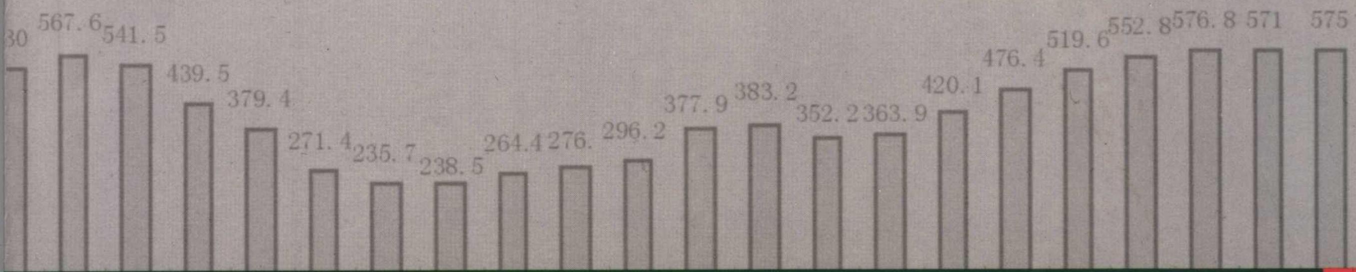
J I N G J I S H U X U E



经济数学

JINGJI SHUXUE

○主编　余梦涛

电子科技大学出版社

经济数学

主　　编　余梦涛

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学/余梦涛主编.—成都:电子科技大学出版社,2006.3

ISBN 7-81114-052-7

Ⅰ.经… Ⅱ.余… Ⅲ.经济数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 008824 号

经 济 数 学

主编 余梦涛

出　　版:电子科技大学出版社　　(成都市建设北路二段四号)
策划编辑:谢应成
责任编辑:张蓉莉　　发　　行:新华书店
印　　刷:四川广播电视大学印刷厂
开　　本:787×1092　1/16　　印张 12　字数 306 千字
版　　次:2006 年 3 月第一版
印　　次:2006 年 3 月第一次印刷
书　　号:ISBN 7-81114-052-7/O·1
定　　价:18.50 元

目　录

第一章　函　　数

函数是高等数学的主要研究对象，它的实质是变量之间的对应关系。为了了解这一点，下面给出有关的概念以及函数的属性。

§1－1　函数的概念

一、常量与变量

在某一过程中，取值不变的量称为常量。常用 a、b、c 等符号表示；如一个盒子的长、宽、高、体积、质量等都是常量。而在某一过程中可以取不同值的量称为变量。常用 x、y、z 等符号表示。如物体运动的速度，人的生长高度等都是变量。另外，加热密封器内的气体，气体的体积和气体的分子个数保持一定是常量。而气体的温度和压力是变量。成本是生产者用于生产商品的费用，成本可分为两类，固定成本和变动成本。在短期内，固定成本不变为常量，变动成本(包括能源费用、原材料费用、劳动者的工资等等) 为变量。

应该指出，常量和变量的概念是相对的，某些变量在相应的限制条件下可以看作常量，如某一天某一时刻的气温可以看作一个常量，而要考虑一天之内的气温，它就是一个变量。

二、函数的概念及表示

在同一自然现象或变化过程中，往往有多个变量在变化着，这些变量并不是孤立地在变化，而是相互联系并遵循着一定的变化规律。我们知道，路程随着时间的变化而变化，气温随着时间的变化而变化，如何科学准确地表示它们之间的变化关系呢？

我们考虑两个变量之间的简单情况。

例 1　在自由落体运动中，物体下落的距离 S 随着时间 T 的变化而变化，下落距离 S 与时间 T 之间的依赖关系可以用下式表示：

$$S = \frac{1}{2}gt^2$$

其中 g 为重力加速度。

例 2　圆的面积 A 与半径 r 的关系可表示为　　$A = \pi r^2$

例 3　设出租车载客收费标准为5公里以内的路程收费10元，此后每公里加价 1.20 元，由此出租车载客时的收费 F 与行驶公里数 S 的关系可表示为：

$$F = \begin{cases} 10 & 0 < S \leqslant 5 \\ 10 + 1.2(S - 5) & S > 5 \end{cases}$$

从以上例子可以看出，在研究事物内部，事物与事物各因素间的关系时，我们常常通过对客观事物的分析，建立各因素之间的关系，有了这种关系，可以充分揭示各因素之间的数量关系。这对于

