 则异面直线 BE 与 SC 所成角的大小为 ()

- (A) 60° (B) 45° (C) 30° (D) 90°

第 II 卷(非选择题 90 分)

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分.把答案填在题中横线上.

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}, a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n^2 - 1} (n \geq 2)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 _____.

14. 如果一个正整数形如“ $a_1 a_2 a_3$ ”满足 $a_1 < a_2$ 且 $a_3 < a_2$, 则称这样的三位数为凸数(如 120, 363, 374), 那么所有凸数的个数是 _____.

15. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条准线与两条渐近线交于 A, B 两点, 其相应焦点为 F , 以 AB 为直径的圆恰好过点 F , 则双曲线的离心率为 _____.

16. 在正方体 $ABCD - A_1 B_1 C_1 D_1$ 中, 点 N 在 BD 上, 点 M 在 $B_1 C$ 上, 且 $CM = DN$, 则 MN 和平面 $AA_1 B_1 B$ 的关系是 _____. (在“平行、垂直、相交、在平面内”中任选一个)

三、解答题:本大题共有 6 小题,共 74 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分) 已知偶函数 $f(x) = \cos\theta \sin x - \sin(x - \theta) + (\tan\theta - 2) \sin x - \sin\theta$ 的最小值是 0, 求 $f(x)$ 的最大值及此时 x 的集合.

18. (本小题满分 12 分) 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = \frac{1 - ax}{x}, x \in [0, +\infty)$, 设 $0 < x_1 < \frac{2}{a}$, 记曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_1, f(x_1))$ 处的切线为 l .

(I) 求 l 的方程;

(II) 设 l 与 x 轴的交点为 $(x_2, 0)$, 证明: $0 < x_2 \leq \frac{1}{a}$.

19. (本小题满分 12 分) 某工厂规定:如果工人 在一个季度里有 1 个月完成生产任务, 则可得奖金 80 元;如果有 2 个月完成生产任务, 则可得奖金 240 元;如果有 3 个月完成生产任务, 则可得奖金 320 元;如果工人 3 个月都未完成任务, 则没有奖金. 假设某工人每月完成任务的概率为 $\frac{1}{2}$, 求:

(I) 该工人一个季度里所得奖金 ξ 的分布列;

(II) 该工人一个季度里所得奖金 ξ 的期望.

20. (本小题满分 12 分) 如图 3-1, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, O 为正方形 $ABCD$ 的中心, M 为 D_1D 的中点.

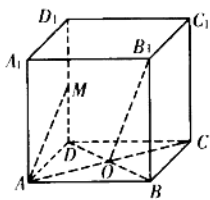


图 3-1

(I) 求证: 异面直线 B_1O 与 AM 垂直;

(II) 求二面角 $B - AM - C$ 的大小;

(III) 若正方体的棱长为 a , 求三棱锥 $B_1 - AMC$ 的体积.

21. (本小题满分 12 分) 设数列 $\{a_n\}$ 是以 a 为首项, q 为公比的等比数列, 令 $b_n = 1 - a_1 - a_2 - a_3 - \dots - a_n$, $c_n = 2 - b_1 - b_2 - b_3 - \dots - b_n (n \in \mathbf{N}^*)$.

(I) 试用 a, q 表示 b_n 和 c_n ;

(II) 若 $a < 0, q > 0$, 且 $q \neq 1$, 试比较 c_n 与 c_{n+1} 的大小;

(III) 是否存在实数对 (a, q) , 其中 $q \neq 1$, 使 $\{c_n\}$ 成等比数列, 若存在, 求出实数对 (a, q) 和 $\{c_n\}$; 若不存在, 请说明理由.

22. (本小题满分 14 分) 已知向量 $\vec{OA} = (2, 0)$, $\vec{OC} = \vec{AB} = (0, 1)$, 动点 M 到定直线 $y = 1$ 的距离等于 d , 并且满足 $\vec{OM} \cdot \vec{AM} = k(\vec{CM} \cdot \vec{BM} - d^2)$, 其中是坐标原点, k 是参数.

