学新课标教材
用新理念教辅

高中新课标

与苏教版普通高中课程标准实验教科书同步

教材精析精练

数学 必修1

延边教育出版社

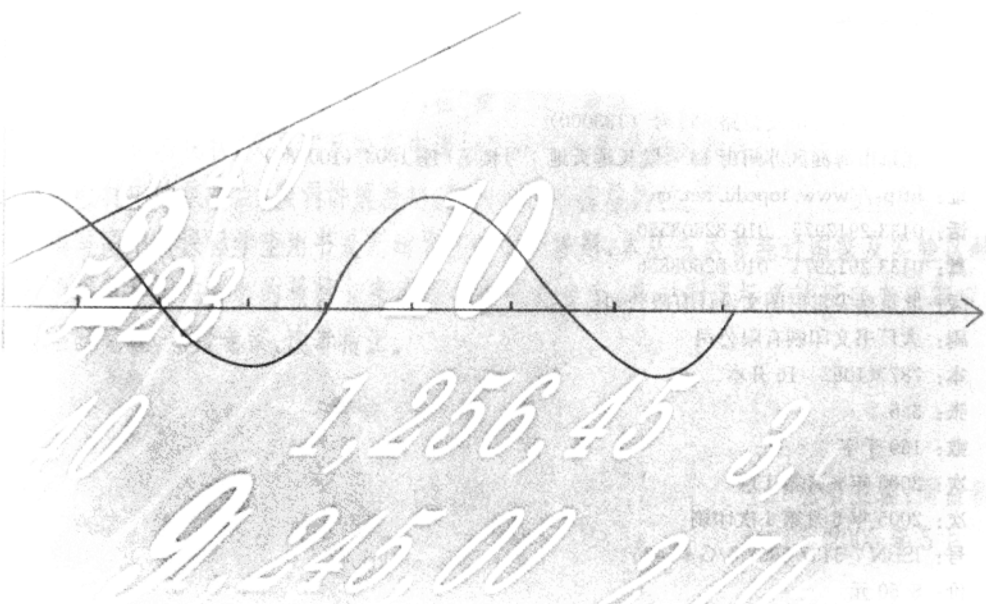
高中新课标

学新课标教材
用新理念教辅

与苏教版普通高中课程标准实验教科书同步

教材精析精练

数学 必修①



延边教育出版社

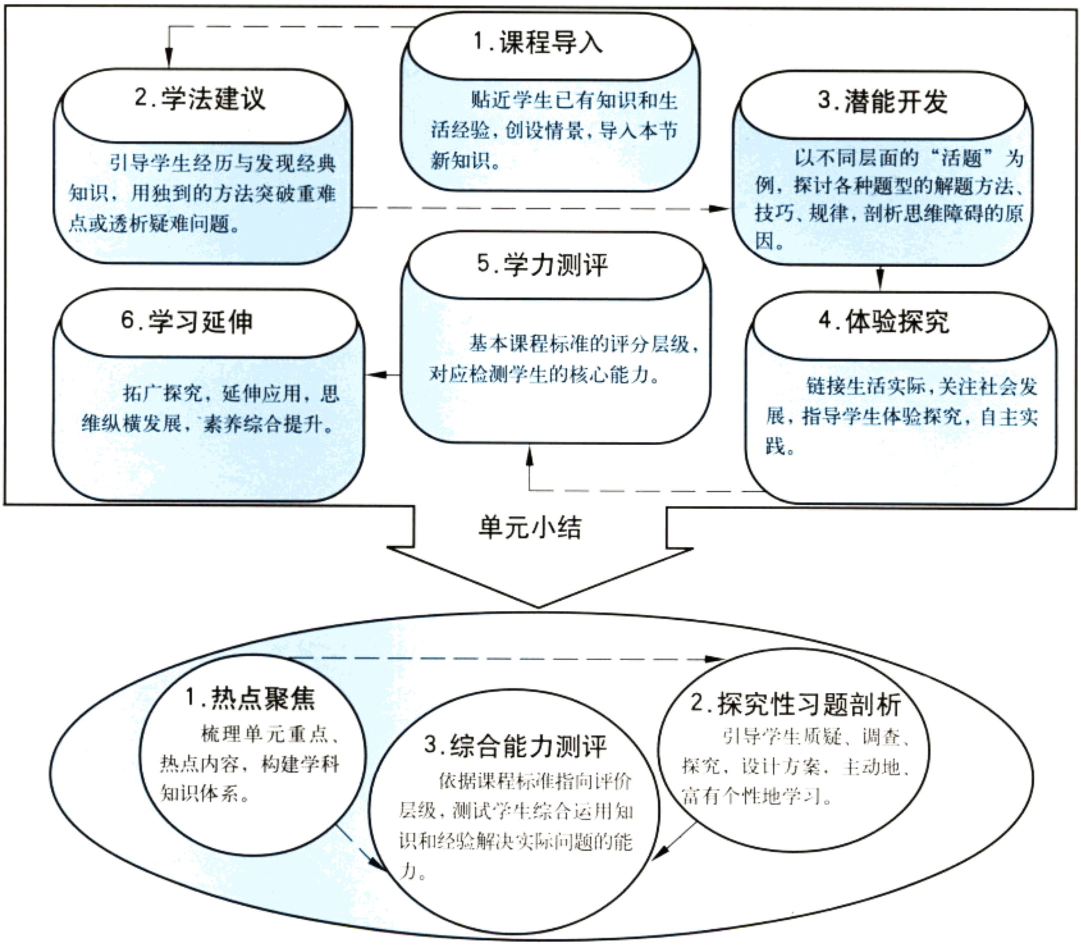
□ 策　　划：鼎尖教育研究中心
　　　　　　韩明雄　黄俊葵
□ 执行策划：鲁艳芳
□ 丛书主编：周益新
□ 本册主编：曹　兵
□ 编　　著：石　卫　徐珍娥　曹卫红　沈菊珍　干小春　谢恩德
　　　　　　徐文平　柯丽芬　罗红斌　潘雄心　蔡玲姣　何志新
　　　　　　汪碧胜　余旺珍　张焱华　王桂明　王奉武　潘年华
　　　　　　李正阳　桂瑞宏　徐绍取　徐　敏　石峰林　蔡　健
　　　　　　李亚洲　彭　标　邱绪英　胡启安
□ 责任编辑：王连香
□ 法律顾问：北京陈鹰律师事务所（010-64970501）