我们分析事物和研究事物打下了重要基础，1837年德国数学家狄利克雷（*Dirichlet* 1805 ~ 1859）才提出至今通用的函数定义，使函数概念更加明确，函数概念是数学中的一个基本而重要的概念，而微积分的主要研究对象是函数，所以下面给出函数的有关概念及定义。

1. 函数的概念

定义1.1 设 x 和 y 是两个变量，D 是给定的数集，如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数。记作：

$$y = f(x)(x \in D)$$

其中 x 称为自变量，y 为因变量，数集 D 称为函数的定义域，$M = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域。

如图1－1标明函数的定义域、值域、对应法则、自变量、因变量（函数）等。

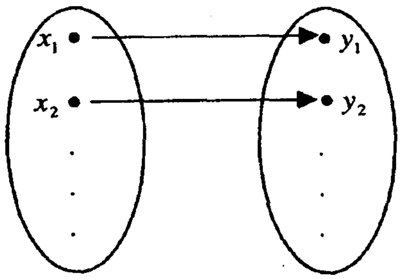


图 1－1

在函数的定义中，并没有要求自变量变化时，函数值一定要变，只要求对于自变量 $x \in D$，都有确定的 $y \in M$ 与之对应。因此，常量 $y = c$ 也符合函数的定义，因为当 $x \in R$ 时，所对应的 y 值都是确定的常数 c，即常量 $y = c$ 为函数（常数函数）。

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值只有一个，这种函数称为单值函数，否则称为多值函数。如由 $x^2 + y^2 = 1$ 所确定的函数 $y = f(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$ 是多值函数。

2. 函数的记号及函数值

我们知道，y 是 x 的函数可以记为 $y = f(x)$。但在同一个问题中，如需讨论几个不同的函数，为区别清楚起见，可用不同的函数记号来表示。

例如，以 x 为自变量的函数可表示为 $F(x)$、$f(x)$、$y(x)$、$s(x)$……

当自变量 x 取某一个值 x_o，函数 $f(x)$ 的对应值称为函数当 $x = x_o$ 时的函数值，记为 $f(x_o)$ 或写成 $f(x) = \Big|_{x = x_o}$

例4 已知函数 $f(x) = x^2 + 1$ 求 $f(2)$、$f(x)\Big|_{x = s_o + t}$、$f[f(x)]$

解 $f(2) = 2^2 + 1 = 5$

$$f(x)\Big|_{x = s_o + t} = (x_o + t)^2 + 1 = x_o^2 + 2tx_o + t^2 + 1$$

$$f[f(x)] = [f(x)]^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$$

例5 已知 $f(x + 2) = 2x^2 + 3x - 1$ 求 $f(x)$

解 设 $x + 2 = t$ 则 $x = t - 2$

于是
$$\begin{aligned} f(t) &= 2(t - 2)^2 + 3(t - 2) - 1 \\ &= 2(t^2 - 4t + 4) + 3t - 6 - 1 \\ &= 2t^2 - 5t + 1 \end{aligned}$$

故 $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$

例6 已知 $f(x) = \begin{cases} x + 2 & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ x^2 & 2 < x \leqslant 4 \end{cases}$ 求 $f(0)$、$f(1)$、$f(3)$、$f(x + 1)$

解 $f(0) = 0 + 2 = 2$ $f(1) = 1 + 2 = 3$

$f(3) = 3^2 = 9$

$$f(x+1) = \begin{cases} (x+1)+2 & 0 \leqslant x+1 \leqslant 2 \\ (x+1)^2 & 2 < x+1 \leqslant 4 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x+3 & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ (x+1)^2 & 1 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

3. 邻域、函数的定义域

中学已学过集合、闭区间和开区间等概念，邻域也是一个经常用到的概念。

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta > o$，数集 $\{x \mid |x-a| < \delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域，记为 $\upsilon(a、\delta)$ 即

$$\upsilon(a、\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\} = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$$

点 a 称为邻域 $\upsilon(a、\delta)$ 的中心，δ 称为邻域 $\upsilon(a、\delta)$ 的半径。

在数轴中，$\upsilon(a、\delta)$ 表示与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体，即开区间 $(a-\delta、a+\delta)$ 如图 1－2 所示。

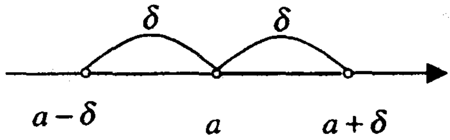


图 1－2

点 a 的 δ 邻域去掉中心后，称为点 a 的 δ 去心邻域，记作 $\upsilon(\hat{a}、\delta)$，即

$\upsilon(\hat{a}、\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\} = \{x \mid a-\delta < x < 0 \text{或} 0 < x < a+\delta\}$

