

Peculiar
Explanation

宋伯涛 总主编

人教统编版

北京朗曼教学与研究中心教研成果



讲解

非常



高一数学

教材全解全析 (下)

天津人民出版社

Peculiar Explanation

韩新生 主编

北京朗曼教学与研究中心教研成果

2002年10月1日出版

2002年10月1日出版

2002年10月1日出版

2002年10月1日出版



非常讲解



高一数学

教材全解全析(下)

天津人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

非常讲解·高一数学教材全解全析·下/韩新生主编. - 天津:天津人民出版社,2002
ISBN 7-201-04291-2

I. 非… II. 韩… III. 数学课-高中-教学参考资料 IV. G634
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 095786 号

天津人民出版社出版

出版人:刘晓津

(天津市西康路 35 号 邮政编码:300051)

北京市昌平开拓印刷厂印刷 新华书店发行

*

2005 年 12 月第 4 版 2005 年 12 月第 1 次印刷

32 开本 890 × 1240 毫米 14 印张 字数:423 千字

定价:15.80 元

ISBN 7-201-04291-2

敬告读者

《中学 1+1》《非常讲解》系列丛书汇集了北京朗曼教学与研究中心最新教学科研成果。值此再版之际,北京朗曼教学与研究中心向全国千百万热心读者深表谢意!

在购买《中学 1+1》《非常讲解》系列丛书时,请读者认准封面上“北京朗曼教学与研究中心教研成果”“宋伯涛总主编”等字样,以防假冒。

近年来,发现个别出版物公然冒用《中学 1+1》《非常讲解》品牌或大量盗用书中内容。在此,本中心严正声明:凡冒用《中学 1+1》《非常讲解》品牌,盗用书中内容的行为,均为侵犯知识产权行为,本中心将根据有关法规追究侵权者的法律责任。

保护知识产权,打击盗版、盗用行为是每一个真正尊重知识的忠诚读者的义务。如发现有侵权行为,请及时告知北京朗曼教学与研究中心,本中心对您的正直行为表示由衷的感谢。

如您在使用本书过程中发现有疏漏之处或疑难问题,可来信与本中心联系,我们将悉心听取您的批评和建议,竭诚为您排忧解难。让我们携手共勉,共同打造朗曼光辉的形象!

本书在全国各地均有销售,您也可以来信邮购。

来信请寄:北京市朝阳区亚运村邮局 89 号信箱,北京朗曼教学与研究中心蒋雯丽(收);邮编:100101。

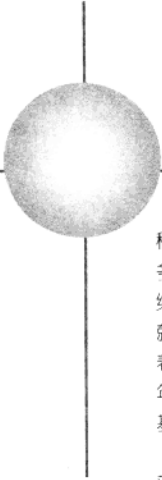
联系电话:010 - 64925885; 64925887 转 603,605。

另外,北京朗曼教学与研究中心新建大型教学网站“朗曼 1+1 网”已于 2004 年 5 月 18 日正式开通。网站科目齐全,内容丰富,欢迎登录!

轻松浪漫的学习旅程,将从点击“朗曼 1+1 网”开始!

网址:<http://www.lmedu.com.cn>





再 版 前 言

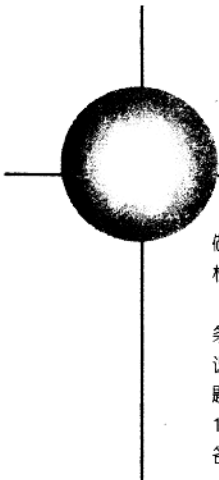
随着国家基础教育课程改革的深入开展,义务教育《课程标准》的实施范围正在逐步扩大,新的教育理念被越来越多的教育工作者和社会人士所接受,我国基础教育事业正经历着一次深刻的变革。这个变革的核心,对于教师来说,就是改变角色定位;对于学生来说,就是变革学习方式。本着这样的精神,同时为了适应课程改革深入发展的需要,今年再版时,我们在广泛征集专家、教师、学生和家長意见的基础上,作了较大程度的修订。

