超级考生

2007 高考必备

湖北省城市间教学资源开发与共享联合体

武汉市教育科学研究院 荆州市教育科学研究院 黄冈市教育科学研究院 孝感市教育科学研究院
咸宁市教育科学研究院 十堰市教育科学研究院 黄石市教育研究中心 宜昌市教育研究中心
荆门市教学研究室 鄂州市教学研究室 随州市教学研究室
天门市教学研究室 潜江市教学研究室 仙桃市教育科学研究院

联合打造

数学 备战高考——一轮复习

主　编／孔　锋
副主编／程金辉
陈子俊

湖北长江出版集团
湖北教育出版社

超级考生

备战高考

一轮复习

数学

主　编／孔　峰
副主编／程金辉　陈子俊
编　者／王先东　尹惠民　朱达坤
陈　冬　陈宏锦　陈炯生
肖作武　罗东激　郑明武
杨建民　张鸿志　徐　惠
夏晓阳　常晓兵

湖北长江出版集团
湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

超级考生备战高考一轮复习. 数学/孔锋主编,程金辉、陈子俊副主编.
—武汉:湖北教育出版社,2006
ISBN 7-5351-4574-4

Ⅰ.超… Ⅱ.①孔… ②程… ③陈… Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 057977 号

出版 发行:湖北教育出版社	武汉市青年路 277 号
网 址:http://www.hbedup.com	邮编:430015 电话:027-83619605
经 销:新 华 书 店	
印 刷:湖北孝感日报印刷厂印刷	(432100·黄陂大道 179 号)
开 本:880mm×1230mm 1/16	19.5 印张
版 次:2006 年 8 月第 1 版	2006 年 8 月第 1 次印刷
字 数:523 千字	印数:1-20 000
ISBN 7-5351-4574-4/G·3815	定价:27.00 元

如印刷、装订影响阅读,承印厂为你调换

《超级考生·备战高考丛书》编写出版委员会

（排名不分先后）

主　任　王池富　（武汉市教科院教研室主任）

副主任　曾国强　（荆州市教科院院长）

董德松　（黄冈市教科院院长）

王绍章　（孝感市教科院院长）

邓泾河　（咸宁市教科院院长）

赵　平　（十堰市教科院院长）

杨守俊　（荆门市教研室主任）

范俊明　（宜昌市教研中心主任）

龚剑平　（黄石市教研中心主任）

陈明火　（鄂州市教研室主任）

杨中山　（随州市教研室主任）

李情豪　（仙桃市教科院院长）

李祥富　（潜江市教研室主任）

肖平德　（天门市教研室主任）

曹松林　（武汉市教科院教研室副主任）

聂昌慧　（湖北教育出版社副社长）

委　员　王德法　（黄冈市教科院副院长）

汪　涛　（咸宁市教科院副院长）

杨文建　（十堰市教科院副院长）

王　勇　（随州市教研室副主任）

张祖训　（仙桃市教科院副院长）

左唯英　（孝感市教科院部主任）

朱恒足　（湖北教育出版社社长助理）

梅玉闽　（湖北教育出版社第四编辑部主任）

李　慧　（湖北教育出版社第二编辑部主任）

杜正洲　（黄石市教研中心副主任）

方先培　（荆门市教研室副主任）

前 言

高考理论研究与实践表明，高考在测试考生的一般心理能力的基础上，着重考查考生的学科知识学习与掌握情况和继续学习的潜力（即学术倾向能力）。近几年高考已向社会昭示：高考命题已顺利从知识立意转向以能力立意，更多地在知识的交汇点处命题，尽可能地体现学科教育改革的成果，更好地反映课程改革的精神和要求。近几年高考命题的改革和变化，对高中教学工作尤其是高三备考提出了新的、更高的要求和挑战。如何加强教学研究，如何创新课堂教学设计，如何开展有效的针对性训练，如何进行及时反馈诊断和监控分析，如何培养学科思维能力，如何实施以人为本的具有实效性的心理调节和疏导等，已引起教学研究部门和高中学校的高度关注和重视。

为了加强高考复习的针对性，优化高三课堂教学，切实有效培养学生的学科思维能力和综合能力，也是为了提高学习效益，降低高三复习备考成本，我们会集名校名师之研究成果和成功经验，为广大高三师生编撰此套重视学科基础、突出学科主干知识和思想方法、凸显学科能力培养的备考方略丛书。该丛书立足学科基础，强化学科思想方法学习与训练，渗透创新意识和探究能力培养，体例科学实用，立意新颖，既体现了国家考试中心各科考试大纲的考查要求，又反映了湖北地区名校名师研究的最新成果。此套丛书由武汉市教育科学研究院牵头，资深学科教研员共同策划，湖北省各城市教研机构共同参与编写，是"湖北省城市间教学资源开发与共享联合体"在高中教学领域资源开发的一次新的探索和尝试。我们希望此套丛书能切实帮助广大师生解决"高考考什么，怎样复习好，如何去备考"的问题，正确引导广大师生备战高考，决胜高考。

超级考生·备战高考丛书编委会

编写说明

高考第一轮复习是一个巩固所学知识和逐渐提高能力的过程，是高考获取高分的关键环节。其重点在于逐步明确高考要求，不断完善知识体系，了解命题基本规律，掌握解题基本技巧，提高解题能力。为了更好地帮助考生进行数学第一轮复习，我们邀请湖北省、武汉市重点中学教学一线有影响的优秀特级、高级教师和高考研究专家精心编写了本书。书中内容反映了他们多年来指导高考的成功经验和研究高考命题的最新成果，具有把握高考脉搏准确、信息及时全面、材料新颖、方法灵活、讲解透彻、点拨到位、注重分析、强化提高的特点。全书始终以提高能力和提高成绩为指导思想，一方面，立足基础，突出重点，即在分析解题过程中，揭示题目的本质结构，解析难点、点拨疑点、举一反三，提升能力；另一方面，明确、细化、归纳高考知识点，分析命题趋势，增强应变能力，提高复习效果。具体来说，它有以下几个特点。

第一，狠抓基础，突出重点，注重分析历届考生出错的考点及其对策；第二，重视通性通法与了解特殊技巧相结合，研究高考命题中的热点、难点和趋势；第三，注重数学思想方法的落实、应用和提高，如数学归纳法、反证法、换元法、待定系数法、配方法，以及函数与方程思想、数形结合思想、等价转换思想、分类讨论思想等；第四，注重解题技巧提高和灵活应用，建立系统的知识网络，探究数学应用方法；第五，直面最新高考动向，探索高考命题规律，引导学生感悟、反思、总结，使知识得到内化，使之适应高考。

本书分为十三章，每章设置两大板块。

考纲解读：主要强调《考试大纲》对本章节知识点在考试中的要求，以及本章节中主要方法和重点知识的概括和总结，是对本章节的全局性的一个把握。

考试要求：主要强调高考命题在涉及本章节内容时，对知识层次、各种能力及个性品质的要求。

每章分若干节，每节设如下几个栏目：

基本知识：以考纲为线索对本节知识点以及主要方法进行系统的归纳提炼与总结。

经典题型：主要选取近几年全国各省市大型调考或联考的经典试题，同时兼顾其他的经典例题，体现实用性和针对性。每一节配有6个左右的例题，给出了详细的解答过程，并配有分析或评析，这主要是便于学生的使用和教师的灵活处理，有利于提高学生的分析问题、解决问题的能力，同时提醒学生在考试过程中注意书写的规范化。

命题导向及考题介绍：以2004年、2005年、2006年各独立命题省市命制的试题以及近几年国家考试中心命制的试题为主，精选4个左右的例题，给出了详细的解答过程及点评，让高三教师和学生更好的把握近几年的高考试题的命题特点、要求和走向。

活题训练：选择了一组有利于巩固数学基本功，强化提升能力，有针对性的试题，最大限度的对考生进行科学训练。活题训练的答案单独装订成册，配套使用。

我们本着对广大读者认真负责的态度和精益求精的精神，努力将本书编写得更好。尽管我们在写作过程中非常严谨，而且审订时层层把关，但书中仍难免有疏漏之处，敬请读者批评指正。愿本书得到更多读者的喜爱和欢迎。愿更多使用本书的读者在高考中考出理想的成绩，走进理想的大学。

编者

2006年8月

超级考生

CONTENTS
目录

第一章　集合与简易逻辑

考纲解读

本章考查的主要内容是：集合、简易逻辑.这两个内容都是中学数学的基础.应用本章知识要解决的数学问题主要有两类：第一类是运用集合语言、符号和“或”、“且”、“非”等逻辑联结词来解答有关集合和简易逻辑的基本概念问题.第二类是解含绝对值的不等式，一元二次不等式以及能化为一元一次和一元二次不等式的特殊高次和分式不等式.另外，对数形结合的思想，补集的思想方法——正难则反——反证法等也有一定的要求.