在数轴上，它表示开区间 $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ 如图 1－3 所示。

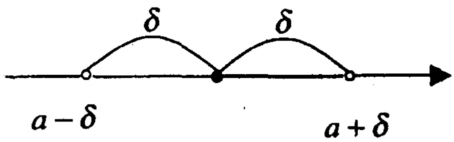


图 1－3

关于定义域，如果所讨论的函数来自某个实际问题，那么其定义域应符合实际意义。如果不考虑所讨论的函数的实际背景，那么其定义域应使得它在数学上有意义。

例 7 求下列函数的定义域

(1) $y = \dfrac{1}{x+2} + \sqrt{4-x^2}$

(2) $y = \dfrac{1}{\ln(x-1)} + \sqrt{5-x}$

解 (1) 对于 $\dfrac{1}{x+2}$ 要求 $x+2 \neq 0$ 即 $x \neq -2$

对于 $\sqrt{4-x^2}$ 要求 $4-x^2 \geqslant 0$ 从而得出 $-2 \leqslant x \leqslant 2$

因此函数 $y = \dfrac{1}{x+2} + \sqrt{4-x^2}$ 的定义域 $D:(-2 \quad 2]$

(2) 对于 $\ln(x-1)$ 要求 $x-1>0$ 即 $x>1$

对于 $\dfrac{1}{\ln(x-1)}$ 要求 $\ln(x-1) \neq 0$ 于是 $x-1 \neq 1$ 即 $x \neq 2$

对于 $\sqrt{5-x}$ 要求 $5-x \geqslant 0$ 即 $x \leqslant 5$

因此函数 $y = \dfrac{1}{\ln(x-1)} + \sqrt{5-x}$ 的定义域 $D:(1,2) \cup (2,5]$

例 8 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-3} & \geqslant 0 \\ \sqrt{x+1} & x < 0 \end{cases}$，求定义域。

解　这是分段函数。

当 $x \geqslant 0$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ 必须满足 $x \geqslant 0$ 且 $x-3 \neq 0$，$f(x)$ 才有意义，得 $x \geqslant 0$ 且 $x \neq 3$。所以当 $x \geqslant 0$ 时的定义域为 $[0,3) \cup (3,+\infty)$。

当 $x<0$ 时，$f(x)=\sqrt{x+1}$ 必须满足 $x+1 \geqslant 0$，$f(x)$ 才有意义，于是，$-1 \leqslant x<0$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $D:[-1,3) \cup (3,+\infty)$

4. 函数的表示法

函数常用的表示方法有三种：解析法、列表法和图形法。

(1) 解析法：

$$y=f(x)$$

如函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^{2}}}$ 的定义域 $D:(-3、3)$，值域 $M:(\dfrac{1}{3},+\infty)$

函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x \geq 0 \\ -x & x<0\end{cases}$ 定义域 $D:(-\infty、+\infty)$，值域 $M:(0、+\infty)$。

解析法的优点是便于数学上的分析和计算。

(2) 列表法：

如平方表，对数表，三角函数值表等，都是将一系列的自变量值及其相对应的函数值列成表来表示，列表法表示函数的优点是：直观。可以直接由自变量数值查到相应的函数值。

(3) 图形法：

股票的 K 线图，心电图，气温曲线等等都是采用的图形法。通过图形可以较为清楚地看出因量是如何依赖自变量的变化而变化。其优点是直观、通俗、容易比较。

三、函数的几种特性

1. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$，对于任意的 $x \in D$，有 $-x \in D$，若有 $f(-x)=f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 是偶函数；若有 $f(-x)=-f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 是奇函数；如果 $f(x)$ 既不是偶函数，又不是奇函数，称 $f(x)$ 为非奇非偶函数。

例如函数 $y=\sin x$　与 $y=x^{3}$ 是奇函数。

$y=\cos x$　与 $y=x^{2}$ 是偶函数。

例 9　讨论下列函数的奇偶性。

(1) $f(x)=24x^{4}+3x^{2}$　　(2) $f(x)=x^{3}+x^{\frac{1}{3}}$

(3) $f(x)=x.\dfrac{a^{x}-1}{a^{x}+1}$　　(4) $f(x)=\sin x-\cos x+1$

解

(1)　$f(-x)=24(-x)^{4}+3(-x)^{2}=24x^{4}+3x^{2}=f(x)$

所以 $f(x)=24x^{4}+3x^{2}$ 是偶函数。

(2)　$f(-x)=(-x)^{3}+(-x)^{\frac{1}{3}}=-x^{3}-x^{\frac{1}{3}}=-(x^{3}+x^{\frac{1}{3}})=-f(x)$