本书按照源于新教材又高于新教材的原则进行修改,对它的各个知识点以及能力要求进行全面的讲解、分析和指导,每节设如下栏目:课程标准要求、教材解析、方法指引、巩固练习等。其中教材解析为本书各节的重点,它在新教材的基础上,对章节的各知识点逐个进行详细的讲解和分析,着重知识和技能的拓展与规律方法的揭示与总结,通过典型常规题,创新开放题及实践应用题等让学生对新教材的知识点进行探究和体验,并按以下三点进行设计:

1.对典型例题进行全面剖析,并设以下四个栏目:①**思路点拨**:点拨解题思路,提供解题策略。②**解答**:按照解题方案,给出规范解答。③**误点剖析**:指出解题常见错误,并点击错误产生的原因,进行防错提示。④**评注**:总结解题过程的注意点,剖析解题技巧的关键处。开设以上小栏目,其目的是,开启学生思路,着眼规律方法总结。

2.试解相关题(或变式题)。从不同角度提出与典型例题相关或相近的问题,供学生练习,达到融会贯通,举一反三的目的。

3.每道典型题都针对教材中某一知识点,旨在通过对例题的探索,获得对教材相关内容的实践与体验。



作者在编写过程中,力求讲解教材全部内容,信息量大,做到精讲精析精选,讲解透彻且具有深度,辨析清晰细致,分析讲解新颖独到,与众不同,别具一格,不落窠臼。

《非常讲解》系列丛书讲解细致,分析透彻,层次分明,条理清晰,内容丰富,对掌握教材重点、难点、疑点以及各知识点,对培养并提高理解、分析、判断、领悟、思考以及解决问题能力具有极强的实用性和指导性,是朗曼中心继《中学1+1》系列丛书后又一成功力作,两者堪称姊妹篇。其侧重点各不相同,前者偏重于对教材的讲解与分析,后者偏重于重点及疑难问题的讲解与测试,它们既是一个整体,又互为补充,相得益彰。

学习《课程标准》,更新教育观念,有一个不断深入的过程;课程改革的实施,也需要不断地探索和积累。本书此次修订正是学习《课程标准》,改革教学内容和方法的一个具体的落实。希望我们的努力能给老师和同学们的教学活动带来切实而有效的帮助,同时也期待着来自广大师生和教育专家的批评和指教。

宋柏涛

2005年11月于北师大

目录 CONTENTS

第四章 三角函数

本章知识导学 1

一 任意角的三角函数 1

4.1 角的概念的推广 1

课程标准要求 2

教材解析 2

方法指引 11

巩固练习 14

4.2 弧度制 15

课程标准要求 16

教材解析 16

方法指引 21

巩固练习 25

4.3 任意角的三角函数 26

课程标准要求 26

教材解析 27

方法指引 34

巩固练习 40

4.4 同角三角函数的基本关系式 42

课程标准要求 42

教材解析 42

方法指引 54

巩固练习 57

4.5 正弦、余弦的诱导公式 59

课程标准要求 59

教材解析 59

方法指引 66

巩固练习 68

二 两角和与差的三角函数 70

4.6 两角和与差的正弦、余弦、

正切 70

课程标准要求 70

教材解析 70

方法指引 83

巩固练习 88

4.7 二倍角的正弦、余弦、

正切 89

课程标准要求 90

教材解析 90

方法指引 97

巩固练习 103

三 三角函数的图象和性质 105

4.8 正弦函数、余弦函数的图象和

性质 105

课程标准要求 105

教材解析 105

方法指引 122

巩固练习 126

4.9 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象 129

课程标准要求 129

教材解析 129

方法指引 140

巩固练习 142

4.10 正切函数的图象和性质 145

课程标准要求 145

教材解析 145

方法指引	152
巩固练习	152
4.11 已知三角函数值求角	154
课程标准要求	154
教材解析	154
方法指引	159
巩固练习	161
本章小结	163
知识结构框图	163
考点拓展研究	164
本章测试题	176