应试要求

1.理解集合、子集、交集、并集、补集的概念；了解空集和全集的意义；了解属于、包含、相等关系的意义；掌握有关的术语和符号，并会用它们正确表示一些简单的集合.

2.理解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义；理解四种命题及其相互关系；掌握充要条件的意义.

3.掌握反证法及其应用.

§1.1　集　合

基本知识

1.集合的有关概念，集合的特性、表示、分类；

2.元素与集合的关系：“$\in$”或“$\notin$”；

3.集合与集合之间的关系：包含关系；相等关系；真子集关系；运算关系（交、并、补）.

经典题型

例 1　设集合 $P=\{3,4,5\}$，$Q=\{4,5,6,7\}$，定义 $P*Q=\{(a,b)\mid a\in P,b\in Q\}$，则 $P*Q$ 中元素的个数为________.

解：由集合的概念可知，$P*Q$ 是点集，且 (a,b) 的组成有 $C_3^1\cdot C_4^1=12$ 个.

［评析］　本题应弄清集合的构成，并利用乘法原理确定元素的个数.

例 2　设 $A=\{y\mid y=\frac{1}{x^2}\}$，$B=\{x\mid y=\sqrt{x}\}$，则 A 与 B 间的包含关系是________.

解：集合 A 表示函数 $y=\frac{1}{x^2}$ 的值域，即 $A=(0,+\infty)$.

集合 B 表示函数 $y=\sqrt{x}$ 的定义域，即 $B=[0,+\infty)$.

$\therefore A\subsetneqq B$.

［评析］　理解集合的含义是解答本题的关键.

例 3　已知 $A=\{x\mid x^2+(a+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，$A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，求 a 的取值范围.

解：(1) 当 $A=\varnothing$ 时，$\Delta=(a+2)^2-4<0$，解得 $-4<a<0$.

(2) 当 A 中只有一个元素时，由 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，

$\therefore\begin{cases}\Delta=(a+2)^2-4=0,\\ x_1+x_2=-(a+2)<0.\end{cases}$ 解得 $a=0$.

(3) 当 A 中有两个元素时，$\because A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，

$\therefore\begin{cases}\Delta=(a+2)^2-4>0,\\ x_1+x_2=-(a+2)<0.\end{cases}$ 解得 $a>0$.

综合(1)、(2)、(3)知 $a>-4$.

［评析］　$A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$ 表明方程 $x^2+(a+2)x+1=0$ 的两根为非正，但不要忽视 $A=\varnothing$ 的可能.

例 4　已知 $A=\{x\mid x=m+n\sqrt{2},m、n\in\mathbf{Z}\}$.

(1) 设 $x_1=\frac{1}{3-4\sqrt{2}}$，$x_2=\sqrt{9-4\sqrt{2}}$，$x_3=(1-3\sqrt{2})^2$ 试判断 x_1、x_2、x_3 与 A 之间的关系；

(2) 任取 x_1、$x_2\in A$，试判断 x_1+x_2、x_1x_2 与 A 之间的关系；

(3) 能否找到 $x_0\in A$ 使 $\frac{1}{x_0}\in A$ 且 $|x_0|\neq1$？

解：(1) 由于 $x_1=\frac{1}{3-4\sqrt{2}}=-\frac{3}{23}-\frac{4}{23}\sqrt{2}$，则 $x_1\notin A$.

由于 $x_2=\sqrt{9-4\sqrt{2}}=\sqrt{(1-2\sqrt{2})^2}=-1+2\sqrt{2}$，则 $x_2\in A$.

由于 $x_3=(1-3\sqrt{2})^2=19-6\sqrt{2}$，则 $x_3\in A$.

(2) 由 x_1、$x_2\in A$ 设 $x_1=m_1+n_1\sqrt{2}$，$x_2=m_2+n_2\sqrt{2}$（m_1、n_1、m_2、$n_2\in\mathbf{Z}$），则 $x_1+x_2=(m_1+m_2)+(n_1+n_2)\sqrt{2}$（其中 m_1+m_2、$n_1+n_2\in\mathbf{Z}$），则 $x_1+x_2\in A$.

由于 $x_1x_2=(m_1+n_1\sqrt{2})(m_2+n_2\sqrt{2})=(m_1m_2+2n_1n_2)+(m_1n_2+m_2n_1)\sqrt{2}$（其中 $m_1m_2+2n_1n_2$、$m_1n_2+m_2n_1\in\mathbf{Z}$），则 $x_1x_2\in A$.

(3)假定能找到 $x_0=m_0+n_0\sqrt{2}\in A$(其中 m_0、$n_0\in\mathbf{Z}$)符合题意,则 $\frac{1}{x_0}=\frac{m_0}{m_0^2-2n_0^2}+\frac{-n_0}{m_0^2-2n_0^2}\cdot\sqrt{2}\in A$,则 $\frac{m_0}{m_0^2-2n_0^2}$、$\frac{-n_0}{m_0^2-2n_0^2}\in\mathbf{Z}$. 于是,可以取 $m_0=n_0=1$,则能找到 $x_0=-1+\sqrt{2}$又能满足 $|x_0|\neq1$,符合题意.

[评析]　在第(3)小题中,只要找到某一个 x_0 符合题意,就已经实现了这种"存在性"的解题目标;其实,这里符合题意的 $x_0=m_0+n_0\sqrt{2}\in A$ 有无数个,你能够探求它们所需满足的一个充分条件 $m_0^2\pm1=2n_0^2$ 吗?

例 5　已知 $x\in\mathbf{R}$,$y\in\mathbf{R}^+$,集合 $A=\{x^2+x+1,-x,-x-1\}$,集合 $B=\{-y,-\frac{y}{2},y+1\}$,若 $A=B$,则 x^2+y^2 的值是________.

解:由 $\{x^2+x+1,-x,-x-1\}=\{-y,-\frac{y}{2},y+1\}$ 要求出 x,y 的值,自然想到需要建立关于 x,y 的方程组,但是根据集合中元素的无序性,将得到 $A_3^3=6$ 个方程组,这显然是不可取的.

解答本题的突破口在何处? 注意两点,一是由已知 $y\in\mathbf{R}^+$ 得 $-y<0$,$-\frac{y}{2}<0$,$y+1>0$ 且 $-y<-\frac{y}{2}$;二是隐含条件 x^2+x+1 恒大于零且 $-x>-x-1$,这样将得到如下简捷的解法.

解:$\because x\in\mathbf{R}$,$y\in\mathbf{R}^+$,

$\therefore x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$,

$-x>-x-1$,$-y<-\frac{y}{2}<0<y+1$.

$$\therefore\begin{cases}x^2+x+1=y+1,\\-x=-\frac{y}{2},\\-x-1=-y.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$$

这时 $A=\{3,-1,-2\}$,$B=\{-2,-1,3\}$,满足 $A=B$.

$\therefore x^2+y^2=1^2+2^2=5$.

[评析]　本题中,主要利用集合相等定义,并注意到集合中元素的互异性,同时要注意到两集合中的元素范围,简化计算.

例 6　设 $f(x)=x^2+px+q$,$A=\{x|x=f(x)\}$,$B=\{x|f[f(x)]=x\}$.

(1)求证 $A\subseteq B$;

(2)如果 $A=\{-1,3\}$,求 B.