(I) 求动点 M 的轨迹方程, 并判断曲线类型;

(II) 当 $k = \frac{1}{2}$ 时, 求 $|\vec{OM} + 2\vec{AM}|$ 的最大值与最小值;

(III) 如果动点 M 的轨迹是一条圆锥曲线, 其离心率 e 满足 $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq e \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, 求实数 k 的取值范围.

2005 年高考数学模拟试题 (四)

第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 与 $\sin 2005^\circ$ 的值最接近的数是 ()

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $-\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. (理) $\left(\frac{\sqrt{2}i}{1+i}\right)^{100}$ 的值等于 ()

(A) 1 (B) -1

(C) i (D) -i

(文) 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $M = \{3, 4, 5\}$, $N = \{1, 3, 6\}$, 则集合 $\{2, 7\}$ 等于 ()

(A) $M \cap N$ (B) $\complement_U M \cap \complement_U N$

(C) $\complement_U M \cup \complement_U N$ (D) $M \cup N$

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (a-0.5)(x-1), & x < 1, \\ \log_a x, & x \geq 1 \end{cases}$

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是减函数, 则 a 的取值范围是 ()

(A) $0 < a < 1$ (B) $0 < a < 0.5$

(C) $a < 0.5$ (D) $0.5 < a < 1$

4. 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(1-x) (x < 1)$ 的反函数是 ()

(A) $y = 1 + 2^{-x} (x \in \mathbf{R})$

(B) $y = 1 - 2^{-x} (x \in \mathbf{R})$

(C) $y = 1 + 2^x (x \in \mathbf{R})$

(D) $y = 1 - 2^x (x \in \mathbf{R})$

5. 已知 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内的一点, 若 $\vec{CP} = \lambda \vec{PA} + \vec{PB}$, 其中 $\lambda \in \mathbf{R}$, 则点 P 一定在 ()

(A) $\triangle ABC$ 的内部 (B) BC 边所在直线上

(C) AB 边所在直线上 (D) AC 边所在直线上

6. 对于二项式 $\left(\frac{1}{x} + x^3\right)^n$, 四位同学作出了四种判断: ()

① 存在 $n \in \mathbf{N}^*$, 展开式中有常数项;

② 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 展开式中没有常数项;

③ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 展开式中没有 x 的一次项;

④ 存在 $n \in \mathbf{N}^*$, 展开式中有 x 的一次项.

上述判断中正确的是 ()

(A) ① 与 ③ (B) ② 与 ③

(C) ② 与 ④ (D) ① 与 ④

7. 过点 $P\left(-1, \frac{5}{2}\right)$ 引抛物线 $x^2 = 4y$ 的弦 MN ,

使 P 为弦 MN 的中点, 则弦 MN 所在的直线方程为 ()

(A) $x - 2y + 6 = 0$ (B) $x + 2y - 4 = 0$

(C) $x - 4y + 11 = 0$ (D) $x + 2y - 9 = 0$

8. 已知双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0, a \neq b)$, 若过其右焦点、斜率为 -1 的直线与右准线

交于点 A , 与一条渐近线 $y = -\frac{b}{a}x$ 交于点 B , 且 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 7b^2$, O 为坐标原点, 则双曲线的离心率 e 等于 ()

(A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (B) 2

(C) $\sqrt{5}$ (D) $2\sqrt{5}$

9. 已知向量 $\vec{OB} = (2, 0)$, $\vec{OC} = (2, 2)$, $\vec{CA} = (\sqrt{2}\cos\alpha, \sqrt{2}\sin\alpha)$, 则 \vec{OA} 与 \vec{OB} 的夹角的范围是 ()

(A) $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ (B) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}\right]$

(C) $\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$ (D) $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$

10. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 底面 ABC , $\angle ABC = 90^\circ$, 二面角 $P-BC-A$ 等于 30° , $PA = BC = 1$, 则过 P, A, B, C 四点的球面的面积是 ()