第五章 平面向量

本章知识导学	179
一 向量及其运算	180
5.1 向 量	180
课程标准要求	180
教材解析	180
方法指引	184
巩固练习	185
5.2 向量的加法与减法	187
课程标准要求	187
教材解析	188
方法指引	195
巩固练习	198
5.3 实数与向量的积	200
课程标准要求	200
教材解析	200
方法指引	208
巩固练习	209
5.4 平面向量的坐标运算	212
课程标准要求	212
教材解析	213

方法指引	219
巩固练习	221
5.5 线段的定比分点	223
课程标准要求	223
教材解析	223
方法指引	231
巩固练习	234
5.6 平面向量的数量积及运算律	236
课程标准要求	236
教材解析	236
方法指引	244
巩固练习	246
5.7 平面向量数量积的坐标表示	248
课程标准要求	248
教材解析	248
方法指引	253
巩固练习	255
5.8 平移	257
课程标准要求	257
教材解析	257
方法指引	261
巩固练习	262
二 解斜三角形	264
5.9 正弦定理、余弦定理	264
课程标准要求	264
教材解析	264
方法指引	274
巩固练习	277
5.10 解斜三角形应用举例	279
5.11 实习作业	279
5.12 研究性课题:	
向量在物理中的应用	279
课程标准要求	279

教材解析	280
方法指引	285
巩固练习	286
本章小结	289
知识结构框图	289
考点拓展研究	289
高考样题欣赏	290
本章测试题	294
<u>参考答案</u>	297

第四章 三角函数

本章知识导学

在初中,我们学习了相似形和圆,还学习了解直角三角形,这是研究三角函数的基础.在本章中,我们初步把代数和几何知识联系起来,用集合和函数的知识系统地研究任意角的三角函数,掌握一些基本的三角关系式和三角式的变形方法,并在此基础上了解三角函数的图象和性质,能根据三角函数值,求出适合条件的角.

三角函数在高等数学、物理学、天文学、测量学以及其他各种应用技术学科中应用广泛.在日常生活中,也常遇到用三角函数及其性质来解决问题.

本章的重点是:任意角的三角函数的概念,同角三角函数间的关系式、诱导公式及其运用,正弦、余弦的和角公式,正弦曲线的画法和正弦函数的性质.

本章的难点是:弧度制的概念,综合运用本章公式进行简单三角函数式的化简及恒等式的证明,周期函数的概念,函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象与正弦曲线的关系.

学习本章的关键,是熟练掌握任意角三角函数的定义,明确正弦曲线的画法和正弦曲线的性质,理解余弦的和角公式的特征,能把余弦的差角公式及正弦的和、差角公式转化为利用余弦的和角公式解决.

通过学习本章知识,进一步了解和明确基本数学思想在研究三角函数时所起的作用,如符号与变元、集合与对应、数形结合等.在数学中常用的基本方法也有所体现,如分析、探索、化归、类比、平行移动、伸长和缩短等,这些在学习上要逐步理解、掌握.

一 任意角的三角函数

4.1 角的概念的推广

在初中,由于解直角三角形的需要,我们学习了锐角三角函数.本节将在初中所学角的概念的基础上,把角从不大于周角的非负角扩充到任意角,使角有正角、

零角、负角之分,并置角于坐标系内,给出象限角的概念和终边相同的角的表达式.通过本节学习,了解由特殊到一般地归纳方法,进一步理解集合的运算,培养求简的数学意识,提高分析问题、解决问题的能力.

课程标准要求



1. 理解任意角的概念,学会在平面内建立适当的坐标系来讨论任意角.
2. 能在 0° 到 360° 范围内,找出与已知角终边相同的角,并能判定角所在的象限.
3. 能写出与某已知角终边相同的角的集合.

教材解析



1. 角的概念的推广

平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形叫做角.按逆时针方向旋转形成的角叫做正角,按顺时针方向旋转形成的角叫做负角.