与苏教版普通高中课程标准实验教科书同步
《教材精析精练》高中数学必修 1

出版发行：延边教育出版社
地　　址：吉林省延吉市友谊路 363 号（133000）
　　　　　北京市海淀区苏州街 18 号院长远天地 4 号楼 A1 座 1003（100080）
网　　址：http://www.topedu.net.cn
电　　话：0433-2913975　010-82608550
传　　真：0433-2913971　010-82608856
排　　版：北京鼎尖雷射图文设计有限公司
印　　刷：大厂书文印刷有限公司
开　　本：787×1092　16 开本
印　　张：6.5
字　　数：169 千字
版　　次：2005 年 6 月第 1 版
印　　次：2005 年 6 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-5437-5957-8/G·5433
定　　价：8.50 元

内容结构与能力培养过程示意图

（高中新课标）



丛书主编

周益新　中国科协教育专家委员会学术委员、全国优秀地理教师、《中国教育报》特聘高考研究专家、湖北省黄冈中学文科综合课题研究组组长、湖北省黄冈市地理教学研究会理事长。自1982年起，一直在黄冈中学任教，所带班级的高考成绩特别优异。近几年来，潜心研究素质教育、创新教育、学生潜能开发的方法、途径，并归纳总结“3+X”高考改革模式下的文科综合教学方法，在《光明日报》《中国教育报》等国家级报刊上发表教研论文数十篇，其中在《中国教育报》发表的专论《走出“3+X”误区》和《近三年来文科综合能力测试命题思路的探讨》被数百家媒体转载。受各级教育行政部门的邀请，作过多场文科综合专题研究报告。为全国部分省市教育行政部门组织的大型考试命题，负责的文科综合试题的各项指标均达到理想水平。从1984年起，长期坚持组织学生开展地理野外综合考察等研究性学习活动，指导学生撰写的研究性学习小论文多次获湖北省科协、湖北省教研室一等奖。在2002年国家教育部基础教育司和《中国教育报》联合举办的“素质教育案例”评选活动中获奖。策划并主编《教材精析精练》《课时详解·随堂通》等多部优秀系列图书。

前言 qianyan

三年前，由人民教育出版社、延边教育出版社联合出版的《教材精析精练》一跃成为全国优秀的教辅精品图书。该丛书率先与新课程、新理念接轨，融入自主、合作、探究学习的全新学习理念，栏目新颖、版式活泼、讲解透彻、科学性强、题目灵活、准确率高、题量适中，能使学生在高效的学习中能力与成绩得到迅猛提升！