所以 $f(x)=x^3+x^{\frac{1}{3}}$ 是奇函数。

(3) $f(-x)=-x.\dfrac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=-x\dfrac{\dfrac{1}{a^x}-1}{\dfrac{1}{a^x}+1}=-x\dfrac{1-a^x}{1+a^x}$

$$=-x.\frac{-(a^x-1)}{a^x+1}=x.\frac{a^x-1}{a^x+1}=f(x)$$

所以 $f(x)=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$ 是偶函数。

(4) $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1$

$$=-(\sin x+\cos x-1)$$

所以 $f(x)=\sin x-\cos x+1$ 是非奇非偶函数。

2. 函数的单调性

对于区间 D 内任意两点 x_1、x_2，若 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 D 内是单调增加的。若当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 D 内是单调减少的。

例 10 讨论下列函数的单调性。

(1) $y=x^2\quad x\in(0,+\infty)$,

(2) $y=\dfrac{1}{x}\quad x\in(0,1)$

解 (1) 对任意 $0<x_1<x_2$ 则 $x_2-x_1>0$

因为 $f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)>0$

所以 $f(x_2)-f(x_1)>0$ 故 $f(x_2)>f(x_1)$

函数 $y=f(x)=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调增加函数。

(2) 在区间 $(0,1)$ 内任取 x_1、x_2，设 $x_1<x_2$ 则 $x_1-x_2<0$

因为 $f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{x_1-x_2}{x_1x_2}<0$

所以 $f(x_2)<f(x_1)$

故 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内为单调减少函数。

3. 函数的有界性

若存在正数 M，使得函数满足 $|f(x)|\leq M$，则称 $f(x)$ 在 D 上是有界的，否则是无界的。

如 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 $|\sin x|\leq 1$，所以 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界函数，而 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是无界函数。

4. 函数的周期性

若函数 $f(x)$，若存在正数 T，对任意 $x\in D$，都满足 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是周期函数，T 为周期。周期函数的周期 T 通常是指它的最小正周期。

如：$y=\sin x\qquad y=\cos x\qquad T=2\pi$

$y=\tan x\qquad y=\cot x\qquad T=\pi$

都为周期函数。

$y = A.\sin(wt + \psi)$ $(w > 0)$ 是以 $\frac{2\pi}{w}$ 为周期的周期函数。

练习 1－1

1. 市内公用电话通话时间 3 分钟内收费 0.3 元，3 分钟以后，每分钟加收 0.15 元，请列出电话费与通话时间的函数关系。

2. 确定下列函数的定义域

(1) $y = \frac{2}{x^2 - 3x + 2}$ (2) $y = \sqrt{\frac{1}{x+1}}$

(3) $y = \sqrt{x-2} + \frac{1}{x-3} + lg(5-x)$ (4) $y = \begin{cases} -x & -1 \leqslant x < 0 \\ \sqrt{3-x} & 0 < x < 2 \end{cases}$

3. 已知 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$，求 $f(-x)$；$f(x)+1$；$f(\frac{1}{x})$；$f[f(x)]$.

4. 下列各组函数是否相同？为什么？

(1) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $g(x) = x + 1$

(2) $f(x) = 1$ 与 $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

(3) $f(x) = x$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$

5. 设 $y(x) = \begin{cases} |\sin x| & |x| < \frac{\pi}{3} \\ 0 & |x| \geqslant \frac{\pi}{3} \end{cases}$ 求 $y(\frac{\pi}{6})$，$y(\frac{\pi}{4})$，$y(-\frac{\pi}{4})$，$y(-2)$。

6. 确定下列函数的奇偶性。

(1) $f(x) = x(x-1)(x+1)$ (2) $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$ $(a > 0、a \neq 1)$

(3) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ (4) $f(x) = \cos x + \sin x + x$

7. 研究下列函数在指定区间上的单调性。

(1) $y = x^2$ $x \in (-1, 0)$ (2) $y = \lg x$ $x \in (0, +\infty)$

(3) $y = 1 - \lg x$ $\in (0, +\infty)$ (4) $y = x^2 - x + 1$ $x \in (-\infty, +\infty)$