正角、负角是用来表示具有相反意义的旋转量的.逆时针为正、顺时针为负是人为的规定,像正、负数的规定一样,更多地是出于习惯.

如果一条射线没有作任何旋转,我们称它形成了一个零角.

零角无正负,零角的始边和终边重合.

思考:始边和终边重合的角一定是零角吗?

角的分类: $\begin{cases} \text{正角} \\ \text{零角} \\ \text{负角} \end{cases}$

2. 象限角

在直角坐标系中,角的顶点与原点重合,角的始边与 x 轴的非负半轴重合,那么角的终边(除端点外)在第几象限,我们就说这个角是第几象限角.如果角的终边在坐标轴上,就认为这个角不属于任一象限.

3. 注意下列概念不要混淆

锐角: $\{\alpha | 0^\circ < \alpha < 90^\circ\}$ 或 $(0^\circ, 90^\circ)$;

小于 90° 的角: $\{\alpha | \alpha < 90^\circ\}$;

第一象限角: $\{\alpha | 0^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

【例 1】下列命题正确的是

()

- A. 终边相同的角一定相等
- B. $\{\alpha | \alpha \text{ 是锐角}\} \subseteq \{\beta | 0^\circ \leq \beta < 90^\circ\}$
- C. 第一象限的角都是锐角
- D. 小于 90° 的角都是锐角



思路点拨 角的概念推广后,不应再局限于不大于周角的非负角.另外,要注意区分象限角和某个范围内的角.

解:对于 A,终边相同的角不一定相等,它们可相差若干“圈”;

对于 B, α 是锐角,即 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$,故 $\{\alpha | 0^\circ < \alpha < 90^\circ\} \subsetneq \{\beta | 0^\circ \leq \beta < 90^\circ\}$;

对于 C,第一象限的角是指终边在第一象限.如 390° 的终边在第一象限,而 $390^\circ > 90^\circ$,不是锐角;

对于 D,一切负角和零角都小于 90° ,但不是锐角.

综上所述,正确答案是 B.



误区剖析 本题若错选,主要错因是对角的概念的推广认识不到位.角的概念推广后,对角的认识还停留在过去的水平上,就容易产生错误.在初学时务必开阔视野,既要“大”处看,又要向“小”处看.

评注:(1)判断一个命题错误,只要举一反例即可.本题 A、C、D 答案皆可举一反例否定;

(2)要注意区分锐角,第一象限的角,小于 90° 的角.



试解相关题

1-1 判断正误

- (1)时间经过 5 小时,时针转 150° 角 ()
- (2)若 α 是锐角,则其终边落在第一象限 ()
- (3)终边在第一象限的角为锐角 ()
- (4)小于 180° 的角是锐角、直角或钝角 ()
- (5)终边相同的角必相等 ()
- (6)不相等的角的终边位置必不相同 ()

【例 2】 角的顶点与坐标原点重合,角的始边与 x 轴的非负半轴重合,则角 α 与角 $\alpha + 180^\circ$ 的终边关系为 ()

- A. 一定关于 x 轴对称
- B. 一定关于 y 轴对称
- C. 可能关于原点对称
- D. 随 α 的变化可以有不同的对称性



思路点拨 画出角 α 及 $\alpha + 180^\circ$ 的终边验证答案.

解:对于 A、B,如 30° 与 210° 的终边既不关于 x 轴对称,也不关于 y 轴对称;

由于 α 与 $\alpha + 180^\circ$ 的终边互为反向延长线,故一定关于坐标原点对称;

α 与 $\alpha + 180^\circ$ 的终边除关于原点对称外,在一些特殊情况下,亦关于 x 轴或 y 轴对称.

答案为 D.



误区剖析

注意了特殊情况,如 α 的终边在坐标轴上,忽略了一般情形,易选A或B;而忽略了特殊情况,易感觉D也是错误的.

评注:(1)解题时,既要注意特殊情况,也应注意一般性;

(2)画图,或用特殊值是解决选择题的常用方法.