[分析]　本例是涉及集合、函数和方程的综合题. 依据子集的概念,要证 $A\subseteq B$,只要证对任意 $x_0\in A$,均有 $x_0\in B$ 成立;由 $A=\{-1,3\}$知,方程 $x=f(x)$有二实根 -1 和 3,从而应用韦达定理可求出 p、q 的值,也就确定出 $f(x)$的解析式,再解方程 $x=f[f(x)]$,就可求出 B 中的所有元素.

解:(1)设 x_0 是集合 A 中的任一元素,即有 $x_0\in A$.

$\because A=\{x|x=f(x)\}$,

$\therefore x_0=f(x_0)$,

即有 $f[f(x_0)]=f(x_0)=x_0$,

$\therefore x_0\in B$,故 $A\subseteq B$.

$\therefore$ 方程 $x^2+(p-1)x+q=0$ 有两根 -1 和 3,应用韦达定理,得

$$\begin{cases}-1+3=-(p-1),\\(-1)\times3=q\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=-1,\\q=-3.\end{cases}$$

$\therefore f(x)=x^2-x-3$,

于是集合 B 的元素是方程 $f[f(x)]=x$,也即$(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x$(*)的根.

将方程(*)变形,得$(x^2-x-3)^2-x^2=0$,

即$(x^2-2x-3)(x^2-3)=0$,

解得 $x=-1,3,\sqrt{3},-\sqrt{3}$.

故 $B=\{-\sqrt{3},-1,\sqrt{3},3\}$.

[评析]　本解法说明在思维过程中,应当自觉脱去集合符号和抽象函数符号的"外衣",显出最本质的数量关系,不断实施解题语言的转换. 语言是思维的载体,丝毫马虎不得.

命题导向及考题介绍

集合是高考的热点之一,主要考查以下两方面:一是对集合基本概念的认识和理解的水平;二是对集合知识的应用水平.

例 1　(2005 年黄冈题)设集合 $P=\{x|x^2-4x-5<0\}$,$Q=\{x|x-a\leqslant0\}$.

(1)若 $P\cap Q=\varnothing$,求实数 a 的取值范围.

(2)若 $P\subsetneqq Q$,求实数 a 的取值范围.

解:应用数轴进行直观求解.

$P=\{x|-1<x<5\}$,$Q=\{x|x\leqslant a\}$.

(1)由图 1－1 易知,当 $a\leqslant-1$ 时,$P\cap Q=\varnothing$.

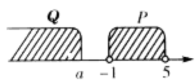


图 1－1

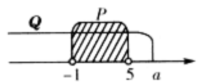


图 1－2

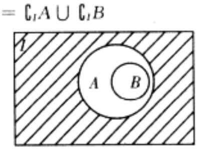
(2)由图 1－2 易知,当 $a\geqslant5$ 时,$P\subsetneqq Q$.

[评析]　将集合语言转化为图形语言,便使 a 的取值显而易见. 可见,数形互化是解数学题的重要思想方法.

例 2　(1996 年全国高考题)已知全集 $I=\mathbf{N}^*$,集合 $A=\{x|x=2n,n\in\mathbf{N}^*\}$,$B=\{x|x=4n,n\in\mathbf{N}^*\}$,则(　　).

A. $I=A\cup B$　　B. $I=\complement_I A\cup B$

C. $I=A\cup\complement_I B$　　D. $I=\complement_I A\cup\complement_I B$



解:如图方法一:$\complement_I A$ 中元素是非 2 的倍数的自然数,$\complement_I B$ 中元素是非 4 的倍数的自然数,显然,只有 C 选项正确.

方法二:因 $A=\{2,4,6,8\cdots\}$,$B=\{4,8,12,16,\cdots\}$,所以 $\complement_I B=\{1,2,3,5,6,7,9\cdots\}$,所以 $I=A\cup\complement_I B$,故答案为 C.

方法三:因 $B\subsetneqq A$,所以 $\complement_I A\subsetneqq\complement_I B$,$\complement_I A\cap\complement_I B=\complement_I A$,故 $I=A\cup\complement_I A=A\cup\complement_I B$.

方法四:根据题意,我们画出文氏图来解,易知 $B\subsetneqq A$,如图:可以清楚看到 $I=A\cup\complement_I B$ 是成立的.

[评析] 本题考查对集合概念和关系的理解和掌握，注意数形结合的思想方法，用无限集考查，提高了对逻辑思维能力的要求.

例 3 （2004 年武汉题）若 $P=\{2,3,4\}$，$Q=\{1,3,5\}$，$M=\{3,5,6\}$，则 $\complement_P(P\cap M)\cup\complement_M(M\cap Q)=$（　　）.

A. $\{2,4\}$　　B. $\{2,4,6\}$

C. $\{1,2,4,6\}$　　D. $\{1,2,3,4,5\}$

解：由题意 $P\cap M=\{3\}$，$M\cap Q=\{3,5\}$

$\complement_P(P\cap M)=\{2,4\}$ $\complement_M(M\cap Q)=\{6\}$

则 $\complement_P(P\cap M)\cup\complement_M(M\cap Q)=\{2,4\}\cup\{6\}$

$=\{2,4,6\}$故选 B.

例 4 （2004 年上海题）记函数 $f(x)=\sqrt{2-\frac{x+3}{x+1}}$ 的定义域为 A，$g(x)=\lg[(x-a-1)(2a-x)]$（$a<1$）的定义域为 B.

(1)求 A.

(2)若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

解：(1)由 $2-\frac{x+3}{x+1}\geqslant 0$，得 $\frac{x-1}{x+1}\geqslant 0$.

$\therefore x<-1$ 或 $x\geqslant 1$，即 $A=(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$.

(2)由 $(x-a-1)(2a-x)>0$，得 $(x-a-1)(x-2a)<0$.

$\because a<1$，$\therefore a+1>2a$，

$\therefore B=(2a,a+1)$.

$\because B\subseteq A$，$\therefore 2a\geqslant 1$ 或 $a+1\leqslant -1$，

即 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 或 $a\leqslant -2$，而 $a<1$，$\therefore \frac{1}{2}\leqslant a<1$ 或 $a\leqslant -2$.

故当 $B\subseteq A$ 时，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-2]\cup[\frac{1}{2},1)$.

活题训练

1. 满足条件 $\varnothing\subsetneqq M\subsetneqq\{0,1,2\}$ 的集合共有（　　）.

A. 3 个　　B. 6 个　　C. 7 个　　D. 8 个

2. 设集合 $M=\{x\mid x-m\leqslant 0\}$，$N=\{y\mid y=(x-1)^2-1,x\in\mathbf{R}\}$，若 $M\cap N=\varnothing$，则实数 m 的取值范围是（　　）.

A. $m\geqslant -1$　　B. $m>-1$　　C. $m\leqslant -1$　　D. $m<-1$

3. 若 $a>b>0$，集合 $M=\left\{x\mid b<x<\frac{a+b}{2}\right\}$，$N=\{x\mid\sqrt{ab}<x<a\}$，则 $M\cap N$ 表示的集合为（　　）.

A. $\{x\mid b<x<\sqrt{ab}\}$　　B. $\{x\mid b<x<a\}$

C. $\left\{x\mid\sqrt{ab}<x<\frac{a+b}{2}\right\}$　　D. $\left\{x\mid\frac{a+b}{2}<x<a\right\}$

4. 两个集合 A 与 B 之差记作"A/B"，定义为：$A/B=\{x\mid x\in A$，且 $x\notin B\}$，如果集合 $A=\{x\mid\log_2x<1,x\in\mathbf{R}\}$，集合 $B=\{x\mid|x-2|<1,x\in\mathbf{R}\}$，那么 A/B 等于（　　）.

A. $\{x\mid x\leqslant 1\}$　　B. $\{x\mid x\geqslant 3\}$

C. $\{x\mid 1\leqslant x<2\}$　　D. $\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$

5.（2005 年上海题）若集合 $A=\{x\mid 3\cos 2\pi x=3^x,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y^2=1,y\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B=$________.

6. 设全集为 $\mathbf{R}$，若集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2<0\}$，集合 $B=\{x\mid\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<-1\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}B=$________；$\complement_{\mathbf{R}}A\cup\complement_{\mathbf{R}}B=$________.