§1－2 初等函数

一、基本初等函数

基本初等函数为以下六种函数

1. 常数函数 $y = c$ （c 为常数）
2. 幂函数 $y = x^\mu$ （μ 是常数）
3. 指数函数 $y = a^x$ （a 是常数，且 $a > 0, a \neq 1$） $x \in (-\infty, +\infty)$
4. 对数函数 $y = \log_a x$（a 是常数，且 $a > 0, a \neq 1$） $x \in (0, +\infty)$

5. 三角函数

正弦函数 $y = \sin x \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad y \in [-1, 1]$

余弦函数 $y = \cos x \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad y \in [-1, 1]$

正切函数 $y = \tan x \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \quad k \in Z \quad y \in (-\infty, +\infty)$

余切函数 $y = \cot x \quad x \neq k\pi \quad k \in Z \quad y \in (-\infty, +\infty)$

6. 反三角函数

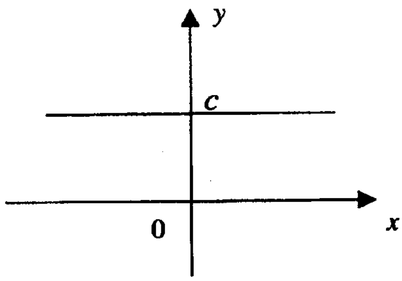
反正弦函数 $y = \arcsin x \quad x \in [-1, 1] \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

反余弦函数 $y = \arccos x \quad x \in [-1, 1] \quad y \in [0, \pi]$

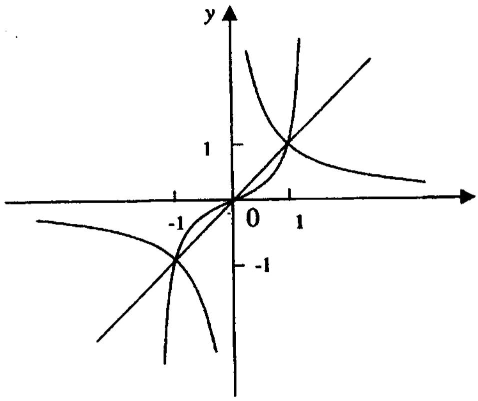
反正切函数 $y = \arctan x \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad y \in (-\frac{\pi}{2} \ \frac{\pi}{2})$

反余切函数 $y = \text{arccot}\, x \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad y \in (0, \pi)$