试解相关题

2-1 若 α 是第四象限角,则 $180^\circ - \alpha$ 一定是 ()

- A. 第一象限角 B. 第二象限角
C. 第三象限角 D. 第四象限角

4. 终边相同的角

所有与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,可构成一个集合:

$$S = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\},$$

即任一与角 α 终边相同的角,都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

在与角 α 终边相同的角的一般形式 $\alpha + k \cdot 360^\circ$ 中,要注意:

① $k \in \mathbb{Z}$;

② α 是任意角;

③ 终边相同的角不一定相等,但相等的角的终边一定相同.终边相同的角有无数个,它们相差 360° 的整数倍.

【例3】 若角 α 与 β 的终边互为反向延长线,则有 ()

- A. $\alpha = \beta$ B. $\alpha = (2k+1) \cdot 180^\circ - \beta, k \in \mathbb{Z}$
C. $\alpha = -\beta$ D. $\alpha = (2k+1) \cdot 180^\circ + \beta, k \in \mathbb{Z}$



思路点拨

α 与 β 的终边互为反向延长线,即 α 与 $180^\circ + \beta$ 的终边相同.

解:对A, $\alpha = \beta$,则角 α, β 的终边一定相同;

对B, α 与 $180^\circ - \beta$ 的终边相同,则角 α, β 的终边一定关于 y 轴对称;

对C, α 与 $-\beta$ 的终边一定关于 x 轴对称;

对D, α 与 $180^\circ + \beta$ 的终边关于原点对称,即互为反向延长线

答案为D.



误区剖析

(1)终边互为反向延长线的概念不清;

(2)特殊代替一般也常会产生失误.

评注:(1)终边相同的角不一定相等,应用于做题中时要注意;

(2)画出图形,寻找联系.



试解相关题

3-1 若角 α 与角 $\theta - 30^\circ$ 的终边相同, β 与角 $\theta + 30^\circ$ 的终边相同.则有 ()

- A. $\alpha + \beta = 0$ B. $\beta - \alpha = 60^\circ$
C. $\alpha + \beta = 2\theta$ D. $\beta - \alpha = k \cdot 360^\circ + 60^\circ, k \in \mathbb{Z}$

3-2 与 -463° 终边相同的角的集合为

()

A. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 463^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

B. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 103^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 257^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ - 257^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

【例 4】终边与坐标轴重合的角 α 的集合是

()

A. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

B. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

C. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

D. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

思路点拨 先写出终边落在各个半轴上的角的集合,再取并集可得;亦可通过上述集合中对角分析,看能否把终边在坐标轴上的角表示完备.

解: 在 0° 到 360° 范围内,终边在 x 轴上的角有两个,即 $0^\circ, 180^\circ$;终边在 y 轴上的角也有两个,即 $90^\circ, 270^\circ$. 因此

所有与 0° 角终边相同的角构成集合

$$\begin{aligned} S_1 &= \{\beta | \beta = 0^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\beta | \beta = 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned}$$

所有与 180° 角终边相同的角构成集合

$$\begin{aligned} S_2 &= \{\beta | \beta = 180^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\beta | \beta = (2k+1) \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

终边在 x 轴上的角的集合

$$\begin{aligned} S_1 \cup S_2 &= \{\beta | \beta = 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\beta | \beta = (2k+1) \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\beta | \beta = n \cdot 180^\circ, n \in \mathbb{Z}\}; \end{aligned}$$

同理,所有与 90° 角终边相同的角构成集合

$$\begin{aligned} S_3 &= \{\beta | \beta = 90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\beta | \beta = 90^\circ + 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned}$$

与 270° 角终边相同的角构成集合

$$\begin{aligned} S_4 &= \{\beta | \beta = 270^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\beta | \beta = 90^\circ + (2k+1) \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

终边在 y 轴上的角的集合

$$\begin{aligned} S_3 \cup S_4 &= \{\beta | \beta = 90^\circ + 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\beta | \beta = 90^\circ + (2k+1)180^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\beta | \beta = 90^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