三年后，丛书策划组兢兢业业，与时俱进，获得了国家课程标准研究专家和人民教育出版社各编辑室的指导，多次赴山东、广东、海南等高中新课标实验区，与特级教师共同探索高中新课标"自主性""实践性""探究性""趣味性"的教学模式和最贴近新课标理念的评价模式，潜心研究，精心设计编写了高中新课标《教材精析精练》丛书。在浩瀚的教辅市场中，这套丛书具有以下显著的特点：

标准制造——丛书编写以国家教育部颁布的各学科课程标准为纲，以国家教育部教材审定委员会审查通过的各种教材最新版本为依据。国内著名的高中新课程研究专家和人民教育出版社各学科编辑室对高中新课标实验区特级教师的编写工作进行指导并最终审定书稿。

引领潮流——丛书最贴近高中新课标理念，设置多样栏目拓展学生的知识和眼界，为学生构建开放的学习体系，语言表述清新自然，版式流畅活泼，充分尊重学生学习的主体地位。

与时俱进——丛书讲解和练习部分都充分体现当代社会和科技发展，反映各学科的发展趋势，引导学生关注社会、经济、科技和生活中的现实问题。

科学实用——丛书体例设置科学，在"精析"和"精练"上狠下功夫。既充分考虑目前全国高考考试的现状，又真实反映高中课标实验区的教学模式和评价模式。用独到的方法突破教材中的重难点，强调讲解透彻、分析精辟和指导到位。

编写高中新课标学生用书是新时期新的研究课题，本丛书尽管经过国家及实验区特级教师编写和国内著名的教材专家课程标准研究专家、高中新课标考试研究专家审定，仍需不断完善，恳请专家、读者指正。

丛书主编：周益新

2005年5月

目 录

Content

第1章 集 合

1.1 集合的含义及其表示

集合论是整个现代数学的基础之一，高中教材中的集合概念属朴素集合论的初步，主要学习集合的基本概念，掌握集合的语言.集合语言较之普通语言能更准确、简练、清晰地表达数学知识和逻辑联系，有利于加深对知识的理解和数学思维能力的提高.学习本节后，你会发现我们就生活在一个大的集合中，例如你是高一(1)班的学生，高一(1)班的学生就组成一个集合，你就是这个集合中的一个元素.从某种程度上来说，学习了集合以后，可以使我们在生活中进行准确地定位.

学法建议

(1)集合是高中数学中第一个不加定义的原始概念，所以对集合的理解应从初中数学中寻找实例.例如：代数中有有理数集合、不等式的解集；平面几何中圆的定义、角平分线的定义和性质都涉及集合；

(2)对课本中集合定义的理解还要注意关键词的内涵.例如："一定范围内某些确定的"的含义是指元素的确定性，"不同的"的含义是指惟一性，"对象的全体"的含义是指无序性.

(3)用列举法、描述法表示集合时，应注意根据问题的不同情境或形式选择合理的表示方法，列举法不宜表示无限集，用描述法表示集合时，应该注意代表元素的性质.例如表示数集时代表元素可用一个字母 x 表示，而表示点集时代表元素则用 (x,y) 来表示.此外用 Venn 图表示集合的最大优势在于形象直观.总之应根据不同的情况合理选择应用.

一、知识网络

集合的概念 →
- 元素的特征：确定性、互异性、无序性
- 集合的表示方法：列举法、描述法、图示法
- 集合的分类：有限集、无限集

易错点提示

研究集合不是研究某一对象，而是研究"全体"，因此研究集合就是把握整体，抓好共性.

二、知识归纳

1.对集合概念的理解

对集合概念的理解，要注意集合的元素有三个特性：确定性、互异性和无序性.具体地说就是：①确定性就是自然界中任何一个对象是不是这个集合的元素是明确的，要么是要么不是，不能模棱两可.例如，"年龄大的人""好看的花"等这类对象，一般不能构成数学意义上的集合，这是因为找不到用以判定每一具体对象是否属于集合的明确的标准；②互异性就是指组成集合的每个元素都应该是互不相同的，集合中的元素不能重复出现，换句话说就是相同的只能算一个.例如，方程 $(x^2-4x+4)(x+3)=0$ 的根为 $x_1=x_2=2$，$x_3=-3$，方程的解集为 $\{2,3\}$，而不能写成 $\{2,2,3\}$；③无序性就是指集合的元素之间没有顺序关系，只要放在一起，不存在次序问题.例如，$\{1,2,3\}=\{3,2,1\}$.

2. 一些重要的数集及其符号

自然数集记作 **N**,正整数集记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$,整数集记作 **Z**,有理数集记作 **Q**,实数集记作 **R**.