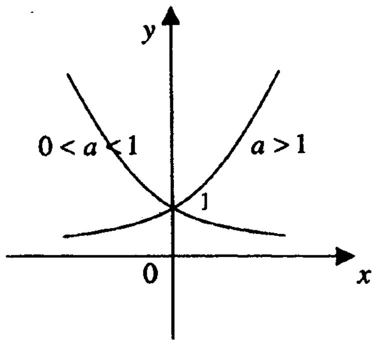
基本初等函数的图像如图 1 - 4 所示



(a) $y = c$（c 是常数）

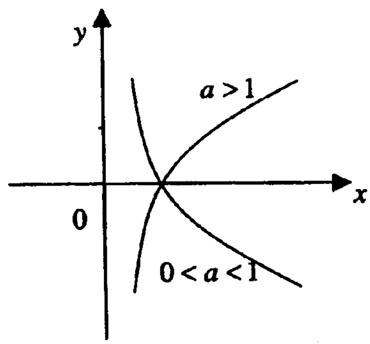


(b) $y = x^{\mu}$（μ 是常数）



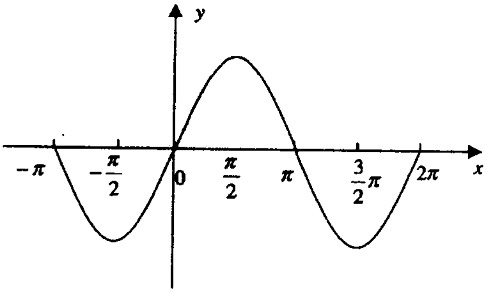
(c) $y = a^{x}$

（a 是常数且 $a > 0, a \neq 1$）

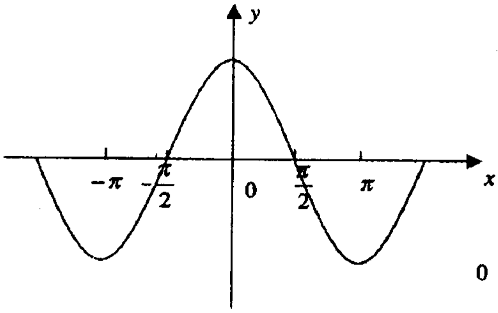


(d) $y = \log a^{x}$

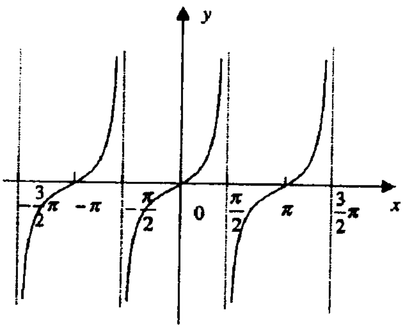
（a 是常数且 $a > 0, a \neq 1$）



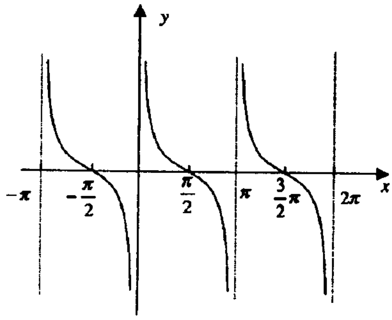
(e) $y = \sin x$



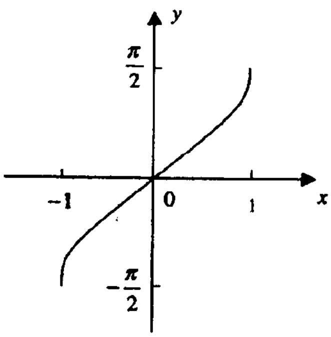
(f) $y = \cos x$



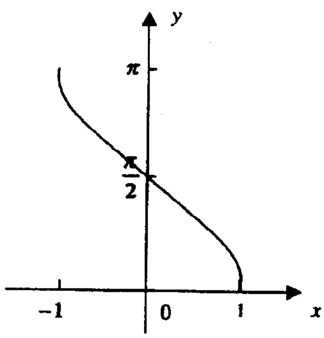
(g) $y = \tan x$



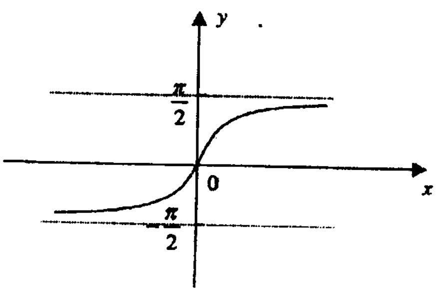
(h) $y = \cot x$



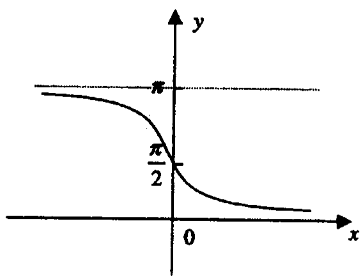
(i) $y = \arcsin x$



(j) $y = \arccos x$



(k) $y = \arctan x$



(l) $y = \operatorname{arccot} x$

图 1-4

二、复合函数

多数函数并不是基本初等函数，如 $y=\frac{1}{3x}$，$y=\sin^2(x+\frac{\pi}{2})$ 等。对于这样的函数我们有如下定义。

定义 1.2　若 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，当 x 在 $u=\varphi(x)$ 的定义域内，从而得到一个以 x 为自变量，y 为因变量的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数。u 称为中间量，记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

例 1　指出下列复合函数的构成

(1) $y=\sin 2x$　　　(2) $y=\arcsin\sqrt{x}$

(3) $y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$　　　(4) $y=\frac{1}{\arccos\sqrt{x}}$

解　(1) $y=\sin u\quad u=2x$

(2) $y=\arcsin u\quad u=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

(3) $y=\lg u\quad u=1+t^{\frac{1}{2}}\quad t=1+x^2$

(4) 因为 $y=\frac{1}{arc\cos\sqrt{x}}=(arc\cos\sqrt{x})^{-1}$

所以 $y=u^{-1}\quad u=\arccos t\quad t=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

三、初等函数

定义 1.3　由基本初等函数经过有限次四则运算及复合而成并且可以用一个式子表示的函数，称为初等函数。

如 $y=\ln(\sin 2x)+x^2$，$y=\cos x+e^{\arctan x}$ 等等都是初等函数，高等数学中讨论的函数绝大多数都是初等函数。

四、分段函数

在工程技术中，还有一类常见的函数——分段函数，它在不同的定义域上用不同的表达式表示。

下面例举几个常用的分段函数。

1. 绝对值函数(图 1－5)

$$y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

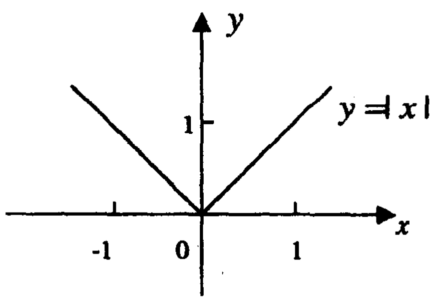


图　1－5

2. 符号函数(图 1 - 6)