7. 设全集 $I=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x^2-2x>0\}$，集合 $B=\{x\mid x^2-ax-b<0\}$，集合 $C=\{x\mid x^3+x^2+x=0\}$，且 $A\cap B=\{x\mid 2<x<4\}$，$(\complement_IA)\cap(\complement_IB)=C$，求 a、b 的值.

8. 向 50 名学生调查对 A、B 两事件的态度，赞成 A 的人数是全体人数的五分之三，赞成 B 的比赞成 A 的多 3 人，其余的不赞成，另外，对 A、B 都不赞成的学生比对 A、B 都赞成的学生的三分之一多 1 人. 问：对 A、B 都赞成的学生和都不赞成的学生各有多少人？

9. 设函数 $y=\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}$ 的定义域为集合 A，关于 x 的不等式 $\lg 2ax<\lg(a+x)$（$a\in\mathbf{R}^+$）的解集为 B，求使 $A\cap B=A$ 的实数 a 的取值范围.

10. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x+a\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid x^2-3x+2\leqslant 0\}$，且 $A\subsetneqq B$，求实数 a 的取值范围.

§1.2　含绝对值的不等式与一元二次不等式的解法

基本知识

1. 解含绝对值不等式的方法：定义法、平方法、分段求解法.

2. 解一元二次不等式的方法：二次函数、方程与二次不等式.

3. 可化为二次不等式的分式不等式的解法：符号法则解简单不等式.

4. 含参数的不等式（简单的）.

经典题型

例 1 求不等式组$\begin{cases}x>0\\ \dfrac{3-x}{3+x}>\left|\dfrac{2-x}{2+x}\right|\end{cases}$的解集.

解:由$\dfrac{3-x}{3+x}>\left|\dfrac{2-x}{2+x}\right|$可得:$(\dfrac{3-x}{3+x})^2>(\dfrac{2-x}{2+x})^2$,

即$[(x-3)(x+2)]^2-[(x+3)(x-2)]^2>0$.

$\therefore (x^2-x-6)^2-(x^2+x-6)^2>0$.

$\therefore (x^2-x-6+x^2+x-6)(x^2-x-6-x^2-x+6)>0$.

$\therefore 4(x^2-6)x<0$.

由 $x>0$ 知 $x^2-6<0$.

$\therefore 0<x<\sqrt{6}$,则解集是$(0,\sqrt{6})$.

> **[评析]** 此种解法是解含绝对值不等式的"通法",虽然麻烦,但避免了讨论.

例 2 (2005 年海淀题)解不等式$|2x+1|+|x-2|>4$.

[分析] 去掉绝对值符号是解题的指导思想,分段讨论是基本方法.

解:(1)当 $2x+1<0$ 即 $x<-\dfrac{1}{2}$时,原不等式变形为:

$-2x-1+2-x>4$ 即 $x<-1$,$\therefore x<-1$.

(2)当$-\dfrac{1}{2}\leqslant x<2$ 时,原不等式变形为:

$2x+1+2-x>4$ 即 $x>1$,$\therefore 1<x<2$.

(3)当 $x\geqslant 2$ 时,原不等式变形为:

$2x+1+x-2>4$ 即 $x>\dfrac{5}{3}$,$\therefore x\geqslant 2$.

综合(1)(2)(3)可得 $x<-1$ 或 $x>1$.

故原不等式的解集为$\{x|x<-1$ 或 $x>1\}$.

> **[评析]** 本题采用"零点分段法"去掉绝对值符号.如何去掉绝对值是解含绝对值不等式的关键.

例 3 (2005 年武汉题)是否存在实数 a,使得不等式组$\begin{cases}2x^2+(5+2a)x+5a<0,\\ x^2-x-2>0\end{cases}$的整数解的集合是单元素集$\{-2\}$?

解:不等式 $x^2-x-2>0$ 的解集为$\{x|x>2$ 或 $x<-1\}$,而不等式 $2x^2+(5+2a)x+5a<0$ 可变为$(2x+5)(x+a)<0$.

当$-a<-\dfrac{5}{2}$时,$-a<x<-\dfrac{5}{2}$.

当$-a=-\dfrac{5}{2}$时,$x\in\varnothing$.

当$-a>-\dfrac{5}{2}$时,$-\dfrac{5}{2}<x<-a$.

要使原不等式组的解集中只有单元素-2,则$-a>-\dfrac{5}{2}$且$-a>-2$,$-a\leqslant 3$ 即$-2<-a\leqslant 3$,而$-3\leqslant a<2$.

> **[评析]** 本题可利用数轴辅助求解,$-a$ 的上限可以到了.

例 4 (2005 年北京题)解关于 x 的不等式:

$ax^2-2\geqslant 2x-ax(a\in\mathbf{R})$.

[分析] 由于不等式中最高次幂系数为 a,$(a\in\mathbf{R})$,因而它可能为零,也可能大于零或小于零.因此要对 a 进行分类讨论.

解:原不等式变形为 $ax^2+(a-2)x-2\geqslant 0$,

①$a=0$ 时,$x\leqslant -1$;

②$a\neq 0$ 时,不等式即为$(ax-2)(x+1)\geqslant 0$.

当 $a>0$ 时,$x\geqslant\dfrac{2}{a}$或 $x\leqslant -1$,

由于$\dfrac{2}{a}-(-1)=\dfrac{a+2}{a}$.

于是,当$-2<a<0$ 时,$\dfrac{2}{a}\leqslant x\leqslant -1$.

当 $a=-2$ 时,$x=-1$,当 $a<-2$ 时,$-1\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{a}$.

综上所述,$a=0$ 时,$x\leqslant -1$;

$a>0$ 时,$x\geqslant\dfrac{2}{a}$或 $x\leqslant -1$;

$-2<a<0$ 时,$\dfrac{2}{a}\leqslant x\leqslant -1$;

$a=-2$ 时,$x=-1$;$a<-2$ 时,$-1\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{a}$.

> **[评析]** 对于含字母参数的不等式要分类讨论解决,分类时要掌握好分类标准,做到不重不漏,对特殊的情况要单独考虑.

例 5 已知不等式 $2x-1>m(x^2-1)$.

(1)若对于所有实数 x 不等式恒成立,求 m 的取值范围;

(2)若对于 $m\in[-2,2]$不等式恒成立,求实数 x 的取值范围.

[分析] 题中含有两个未知数,要据题意把其中一个看作自变量,另一个当作参数.

解:(1)原不等式等价于:

$mx^2-2x+(1-m)<0$,对 $x\in\mathbf{R}$ 成立.

当且仅当$\begin{cases}m<0,\\ \Delta=4-4m(1-m)<0,\end{cases}$

解得 $m\in\varnothing$.

(2)设 $f(m)=(x^2-1)m-(2x-1)$,

由于 $m\in[-2,2]$时,$f(m)<0$ 恒成立,

当且仅当$\begin{cases}f(2)<0,\\ f(-2)<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-2x-1<0, & ①\\ -2x^2-2x+3<0, & ②\end{cases}$

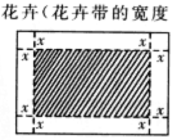
解①得$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

解②得 $x<\dfrac{-1-\sqrt{7}}{2}$或 $x>\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$.

$\therefore\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

即所求 x 的范围是$\left\{x\left|\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right.\right\}$.

例 6 (2004 年江西题)要在长为 800m、宽为 600m 的一块长方形地面上进行绿化.要求四周种花卉(花卉带的宽度相等),中间种草坪(如图),阴影部分种草坪,要求草坪的面积不少于总面积的一半,求花卉带宽度的范围.



解:正确理解题意,分析图中各元素之间的关系,构造二次函数模型求解.设花卉带宽度为 xm,则

$(800-2x)(600-2x)\geqslant\frac{1}{2}\times800\times600$

即 $4x^2-1400\times2x+\frac{1}{2}\times800\times600\geqslant0$，

$x^2-700x+600\times100\geqslant0$，

$(x-600)(x-100)\geqslant0$，

解之得 $0<x\leqslant100$ 或 $x\geqslant600$.

$x\geqslant600$ 不符合题意，舍去.

故所求花卉宽度范围为 $0<x\leqslant100$.

[评析] 解应用题的关键在于合理建构数学模型，但最终结果还应回到实际问题中去.