于是,终边落在坐标轴上的角的集合

$$\begin{aligned} S &= (S_1 \cup S_2) \cup (S_3 \cup S_4) \\ &= \{\beta | \beta = n \cdot 180^\circ, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\beta | \beta = 90^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\beta | \beta = 2n \cdot 90^\circ, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\beta | \beta = 90^\circ + 2n \cdot 90^\circ, n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

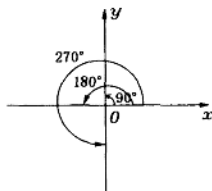


图 4.1-1

$$\begin{aligned} &= \{\beta | \beta = 2n \cdot 90^\circ, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\beta | \beta = (2n+1) \cdot 90^\circ, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\beta | \beta = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

故选 D.



误点剖析

(1) 在理解与坐标轴重合的角 α 的集合这一概念时, 只注意到与某一半轴重合而漏掉其他情况, 将造成漏解;

(2) 对集合的“并”的运算不熟练, 不能化为最简形式.

评注: (1) 与坐标轴重合的角, 先寻找 0° 到 360° 间的适合条件的角, 再用终边相同的角的表达式, 写出全部适合条件的角;

(2) 要问集合 $\{\beta | \beta = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ 的终边落在哪里, 需对 k 进行讨论: $k = 4n, 4n+1, 4n+2, 4n+3, n \in \mathbb{Z}$, 分别表示的角终边落在 x, y 的各个半轴上.



试解相关题

4-1 下列命题正确的是

()

A. 若 $S_1 = \{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}, S_2 = \{\beta | \beta = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 则 $S_1 \supseteq S_2$

B. 若 $S_1 = \{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}, S_2 = \{\beta | \beta = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 则 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

C. 若 $A = \{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ + 45^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 则 α 的终边落在函数 $y = x (x \geq 0)$ 的图象上.

D. 若 $B = \{\beta | \beta = k \cdot 90^\circ + 45^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 则 β 的终边落在函数 $y = x$ 的图象上.

4-2 集合 $M = \{x | x = k \cdot 90^\circ \pm 45^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 与 $P = \{x | x = m \cdot 45^\circ, m \in \mathbb{Z}\}$ 之间的关系为

()

A. $M \subsetneq P$

B. $M \supsetneq P$

C. $M = P$

D. $M \cap P = \emptyset$

【例 5】写出终边落在第二象限的角的集合.



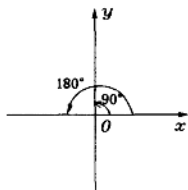
思路点拨

可先写出在 0° 到 360° 间的第二象限的角的集合, 再利用终边相同的角的表达式写出所有适合条件的角的集合.

解: 在 0° 到 360° 范围内, 终边在第二象限的角 α 满足 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ (如图 4.1-2), 与角 α 终边相同的所有角的终边都在第二象限. 故适合条件的角的集合为

$$S = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, 90^\circ < \alpha < 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$$

图 4.1-2



误点剖析

容易只写出在 0° 到 360° 范围内的角.

评注: (1) 另一种表达形式: 终边在第二象限的角的集合为

$$S = \{\beta | 90^\circ + k \cdot 360^\circ < \beta < 180^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\};$$

(2) 注意象限角与在某一个范围内的角的区别: 象限角是由无数个范围内的角所组成的;

(3) 角的表达形式不唯一, 但元素是一样的.

试解相关题

5-1 写出终边在第四象限的角的集合.

5-2 设 $M = \{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ - 36^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, $P = \{\alpha | -180^\circ < \alpha < 180^\circ\}$, 则 $M \cap P$

=

()

A. $\{-36^\circ, 54^\circ\}$

B. $\{-126^\circ, 144^\circ\}$

C. $\{-36^\circ, 54^\circ, 144^\circ, -126^\circ\}$

D. $\{54^\circ, -126^\circ\}$

【例 6】若 α 是第二象限的角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第_____象限的角; $\frac{\alpha}{3}$ 是第_____象限的角; 2α 是第_____象限的角.