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

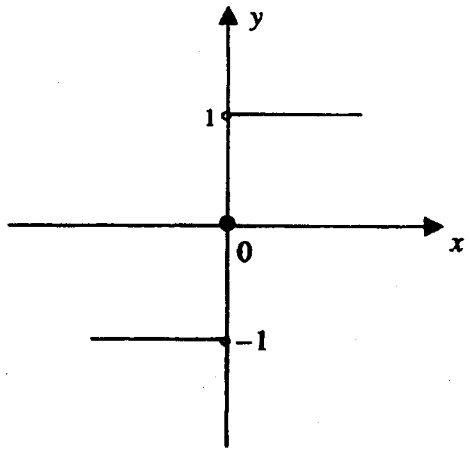


图 1 - 6

3. 特征函数

$$y = x_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in A \end{cases}$$

其中 A 是数集,此函数常用于计数统计。

4. 取整函数(图 1 - 7)

$$y = [x]$$

它表示不超过 x 的最大整数部分。如 $[3.7] = 3$ $[-3.7] = -4$

分段函数不是初等函数。

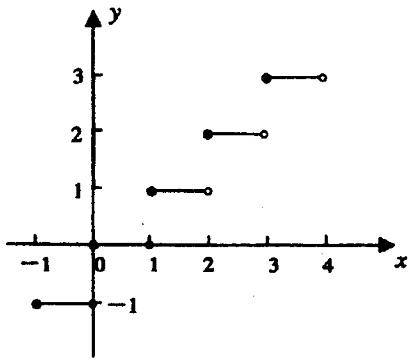


图 1 - 7

五、函数关系的建立

用数学知识去解决实际问题,通常首先要找出这个实际问题中变量之间的函数关系,再对它进行分析研究,在建立变量之间的函数关系时,往往要涉及到数学、物理、化学等有关学科的知识,所以无一般的方法可循。只能具体情况具体分析,下面通过实例来介绍建立函数关系式的方法。

例 1 有一块边长为 a(cm) 的正方形铁皮,在它的四角各剪去相等的一块小正方形,制成一个没有盖的立方体容器,求这个容器的容积与被剪去的小正方形边长之间的函数关系(图 1 - 8)

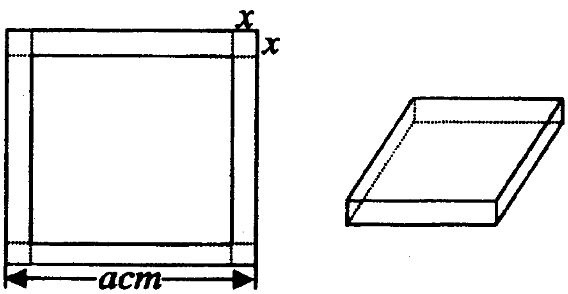


图 1 - 8

解 设剪去的小正方形边长为 x(cm),容器的容积为 $v(\text{cm}^3)$,这时容器的高为 x,底面正方形的边长为 $a - 2x$,则容器的容积

$$v = x(a - 2x)^2$$

由于容器的高、底边长都必须为正，即 $x > 0. a - 2x > 0$，所以，函数 $v = x(a - 2x)^2$ 的定义域 $D:(0,\frac{a}{2})$

例 2 （个人所得税）我国于 2005 年发布的《中华人民共和国个人所得税法》规定月收入超过 1600 元应为纳税所得额(下表仅保留了原来表中前四级的税率)。

级数	全月应纳税所得额	税率(%)
1	不超过 500 元部分	5
2	超过 500 ~ 2 000 元部分	10
3	超过 2 000 ~ 5 000 元部分	15
4	超过 5 000 ~ 20 000 元部分	20

个人所得税一般在工资中直接扣发，若某单位所有人的月收入都不超过 21 600 元，请建立月收入与纳税金额间的函数关系。

解 设某人月收入为 x 元，应交纳所得税为 y 元。

当 $0 \leqslant x \leqslant 1\ 600$ 时

$$y = 0$$

$1\ 600 < x \leqslant 2\ 100$ 时

$$y = (x - 1\ 600) \times 5\%$$

$2\ 100 < x \leqslant 3\ 600$ 时

$$\begin{aligned} y &= (2\ 100 - 1\ 600) \times 5\% + (x - 2\ 100) \times 10\% \\ &= 25 + (x - 2\ 100) \times 10\% \end{aligned}$$