命题导向及考题介绍

高考对"绝对值不等式"的考查主要体现在：一是考查绝对值的概念，常以选择题的形式；二是解不等式；三是综合问题中含有"绝对值不等式". 一元二次不等式是解各类不等式的基础，特别是含参数的不等式的解法. 不等式每年必考.

例 1 （2004 年高考全国Ⅰ·理）不等式 $|x+2|\geqslant|x|$ 的解集是________.

[答案] $\{x|x\geqslant-1\}$.

$\because|x+2|\geqslant|x|$，

$\therefore x^2+4x+4\geqslant x^2$，

$\therefore x\geqslant-1$ 得解集为 $\{x|x\geqslant-1\}$.

[评析] 本题考查了绝对值不等式的求解和基本运算能力.

例 2 （2004 年高考全国题）不等式 $1<|x+1|<3$ 的解集为（　　）.

A. $(0,2)$　　B. $(-2,0)\cup(2,4)$

C. $(-4,0)$　　D. $(-4,-2)\cup(0,2)$

[答案] D

由 $1<|x+1|<3$ 可得 $1<x+1<3$ 或 $-3<x+1<-1$，解得 $0<x<2$ 或 $-4<x<-2$，$\therefore$ 选 D.

例 3 （2004 年高考江苏题）二次函数 $y=ax^2+bx+c(x\in\mathbf{R})$ 的部分对应值如下表：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是________.

[答案] $(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$

据表中可得 $c=-6$，$ax^2+bx+c=0$ 的两根为 $x_1=-2$，$x_2=3$，

$\therefore\frac{c}{a}=-6$ 得 $a=1$，$-\frac{b}{a}=-2+3$ 得 $b=-1$.

$\therefore y=x^2-x-6$.

$\therefore x^2-x-6>0$ 的解集是 $(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$.

[评析] 本题主要考查二次函数、二次方程、二次不等式的有关知识和综合分析、解决问题的能力.

例 4 （2004 年高考江苏题）已知 $f(x)=\begin{cases}1,x\geqslant0,\\-1,x<0,\end{cases}$ 则不等式 $x+(x+2)f(x+2)\leqslant5$ 的解集是________.

[答案] $\{x|x\leqslant\frac{3}{2}\}$.

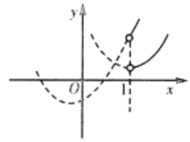
令 $x+2\geqslant0$ 和 $x+2<0$ 两类即

$\begin{cases}x+2\geqslant0,\\x+(x+2)\leqslant5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+2<0,\\x-(x+2)\leqslant5.\end{cases}$

解得 $x\leqslant\frac{3}{2}$.

例 5 （2000 年上海题改编）已知不等式 $\frac{x^2+2x+a}{x}>a$ 对于任意 $x>1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

解法 1：不等式 $\frac{x^2+2x+a}{x}>a$ 对任意 $x>1$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ 不等式 $x^2+(2-a)x+a>0$ 对任意 $x>1$ 恒成立.



令 $f(x)=x^2+(2-a)x+a$，则由数形结合的思想得

$\begin{cases}\frac{a-2}{2}\leqslant1,\\f(1)\geqslant0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\frac{a-2}{2}>1,\\f(\frac{a-2}{2})>0.\end{cases}$

解得 $a\leqslant4$ 或 $4<a<4+2\sqrt{3}$. 故所求实数 a 的取值范围是 $\{a|a<4+2\sqrt{3}\}$.

解法 2：提示：依题意得，不等式

$a(x-1)<x^2+2x$ 对 $x>1$ 恒成立，题意即共点 $A(1,0)$ 的直线系恒在抛物线段 $y=x^2+2x(x>1)$ 的下方.

解法 3：提示：依题意得，不等式

$\frac{x^2+2x}{x-1}>a$ 对任意数 $x>1$ 恒成立，则转化为 $\left(\frac{x^2+2x}{x-1}\right)_{\min}>a$.

[评析] 解法 1 的适用范围较大但演算稍繁，解法 2 既直观又简捷但适用范围稍小，解法 3 用到均值不等式求最小值但适用范围更小.

活题训练

一、选择题

1. 若不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集为 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{3})$，则 $a+b$ 的值为（　　）.

A. 10　　B. -10　　C. 14　　D. -14

2. 不等式 $\frac{x-1}{2x}\leqslant1$ 的解集是（　　）.

A. $\{x|x\geqslant-1\}$　　B. $\{x|x\leqslant-1\}$

C. $\{x|-1\leqslant x\leqslant0\}$　　D. $\{x|x\leqslant-1$ 或 $x>0\}$

3. 若不等式 $(a-2)x^2+2(a-2)x-4<0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则 a 的取值范围是（　　）.

A. $(-\infty,2]$　　B. $[-2,2]$

C. $(-2,2]$　　D. $(-\infty,-2)$

4. 已知二次函数 $f(x)=4x^2-2(p-2)x-2p^2-p+1$，若在区间 $[-1,1]$ 内至少存在一个实数 c，使 $f(c)>0$，则实数 p 的取值范围是（　　）.

A. $(-\frac{1}{2},1)$　　B. $(-3,-\frac{1}{2})$

C. $(-3,\frac{3}{2})$　　D. $(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

二、填空题

5. 不等式$\frac{x^2-3x-28}{x^2+2x-3}\leqslant 0$的解集是________.

6.(2004 年长春题)若不等式$\frac{(x+a)(x+b)}{x-c}\geqslant 0$的解集为$[-1,2)\cup[3,+\infty)$,则$a+b=$________.

三、解答题

7.(2004 年北京题)已知关于x的不等式$\frac{x+2}{m}>1+\frac{x-5}{m^2}$.

(1)解这个不等式;

(2)当此不等式的解集为$\{x|x>5\}$时,求实数m的值.

8. 已知集合$A=\{x|2x^2+7x-15<0\}$,$B=\{x|x^2+ax+b\leqslant 0\}$满足$A\cap B=\varnothing$,$A\cup B=\{x|-5<x\leqslant 2\}$求实数$a,b$的值.

9. 解关于x的不等式$\frac{ax^2}{ax-1}>x(a\in\mathbf{R})$.

10. 已知二次函数$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$的图象与直线$y=25$有公共点,且二次不等式$ax^2+bx+c>0$的解集是$(-\frac{1}{2},\frac{1}{3})$,求实数$a,b,c$的取值范围.

§1.3 逻辑联结词与四种命题

基本知识

1. 理解逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义,会判断命题是否为复合命题,以及命题的真假.

2. 理解四种命题及其相互关系.会利用等价命题的真假来判断一个命题的真假;会用反证法证题.

经典题型

例 1 如果命题"p或q"为真命题,"p且q"为假命题,那么(　　).

A. 命题p、q都是真命题

B. 命题p、q都是假命题

C. 命题p、q中仅有一个真命题

D. 命题p、q中至少有一个真命题

解:由"p或q"为真命题知,命题p、q中至少有一个真命题.

由"p且q"为假命题知,命题p、q中至少有一个假命题,所以p、q中仅有一个真命题.

∴选 C.

例 2 分别写出由下列各组命题构成的"p或q","p且q"、"非p"形式的复合命题,并判断其真假:

(1)p:3 是 9 的约数,q:3 是 18 的约数.

(2)p:菱形的对角线相等,q:菱形的对角线互相垂直.

(3)p:方程$x^2+x-1=0$的两实根符号相同,q:方程$x^2+x-1=0$的两实根绝对值相同.

(4)p:π是有理数,q:π是无理数.

解:(1)p或q:3 是 9 的约数或 18 的约数.真.p且q:3 是 9 的约数且是 18 的约数.真.非p:3 不是 9 的约数.假.

(2)p或q:菱形的对角线相等或互相垂直.真.p且q:菱形的对角线相等且互相垂直.假.非p:菱形的对角线不相等.真.

(3)p或q:方程$x^2+x-1=0$的两实根符号相同或绝对值相等.假.

p且q:方程$x^2+x-1=0$的两实根符号相同且绝对值相等.假.非p:方程$x^2+x-1=0$的两实根符号不相同.真.