思路点拨

由于 α 是第二象限的角, 可利用终边相同的角的表达式表示出 α 的范围, 进而求得 $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{3}$, 2α 的范围, 判定其所在的象限.

解: 由 α 是第二象限的角, 得

$$k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

$$(1) k \cdot 180^\circ + 45^\circ < \frac{\alpha}{2} < k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

① 当 $k = 2n, n \in \mathbb{Z}$ 时,

$$2n \cdot 180^\circ + 45^\circ < \frac{\alpha}{2} < 2n \cdot 180^\circ + 90^\circ, n \in \mathbb{Z}.$$

$\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限的角;

② 当 $k = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}$ 时,

$$2n \cdot 180^\circ + 225^\circ < \frac{\alpha}{2} < 2n \cdot 180^\circ + 270^\circ, n \in \mathbb{Z}.$$

$\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限的角.

综合①, ②知 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一或第三象限的角.

$$(2) \frac{k}{3} \cdot 360^\circ + 30^\circ < \frac{\alpha}{3} < \frac{k}{3} \cdot 360^\circ + 60^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

① 当 $k = 3n, n \in \mathbb{Z}$ 时,

$$n \cdot 360^\circ + 30^\circ < \frac{\alpha}{3} < n \cdot 360^\circ + 60^\circ, n \in \mathbb{Z}.$$

$\frac{\alpha}{3}$ 是第一象限的角;

② 当 $k = 3n + 1, n \in \mathbb{Z}$ 时,

$$n \cdot 360^\circ + 150^\circ < \frac{\alpha}{3} < n \cdot 360^\circ + 180^\circ, n \in \mathbb{Z}.$$

$\frac{\alpha}{3}$ 是第二象限的角;

③当 $k=3n+2, n \in \mathbb{Z}$ 时,

$$n \cdot 360^\circ + 270^\circ < \frac{\alpha}{3} < n \cdot 360^\circ + 300^\circ, n \in \mathbb{Z}.$$

$\frac{\alpha}{3}$ 是第四象限的角.

综合①, ②, ③知, $\frac{\alpha}{3}$ 是第一、第二或第四象限的角.

$$(3) 2k \cdot 360^\circ + 180^\circ < 2\alpha < 2k \cdot 360^\circ + 360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

故 2α 是第三、第四象限的角或终边在 y 轴的非正半轴上.

误点剖析 (1) α 是第二象限的角, 误认为只有 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, 从而 $45^\circ <$

$$\frac{\alpha}{2} < 90^\circ, 30^\circ < \frac{\alpha}{3} < 60^\circ, \text{皆为第一象限的角};$$

(2) 在(3)中, 终边在 y 轴的非正半轴上的情况容易漏掉.

评注: (1) 解题时, 根据条件一定要注意一般性, 防止以偏概全;

(2) 要分清在象限内的角或坐标轴上的角.

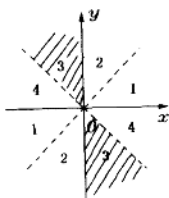


图 4.1-3

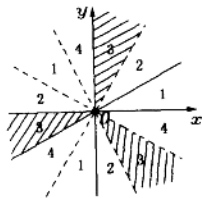


图 4.1-4

(3) 知道 α 所在的象限, 求 $\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{3}, \dots$ 所在的象限, 可用如图 4.1-3, 4.1-4 表示法(象限等分法):

把各个象限等分, 如求 $\frac{\alpha}{3}$ 的范围, 就把每个象限三等分, 从 x 轴的正向起, 标上 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, $\dots$ 于各等分区域. 若 α 是第三象限的角, 则 $\frac{\alpha}{3}$ 在有标号 3 的区域内(如图 4.1-4), 很容易写出 $\frac{\alpha}{3}$ 所在的象限. 其余类推.

试解相关题

6-1 试求出下列角 θ 的范围, 同时指出它是哪一个象限的角:

(1) α 在第四象限, $\theta = 2\alpha$; (2) α 在第一象限, $\theta = \frac{\alpha}{2}$.