3. 元素与集合之间的连接符号

集合一般用大写的拉丁字母来表示,元素一般用小写的字母来表示;"$\in$,$\notin$"是元素与集合之间的连接符号,而且 $a\in A$ 与 $a\notin A$ 这两种情况中有且只有一种成立.

4. 对集合表示方法的解析

列举法是把集合的元素一一列举的表示方法,用它表示集合的优点是集合中的元素一目了然,缺点是这种方法不能表示元素是无限(即集合是无限集)的情形;描述法是用确定的条件表示某些对象是不是这个集合的方法,其基本形式是$\{x|x$ 具有性质 $p\}$,使用描述法表示集合,要注意集合的元素是什么,符合什么条件. 由于有些集合既可用列举法又可用描述法表示,所以在学习时应多注意积累经验,选择合理的方法;对比较抽象的集合问题则可以利用 Venn 图(图示法)帮助理解学习.

三、图解重点

下面是用三种方法表示同一个集合的实例:

列举法	描述法	Venn 图(图示法)
$A=\{1,3,5,7\}$	$A=\{x\|x$ 是小于 10 的正奇数$\}$	1,3,5,7

潜能开发

[例 1]给出下列对象:①理想中学高一(1)班的男生;②理想中学高一(1)班的比较聪明的男生;③不小于 2 004、不大于 2 010 的所有正整数;④方程 $x^2-x+\frac{1}{2}=0$ 的实根;⑤比较矮的人.

上述特征所描述的对象能否形成集合?

思路分析 根据集合特征中的确定性进行判断.

解答 ①③④能形成集合,②⑤不能形成集合. 理由如下:

①由于"理想中学高一(1)班的男生"所描述的对象是确定的,所以理想中学高一(1)班的男生可以形成集合;

②由于"理想中学高一(1)班的比较聪明的男生"所描述的对象是不确定的,所以理想中学高一(1)班的比较聪明的男生不能形成集合;

③不小于 2 004、不大于 2 010 的实数 x 满足 $2\,004\leqslant x\leqslant 2\,010$,其中的正整数有:2 004,2 005,2 006,2 007,2 008,2 009,2 010. 所以,不小于 2 004、不大于 2 010 的所有正整数能构成集合;

④因为方程 $x^2-x+\frac{1}{2}=0$ 的判别式 $\Delta=(-1)^2-4\times1\times\frac{1}{2}=-1<0$,所以方程 $x^2-x+\frac{1}{2}$没有实根. 故方程 $x^2-x+\frac{1}{2}=0$ 的实根能构成集合,这个集合是空集;

⑤比较矮的人不能构成集合. 就人的高与矮而言,找不到一个明确的客观标准,使得在这样的标准下,能说清楚这样的人是存在的或者是不存在的,也就是说,这样的对象是不确定的.

思维诊断

判断某种对象能否形成集合,关键在于能否找到一个明确的标准,按照这个确定的标准,它要么是这个集合的元素,要么不是这个集合的元素,或者是能让人们说清楚的对象,存在也可以,不存在也可以. 如:①③中的"理想中学高一(1)班的男生""2 004~2 010"是存在的;④中的对象"方程的实根"是不存在的;②中的"理想中学高一(1)班的比较聪明的男生"、⑤中的"比较矮的人"是不确定的对象.

[例2]下面各组集合中，每个集合的意义是否相同？为什么？

(1) $\{1,5\}$，$\{(1,5)\}$，$\{5,1\}$，$\{(5,1)\}$；

(2) $\{x|x=0\}$，$\{(x,y)|x=0,y\in \mathbf{R}\}$；

(3) $\{x\in \mathbf{R}|x^2-ax-1=0\}$，$\{a\in \mathbf{R}|$方程 $x^2-ax-1=0$ 有实根$\}$.

思路分析　首先正确读懂读通题意，然后根据集合的概念以及集合元素的特征求解.

解答　(1) $\{1,5\}$是由两个数1,5组成的集合，根据集合中元素的无序性，它与$\{5,1\}$是同一集合；$\{(1,5)\}$是由一个点$(1,5)$构成的单元素集合，由于$(1,5)$和$(5,1)$表示两个不同的点，所以$\{(1,5)\}$和$\{(5,1)\}$是两个不同的集合；

(2)集合$\{x|x=0\}$中的元素是数轴上的一个点，集合$\{(x,y)|x=0,y\in \mathbf{R}\}$中的元素是直角坐标平面内的一系列的点，这两个集合的元素根本不同. 因此，它们表示的是不同的两个集合；

(3)集合$\{x\in \mathbf{R}|x^2-ax-1=0\}$中的元素$x$是方程$x^2-ax-1=0$的解，而集合$\{a\in \mathbf{R}|$方程 $x^2-ax-1=0$ 有实根$\}$中的元素a是使方程$x^2-ax-1=0$有实根的字母系数的取值范围. 这两个集合中的元素的含义也是不同的，因而这两个集合也是不同的.