(4)p或q:π是有理数或无理数.真.

p且q:π是有理数且是无理数.假.

非p:π不是有理数.真.

[评析]　本例给出两个简单命题并能由它们构成含有"或"、"且"、"非"的复合命题.对于判断复合命题的真假,记住:p且q形式是"一假必假,其余皆真",p或q形式是"一真必真,其余皆假",非p则是"与p的真假相反".

例 3 分别写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题,并判断它们的真假.

(1)若$q<1$,则方程$x^2+2x+q=0$有实根.

(2)若$ab=0$,则$a=0$或$b=0$.

(3)若$x^2+y^2=0$,则x、y全为零.

解:(1)逆命题:若方程$x^2+2x+q=0$有实根,则$q<1$,逆命题为假命题.

否命题:若$q\geqslant 1$,则方程$x^2+2x+q=0$无实根,否命题为假命题.

逆否命题：若 $x^2+2x+q=0$ 无实根，则 $q\geq 1$，逆否命题为假命题.

(2)逆命题：若 $a=0$ 或 $b=0$，则 $ab=0$，逆命题为真命题.

否命题：若 $ab\neq 0$，则 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$，否命题为真命题.

逆否命题：若 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$，则 $ab\neq 0$，逆否命题为真命题.

(3)逆命题：若 x、y 全为零，则 $x^2+y^2=0$，逆命题为真命题.

否命题：若 $x^2+y^2\neq 0$，则 x、y 不全为零，否命题为真命题.

逆否命题：若 x、y 不全为零，则 $x^2+y^2\neq 0$，逆否命题为真命题.

[评析] 四种命题的关系：若① $p\Rightarrow q$ 为原命题，则② $q\Rightarrow p$，③ $\neg p\Rightarrow\neg q$，④ $\neg q\Rightarrow\neg p$ 分别为原命题①的逆命题、否命题、逆否命题，①、④互为逆否命题，是等价命题. ②、③也互为逆否命题，也是等价命题.

例 4 已知适合不等式 $2x^2-9x+m<0$ 的每个 x 至少满足不等式 $x^2-4x+3<0$ 和 $x^2-6x+8<0$ 中的一个，求实数 m 的取值范围.

解：设 $A=\{x\mid x^2-4x+3<0\}=(1,3)$，$B=\{x\mid x^2-6x+8<0\}=(2,4)$. 依题意 $M=\{x\mid 2x^2-9x+m<0\}\subseteq A\cup B=(1,4)$. 且 $M\neq\varnothing$. 设 $f(x)=2x^2-9x+m$，

$$\therefore\begin{cases}\Delta>0,\\ f(1)\geq 0,\\ f(4)\geq 0.\end{cases}\Rightarrow m\in\left[7,\frac{81}{8}\right),$$

故实数 m 的取值范围是 $\left[7,\frac{81}{8}\right)$.

[评析] 若 M 中的每一个 x 至少满足 A、B 中的一个，解 $M\subseteq A\cup B$；同时满足 A、B. 则 $M\subseteq A\cap B$.

例 5 求证：两条相交直线有且只有一个交点.

证：假设结论不成立，则有两种情况：或者没有交点，或者不只一个交点.

(1)如果直线 a、b 没有交点，那么 $a\parallel b$ 或 a 与 b 异面，这与已知矛盾；

(2)如果直线 a、b 不只有一个交点，则至少交于点 P，P'，这样经过两点 P、P' 就有两条直线 a、b，这与两点确定一条直线矛盾.

由(1)和(2)可知，假设错误，所以，两条相交直线有且只有一个交点.

[评析] ①反证法是常用的间接证法之一. 它的实质是：当证明"若 p 则 q"感到困难时，改证它的等价命题"若 $\neg q$ 则 $\neg p$"成立.

②反证法证题步骤：

第一步：假设结论反面成立；

第二步：从这个假设出发，推理论证，得出矛盾；

第三步：由矛盾判定假设不成立，从而肯定结论正确.

由于反证法是很有用的方法，所以应当学会使用反证法来证明用直接证法感到困难的问题.

命题导向及考题介绍

高考对"逻辑联结词及四种命题"的要求是"理解". 考题一般以选择题、填空题的形式出现，如果是解答题也只是作为条件之一.

高考要求了解命题的概念和命题的构成，理解逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义，理解四种命题及相互关系.

例 1 (2004 年高考全国题)对于直线 m、n 和平面 α，下列命题中的真命题是(　　).

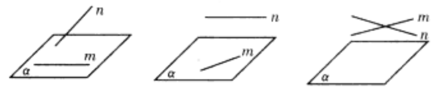
A. 如果 $m\subset\alpha$，$n\not\subset\alpha$，m、n 是异面直线，那么 $n\parallel\alpha$

B. 如果 $m\subset\alpha$，$n\not\subset\alpha$，m、n 是异面直线，那么 n 与 α 相交

C. 如果 $m\subset\alpha$，$n\parallel\alpha$，m、n 共面，那么 $m\parallel n$

D. 如果 $m\parallel\alpha$，$n\parallel\alpha$，m、n 共面，那么 $m\parallel n$

解：对于直线 m、n 和平面 α，可以作出以下关系图：



①　　②　　③

如图①②③可分别得出 A、B、D 均不正确.

∴选 C.

例 2 (2004 年高考湖北题)设 A、B 为两个集合，下列四个命题：

① $A\not\subseteq B\Leftrightarrow$ 对任意 $x\in A$，有 $x\notin B$；

② $A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$；

③ $A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\not\supseteq B$；

④ $A\not\subseteq B\Leftrightarrow$ 存在 $x\in A$，使得 $x\notin B$.

其中真命题的序号是________.（把符合要求的命题序号都填上）

解：①不正确. 例 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$ 有 $A\not\subseteq B$ 但 $2\in A$ 且 $2\in B$.

②不正确. 例 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,3\}$ 有 $A\not\subseteq B$ 而 $A\cap B=\{2\}$.

③不正确. 例 $A=\{1,2\}$，$B=\{2\}$ 有 $A\not\subseteq B$ 但 $B\subseteq A$.

④正确. ∴选④.

[评析] 本小题主要考查集合的包含关系和逻辑分析、推理能力. 举反例是解本题行之有效的好方法.

例 3 (2004 年高考全国题)下面是关于四棱柱的四个命题：

①若有两个侧面垂直于底面，则该四棱柱为直四棱柱；

②若两个过相对侧棱的截面都垂直于底面，则该四棱柱为直四棱柱；

③若四个侧面两两全等，则该四棱柱为直四棱柱；

④若四棱柱的四条对角线两两相等，则该四棱柱为直四棱柱.

其中，真命题的编号为________(写出所有真命题的编号).

解：①不正确. 若两个侧面是相对的，可能是斜棱柱；

③不正确，可能是斜棱柱.

∴只有②、④正确. 故填②、④.

[评析] 本题主要考查四棱柱的有关知识和空间想象能力. 要求考生具备一定的举反例技能和推理论证能力.

活题训练

一、选择题

1. 下列命题正确的是(　　).

①“若 $x^2+y^2\neq 0$，则 x、y 不全为零”的否命题；
②“正多边形都相似”的逆命题；
③“若 $a>1$，则 $ax^2-2(a+1)x+a-3>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$”的逆否命题；
④“若 $a+\sqrt{5}$是有理数，则 a 是无理数”的逆否命题.

A. ①②③　　B. ①④　　C. ②③④　　D. ①③④

2.(2004 年黄冈题)如果命题“非 p 或非 q”是假命题，则在下列各结论中，正确的为(　　).
①命题“p 且 q”是真命题；
②命题“p 且 q”是假命题；
③命题“p 或 q”是真命题；
④命题“p 或 q”是假命题.

A. ①③　　B. ②④　　C. ②③　　D. ①④

3.(2004 年长春题)已知 $c>0$，设 P：函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；Q：函数 $g(x)=\lg(2cx^2+2x+1)$ 的值域为 $\mathbf{R}$. 如果“P 且 Q”为假命题，“P 或 Q”为真命题，则 c 的取值范围是(　　).