依此类推，函数关系为

$$y = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant x \leqslant 1\ 600 \\ 0.05 \times (x - 1\ 600) & 1\ 600 < x \leqslant 2\ 100 \\ 0.1 \times (x - 2\ 100) + 25 & 2\ 100 < x \leqslant 3\ 600 \\ 0.15 \times (x - 3600) + 175 & 3600 < x \leqslant 6600 \\ 0.2 \times (x - 6\ 600) + 625 & 6\ 600 < x \leqslant 21\ 600 \end{cases}$$

例如，若某人月工资为 1 850 元，则应使用公式 $y = 0.05 \times (1\ 850) - 1600) = 12.5$ 求值，又如，某人月工资为 5 200 元，则此人所交个税为 $y = 0.15 \times (5\ 200 - 3\ 600) + 175$

$$\begin{aligned} &= 0.15 \times 1\ 600 + 175 \\ &= 200 + 175 = 415 \text{ 元} \end{aligned}$$

例 3 （旅馆定价）一旅馆有 200 间房间，如果每个房间的租金定价不超过 40 元，则可全部出租。若每间定价高出 1 元，则会少出租 4 间，设房间出租后的服务成本费为 8 元，试建立旅馆的利润与房价间的函数关系。

解 设旅馆的房价为 x 元 / 间，旅馆的利润为 y 元。

若 $x \leqslant 40$，出租的房间数为 200 间，$y = 200(x - 8)$

若 $x > 40$，出租的房间数为 $200 - 4(x - 40)$ 间，旅馆的利润为 $y = [200 - 4(x - 40)](x - 8)$

旅馆利润与房间租金之间的函数为

$$y = \begin{cases} 200(x - 8) & x \leq 40 \\ [200 - 4(x - 40)](x - 8) & x > 40 \end{cases}$$

练习 1－2

1．函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 是否为初等函数？

2．函数 $g(x)=\sin^2 x$ 是否为初等函数？

3．指出下列复合函数的构成

(1) $y=\cos x^4$　　(2) $y=\sqrt{\sin^2 x}$　　(3) $\dfrac{1}{arc\cos\sqrt{x}}$

(4) $y=\sin^2(2x+1)$　　(5) $y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}$　　(6) $y=[\dfrac{1-(1-x^2)}{1+(1-x^2)}]^3$

4．已知圆锥的体积为 v，试将圆锥的底半径表示为高的函数，并求此函数的定义域。

5．(生产费用) 某工厂生产计算机的日生产能力为 0～100 台，工厂维持生产的日固定费用为 4 万元，生产一台计算机的直接费用(含材料费和劳务费) 是 4 250 元，试建立该厂日生产 x 台计算机的总费用的函数关系、并指出其定义域。

6．(汽车租凭) 一汽车租凭公司出租某种汽车的收费标准为，每天的基本租金 200 元，另外每公里收费为 15 元。

(1) 试建立每天的租车费与行车路程 x 公里之间的函数关系。

(2) 若某人某天付了 400 元租车费，问他开了多少公里？

7．(邮资费用) 我国 2001 年 8 月 1 日公布的包裹邮寄费收费标准如下表，试建立在 500 公里以内包裹资费 y(元) 与包裹重量 x(克) 间的函数关系

重量 / 资费 / 里程	首重 1 000 克	5 000 克以内续重每 500 克	5 001 克以上续重每 500 克
500 公里及 500 公里以内	5 元	2 元	1 元

§1－3　经济中常见的函数

一、需求函数

在经济活动中，生产者与消费者通过市场交换商品，消费者购买商品是为了得到它的效用，生产者提供商品是为了获得利润，而市场就是生产者与消费者之间的桥梁。

作为市场中的一种商品，消费者对它的需求量是受到诸多因素影响的，例如该商品的市场价格、消费者的收入、消费者的偏好等等。其中，市场价格是影响需求量的一个十分重要的因素。为讨论问题方便，我们先忽略其他因素的影响，即假定某种商品的市场需求量只与该商品的市场价格有关。即

$$q_{\mathrm{d}}=q(p)$$

其中 q_d 是商品的需求量，p 为该商品的市场价格。作为市场价格 p 的函数，需求量 q_d 一般说来