(A) 20π (B) 12π

(C) 8π (D) 5π

11. 若 $x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}^*$, 定义: $M_n^x = x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1)$, 例如: $M_5^3 = (-5) \times (-4) \times (-3) \times (-2) \times (-1) = -120$, 则函数 $f(x) = xM_{10}^{19}$ 的奇偶性为 ()

(A) 是偶函数而不是奇函数

(B) 是奇函数而不是偶函数

(C) 既是奇函数又是偶函数

(D) 既不是奇函数又不是偶函数

12. 实系数方程 $x^2 + ax + 2b = 0$ 的一个根大于 0 且小于 1, 另一个根大于 1 且小于 2, 则 $\frac{b-2}{a-1}$ 的取值范围是 ()

(A) $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ (B) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

- (C) $(-\frac{1}{2}, 1)$ (D) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

第 II 卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分.把答案填在题中的横线上.

13. 表示图 4-1 中阴影部分的二元一次不等式组为 _____.

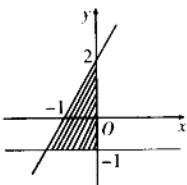


图 4-1

14. (理) 随机变量 $\xi \sim B(n, p)$ 且 $E\xi = 2.4, D\xi = 1.44$, 则 n, p 的值分别为 _____.

(文) 某班有学生 50 人, 其中男生 30 人, 女生 20 人, 为了了解这 50 名学生的与身体状况有关的某项指标, 今决定采用分层抽样的方法, 抽取一个容量为 20 的样本, 则男生张某被抽中的概率是 _____.

15. 利用函数 $f(t) = 12 + 3\sin[\frac{2\pi}{365}(t - 81)]$ 可用来估计某一天的白昼时间的长短, 其中 $f(t)$ 表示白昼的小时数, t 是某天的序号, $t = 0$ 表示 1 月 1 日, 依次类推 $0 \leq t \leq 365$, 若二月份 28 天, 则这个地区一年中白昼最长的大约是 _____ 月 _____ 日.

16. 64 个正数排成 8 行 8 列, 如下所示.

$$a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{18}$$

$$a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{28}$$

$$\dots \ \dots \ \dots \ \dots$$

$$a_{81} \ a_{82} \ \dots \ a_{88}$$

在符号 a_{ij} ($1 \leq i \leq 8, 1 \leq j \leq 8$) 中, i 表示该数所在行数, j 表示该数所在的列数. 已知每一行都成等差数列, 公差为 d , 而每一列都成等比数列(且每列公比都相等), 若 $a_{11} = \frac{1}{2}, a_{24} = 1, a_{32} = \frac{1}{4}$, 则 $a_{ij} =$ _____.

三、解答题:本大题共 6 小题, 共 74 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = 4\sin x \sin^2(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) + \cos 2x$.

(I) 设 $\omega > 0$ 为常数, 若 $y = f(\omega x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$ 上是增函数, 求 ω 的取值范围;

(II) 设集合 $A = \{x \mid \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}\}, B = \{x \mid |f(x) - m| < 2\}$, 若 $A \subseteq B$, 求实数 m 的取值

范围.

18. (本小题满分 12 分) 某班举行电脑汉字输入测试, 共有 50 名学生参加, 参加的学生每分钟输入汉字个数的频率条形分布图如图 4-2 所示:

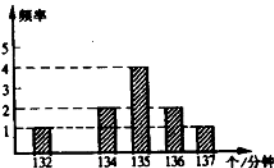


图 4-2

(I) 问输入字数每分钟 136 个的学生人数是多少?

(II) 从该班 50 名学生中选 3 名学生, 问这 3 名学生的测试平均成绩恰好为每分钟输入 135 个汉字的概率是多少?

19. (本小题满分 12 分) 过抛物线 $y = f(x)$ 上的一点 $A(-\frac{1}{2}, 0)$ 的切线与直线 $2x + y - 1 = 0$ 关于 y 轴对称.

(I) 求 $f'(-\frac{1}{2})$ 的值;

(II) 求切线的方程.