A. $(\frac{1}{2},1)$　　B. $(\frac{1}{2},+\infty)$

C. $(0,\frac{1}{2}]\cup[1,+\infty)$　　D. $(0,\frac{1}{2}]$

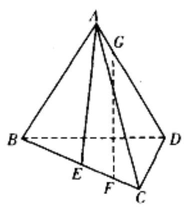
4.(2004 年重庆市题)平面 α、β 都垂直于平面 γ，且 $\alpha\cap\gamma=a$，$\beta\cap\gamma=b$. 给出四个命题：①若 $a\perp b$，则 $\alpha\perp\beta$；②若 $a\parallel b$，则 $\alpha\parallel\beta$；③若 $\alpha\perp\beta$，则 $a\perp b$；④若 $\alpha\parallel\beta$，则 $a\parallel b$，以上命题中，正确命题的个数为(　　).

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

二、填空题

5.(2004 年南通题)给出下列四个命题：
①过平面外一点，作与该平面成 θ 角的直线一定有无穷多条；
②一条直线与两个相交平面都平行，则它必与这两个平面的交线平行；
③对确定的两条异面直线，过空间任意一点有且只有唯一的一个平面与这两条异面直线都平行；
④对两条异面的直线，都存在无穷多个平面与这两条直线所成的角相等.
其中正确的命题序号为________.(请把所有正确命题的序号都填上)

6.(2004 年安徽省重点中学素质测试)如右图，已知棱长为 a 的正四面体 $ABCD$ 中，E、F 在 BC 上，G 在 AD 上，E 是 BC 的中点，$CF=\frac{1}{4}CB$，$AG=\frac{1}{4}AD$，给出下列四个命题：①$AC\perp BD$；②$FG=\frac{\sqrt{10}}{4}a$；③侧面与底面所成二面角的余弦值为$\frac{1}{3}$，④$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CB}<\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CD}$. 其中真命题的序号是________.



7.(2004 年成都题)有下列 4 个命题：
①若 α、β 是复数，且 $\alpha^2+\beta^2=0$，则 $\alpha=\beta=0$.
②若 $z\in\mathbf{C}$，则 $|z^2|=|z|^2$.
③若 z_1、$z_2\in\mathbf{C}$，则$\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2}$是实数.
④若 z_1、z_2 分别对应点 A、B(O 为坐标原点)且$\angle AOB=90°$，则$|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$.
上述命题中正确的是________.(写出所有正确命题的序号)

8.(2004 年长沙市高考调研)已知曲线 C：$x^2+(k-1)y^2-3ky+2k=0$($k>0$ 且 $k\neq 2$). 给出下列命题：
①$0<k<1$ 时，曲线 C 是焦点在 x 轴上的双曲线；
②$k=1$ 时，曲线 C 是抛物线；
③$1<k<2$ 时，曲线 C 是焦点在 y 轴上的椭圆；
④$k>2$ 时，曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆.
其中正确命题的序号是________.

三、解答题

9. 命题：已知 a、b 为实数，若 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 有非空解集，则 $a^2-4b\geqslant 0$，写出该命题的逆命题，否命题、逆否命题，并判断这些命题的真假.

10. 若 a、b、c 均为实数，且 $a=x^2-2y+\frac{\pi}{2}$，$b=y^2-2z+\frac{\pi}{3}$，$c=z^2-2x+\frac{\pi}{6}$. 求证：a、b、c 中至少有一个大于 0.

§1.4　充要条件

基本知识

1. 掌握充分条件、必要条件、充要条件的意义.
2. 会判断“A 是 B”的充分或必要条件.
3. 理解“充分条件与必要条件”和四种命题之间的相互联系. 在判断命题的条件是否充要时，可考虑“正难则反”的原则.

经典题型

例 1 已知两条不重合直线 $l_1: ax+by+c=0$，直线 $l_2: mx+ny+p=0$ 则 $an=bm$ 是直线 $l_1 \parallel l_2$ 的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

解：$\because an=bm$.

若 $a=0$，则 $m=0$，$l_1 \parallel l_2$；$n=0$，也有 $l_1 \parallel l_2$.

若 $an \neq 0$，则 $\frac{a}{m}=\frac{b}{n} \Rightarrow l_1 \parallel l_2$，

$l_1 \parallel l_2$，若 $ab \neq 0$，则 $\frac{a}{m}=\frac{b}{n} \Rightarrow an=bm$.

若 $a=0$，则 $m=0$；若 $b=0$，则 $n=0$，都有 $an=bm$，故选 C.

例 2 (1) p：x_1、x_2 是方程 $x^2+5x-6=0$ 的两根，q：$x_1+x_2=-5$，则 p 是 q 的(　　).

A. 充分但不必要条件　　B. 必要但不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

解：$\because x_1=1, x_2=-6$，$\therefore x_1+x_2=-5$，即 $p \Rightarrow q$.

但 $x_1=-2, x_2=-3$ 时，满足 q，而 x_1、x_2 不是方程的根，即 $q \nRightarrow p$. $\therefore$ 选 A.

(2)若命题甲是命题乙的充分不必要条件，命题丙是命题乙的必要不充分条件，命题丁是命题丙的充要条件，则命题丁是命题甲的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

解：要明确丁是甲的什么条件，可据已知条件用"→"符号把几个命题联结起来，形成"桥"，再利用传递性来确定.

从图中可看出甲 $\Rightarrow$ 丁，但丁 $\nRightarrow$ 甲，$\therefore$ 应选 B.

$$甲 \underset{\not\leftarrow}{\rightarrow} 乙 \underset{\not\leftarrow}{\rightarrow} 丙 \underset{\leftarrow}{\rightarrow} 丁$$

[评析] 判断充分性、必要性主要是根据定义来判定.

例 3 设 x、$y \in \mathbf{R}$，求证：$|x+y|=|x|+|y|$ 成立的充要条件是 $xy \geq 0$.

[分析] 充分性是证：$xy \geq 0 \Rightarrow |x+y|=|x|+|y|$；

必要性是证：$|x+y|=|x|+|y| \Rightarrow xy \geq 0$.

证明：充分性：如果 $xy=0$，那么，① $x=0, y \neq 0$；② $y=0, x \neq 0$；③ $x=0, y=0$. 于是 $|x+y|=|x|+|y|$.

如果 $xy>0$，即 $x>0, y>0$ 或 $x<0, y<0$.

当 $x>0, y>0$ 时，$|x+y|=x+y=|x|+|y|$.

当 $x<0, y<0$ 时，$|x+y|=-(x+y)=-x+(-y)=|x|+|y|$.

总之，当 $xy \geq 0$ 时，有 $|x+y|=|x|+|y|$.

必要性：由 $|x+y|=|x|+|y|$ 及 $x, y \in \mathbf{R}$，得 $(x+y)^2=(|x|+|y|)^2$，

即 $x^2+2xy+y^2=x^2+2|xy|+y^2$，

$|xy|=xy$，$\therefore xy \geq 0$.

[评析] 充要条件的证明关键是根据定义确定哪是已知条件，哪是结论，然后搞清充分性是证明哪一个命题，必要性是证明哪一个命题.

例 4 已知 p：$-2<m<0, 0<n<1$，q：关于 x 的方程 $x^2+mx+n=0$ 有两个小于 1 的正根，试分析 p 是 q 的什么条件.

[分析] 首先明确 $p \Rightarrow q$ 是充分性，$q \Rightarrow p$ 是必要性，其次明确方程 $x^2+mx+n=0$ 有两个小于 1 的正根的含义是 $0<x_1<1, 0<x_2<1$.

当 $-2<m<0, 0<n<1$ 时，方程 $x^2+mx+n=0$ 对应的函数 $f(x)=x^2+mx+n$ 的对称轴为 $x=-\frac{m}{2} \in (0,1)$，且满足 $n=f(0) \in (0,1)$，但函数不一定与 x 轴有交点即 $\Delta=m^2-4n$ 不一定大于等于 0. 所以不满足充分性. 反之，若方程有两个大于 0 小于 1 的根，则必有对称轴 $0<-\frac{m}{2}<1$，且 $f(0)>0$，且 $\Delta \geq 0$，

$$即\begin{cases}-2<m<0,\\ n>0,\\ m^2-4n \geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m^2<4,\\ n>0,\\ n \leq \frac{m^2}{4}<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0<n<1,\\ -2<m<0,\end{cases}$$

所以 p 是 q 的必要条件.

[评析] 辨别条件与结论的标志有二：一是题中出现 A 是 B 的……条件时，则 A 是条件，B 是结论；若出现 A 成立的……条件是 B 时，则 B 是条件，A 是结论.

例 5 求 $ax^2+2x+1=0 (a \neq 0)$ 至少有一负根的充要条件.

[分析] 方程至少有一负根包括，一正一负根，二负根（两根积为 $\frac{1}{a}$，无零根），还要考虑 a 的正负号. 也可以从至少一负根的反面入手.

解：$\because a \neq 0$，$x_1x_2=\frac{1}{a}$，所以方程至少有一负根应有：

(1)正负根各有一个，此时有 $x_1x_2<0$，即 $\frac{1}{a}<0$，解得 $a<0$；

$$(2)两负根，此时应有\begin{cases}\Delta=4-4a \geq 0,\\ x_1+x_2=-\frac{2}{a}<0,\\ x_1x_2=\frac{1}{a}>0,\end{cases}$$

解得 $0<a \leq 1$.

$\therefore$ 方程至少应有一负根的充要条件是 $a \leq 1$，且 $a \neq 0$.

[评析] 求充要条件的问题实质就是求满足题设所需的条件，值得注意的是要保证这些条件的充要性.

命题导向及考题介绍

充分必要条件是每年高考必考内容，多以选择题形式出现，属中档题或容易题，该类试题得分与否，主要与该题所涉及的内容有关，而往往与该考点的知识无关，请在复习时，一定要把各考点的基本知识学好.

例 1 (2004 年高考北京题)函数 $f(x)=x^2-2ax-3$ 在区间 $[1,2]$ 上存在反函数的充分必要条件是(　　).

A. $a \in (-\infty, 1]$　　B. $a \in [2, +\infty)$

C. $a \in [1,2]$　　D. $a \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

解：函数 $f(x)=x^2-2ax-3$ 在 $[1,2]$ 上存在反函数的充分必要条件是对称轴 $a \geq 2$ 或 $a \leq 1$. $\therefore$ 选 D.

[评析] 本小题考查反函数、二次函数的性质及分析问题的能力. 本题关键在于理解存在反函数的条件是在[1,2]上具备单调性. 本题亦可求导解决.

例 2 (2004 年高考浙江题)在$\triangle ABC$中,"$A>30°$"是"$\sin A>\frac{1}{2}$"的(　　).

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

解:在$\triangle ABC$中,$0°<A<180°$,由$\sin A>\frac{1}{2}$可得$30°<A<150°$,

故"$A>30°$"是"$\sin A>\frac{1}{2}$"的必要不充分条件. ∴选 B.

例 3 (2004 年高考湖北题)已知$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为非零的平面向量,甲:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,乙:$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$则(　　).

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件,又不是乙的必要条件

解:若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$,只需$\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$即可,$\boldsymbol{b}$可以不等于$\boldsymbol{c}$.

若$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,显然$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. ∴选 B.

[评析] 本小题主要考查向量、简易逻辑等有关知识和分析、推理能力,要求考生有一定的判断能力.

例 4 (2005 年高考湖北题)对任意实数a、b、c,给出下列命题:

①"$a=b$"是"$ac=bc$"的充要条件;

②"$a+5$是无理数"是"a是无理数"的充要条件;

③"$a>b$"是"$a^2>b^2$"的充分条件;

④"$a<5$"是"$a<3$"的必要条件.

其中真命题的个数是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解:①是充分条件;②正确;③是非充分非必要条件;④正确. ∴选 B.

例 5 已知$h>0$,设命题甲为:两个实数a、b满足$|a-b|<2h$,命题乙为:两个实数a、b满足$|a-1|<h$,$|b-1|<h$,那么(　　).

A. 甲是乙的充分条件,但不是乙的必要条件

B. 甲是乙的必要条件,但不是乙的充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲不是乙的充分条件,也不是乙的必要条件

[错解] 由$|a-b|<2h\Leftrightarrow|(a-1)-(b-1)|<h+h\Leftrightarrow|a-1|<h,|b-1|<h$.

故本题应选 C.

[错因] 上述错误因对概念模糊不清而造成.

(1)对充分、必要、充要条件的概念不清,无从判定,凭猜测产生错误.

(2)不能熟练地运用绝对值不等式的性质作正确推理而产生错误.

[正解] 因$\begin{cases}|a-1|<h,\\|b-1|<h\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-h<a-1<h, & ①\\-h<b-1<h. & ②\end{cases}$

由①－②,得$-2h<a-b<2h\Leftrightarrow|a-b|<2h$.

即由命题乙成立可推出命题甲成立,

所以甲是乙的必要条件.

由于$\begin{cases}|a-2|<h,\\|b-2|<h,\end{cases}$同理也可得$|a-b|<2h$.

因此,命题甲成立不能确定命题乙一定成立,所以甲不是乙的充分条件,故应选 B.

例 6 (2002 年全国题)已知$a>0$,函数$f(x)=ax-bx^2$.

(1)当$b>0$时,若对任意$x\in\mathbf{R}$都有$f(x)\leqslant1$,证明$a\leqslant2\sqrt{b}$.

(2)当$b>1$时,证明对任意$x\in[0,1]$,$|f(x)|\leqslant1$的充要条件是$b-1\leqslant a\leqslant2\sqrt{b}$.

(3)当$0<b\leqslant1$时,讨论:对任意$x\in[0,1]$,$|f(x)|\leqslant1$的充要条件.

解:(1)证明:依题设,对任意$x\in\mathbf{R}$都有$f(x)\leqslant1$,

$\therefore f(x)=-b(x-\frac{a}{2b})^2+\frac{a^2}{4b}$,

$\therefore f(\frac{a}{2b})=\frac{a^2}{4b}\leqslant1$.

$\because a>0,b>0,\therefore a\leqslant2\sqrt{b}$.

(2)证明:必要性.

对任意$x\in[0,1]$,$|f(x)|\leqslant1\Rightarrow-1\leqslant f(x)\leqslant1\Rightarrow-1\leqslant f(1)$,

即$a-b\geqslant-1$,$a\geqslant b-1$.

对任意$x\in[0,1]$,$|f(x)|\leqslant1\Rightarrow f(x)\leqslant1$,因为$b>1$,

$\therefore f(\frac{1}{\sqrt{b}})\leqslant1$.

即$a\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}-1\leqslant1$,$\therefore a\leqslant2\sqrt{b}$.

$\therefore b-1\leqslant a\leqslant2\sqrt{b}$.

充分性:

$\because b>1,a\geqslant b-1$,对任意$x\in[0,1]$可得$ax-bx^2\geqslant b(x-x^2)-x\geqslant-x\geqslant-1$,

即$ax-bx^2\geqslant-1$.

$\because b>1,a\leqslant2\sqrt{b}$,对任意$x\in[0,1]$,可得$ax-bx^2\leqslant2\sqrt{b}x-bx^2\leqslant1$,

即$ax-bx^2\leqslant1$,$\therefore-1\leqslant f(x)\leqslant1$.

综上,当$b>1$时对任意$x\in[0,1]$,$|f(x)|\leqslant1$的充要条件是$b-1\leqslant a\leqslant2\sqrt{b}$.

(3)$\because a>0,0<b\leqslant1$时,对任意$x\in[0,1]$,

$f(x)=ax-bx^2\geqslant-b\geqslant-1$,即$f(x)\geqslant-1$.

$f(x)\leqslant1\Rightarrow f(1)\leqslant1\Rightarrow a-b\leqslant1$,即$a\leqslant b+1$,

$a\leqslant b+1\Rightarrow f(x)\leqslant(b+1)x-bx^2\leqslant1$,即$f(x)\leqslant1$.

所以,当$a>0,0<b\leqslant1$时,对任意$x\in[0,1]$,$|f(x)|\leqslant1$的充要条件是$a\leqslant b+1$.

[评析] 证充要条件要证充分性和必要性两个方面,在证题过程中一定要注意,哪些是条件,结论是什么,由什么推导什么.