思维诊断

在解本题时，若缺乏对集合元素特征的准确把握，很容易被问题的表面现象所迷惑，从而导致误解.

要判断两个集合是否相同，不但要注意这两个集合中的元素个数相同，同时还应注意两个集合的元素是否都相同. 如果集合的元素个数不同，那么这两个集合就一定不相同；同样代表元素的形式就已经不同，那么这两个集合就一定不相同，如第(2)小题中的两集合“$\{x|x=0\}$”和$\{(x,y)|x=0,y\in \mathbf{R}\}$的代表元素就不相同. 当然，根据集合中元素的无序性，两个集合中元素的顺序可以不相同.

[例3]集合 $A=\{x\in \mathbf{R}|x=a+b\sqrt{2},a\in \mathbf{Z},b\in \mathbf{Z}\}$，判断下列元素$x$与集合$A$间的关系：

(1) $x=0$；(2) $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$；(3) $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$；(4) $x_1\in A,x_2\in A$，$x=x_1+x_2$；(5) $x_1\in A,x_2\in A,x=x_1\cdot x_2$.

思路分析　先把x写成$a+b\sqrt{2}$的形式，再观察a,b是否为整数，便可判定x是否为A中的元素.

解答　(1) $x=0=0+0\sqrt{2}$，$\therefore x\in A$；

(2) $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1=1+1\cdot\sqrt{2}$，$\therefore x\in A$；

(3) $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，而$\sqrt{3}\notin \mathbf{Z}$，$\therefore x\notin A$；

(4) $x_1\in A,x_2\in A$，可设 $x_1=a_1+b_1\sqrt{2}$，$x_2=a_2+b_2\sqrt{2}$ $(a_1,a_2,b_1,b_2\in \mathbf{Z})$，

则 $x=x_1+x_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2}$，

而 $a_1+a_2\in \mathbf{Z}$，$b_1+b_2\in \mathbf{Z}$，$\therefore x\in A$.

(5)同(4)所设，有 $x=x_1\cdot x_2=(a_1+b_1\sqrt{2})\cdot(a_1+b_2\sqrt{2})=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}$，

而 $a_1a_2+2b_1b_2\in \mathbf{Z}$，$a_1b_2+a_2b_1\in \mathbf{Z}$，$\therefore x\in A$.

思维诊断

对本题，应注意对形式$a+b\sqrt{2}$的本质理解，对其中的a,b只要是整数即可，不能理解为a,b就是仅表示整数的单个字母或数字.

元素与任何一个集合的关系只有两种可能，即属于($\in$)或不属于($\notin$)，非此即彼！判定元素与集合的关系，就是看所给元素是否满足集合所给出的内在条件. 在本题中，就是能否找到两个整数a,b使$x=a+b\sqrt{2}$成立，其中(3)也可用反证法，(4)(5)应注意必要的逻辑运算，不能立刻从表面上判定.

[例 4](1)设 a、b、$c\in\mathbf{R}$,且 $x=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}$,写出由 x 构成的集合;

(2)写出一元一次方程的解的集合与一元一次方程的集合.

思路分析 (1)分类讨论,用列举法表示集合;(2)用描述法表示这个集合.

解答 (1)由已知可知 $abc\neq0$,所以,a,b,c 的符号有以下四种可能:三负;一正两负;两正一负;三正.

$$由\ x=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}=\begin{cases}-3 & (a,b,c\ 三负)\\ -1 & (a,b,c\ 一正两负)\\ 1 & (a,b,c\ 两正一负)\\ 3 & (a,b,c\ 三正)\end{cases}$$

所以,由 x 构成的集合是 $\{-3,-1,1,3\}$;

(2)一元一次方程的解的集合是 $\{x\mid ax+b=0,a,b$ 是常数,且 $a\neq0\}$;

一元一次方程的集合是 $\{ax+b=0\mid a,b$ 是常数,且 $a\neq0\}$.

思维诊断

在第(1)小题的解答过程中,求 x 的值,运用了分类讨论数学思想,即把 a、b、c 分成四类:一个正的也没有;有一个正的;有两个正的;有三个正的.第(2)小题中应该注意的问题是:一元一次方程的解的集合中,代表元素是实数 x,这个集合是实数的集合;一元一次方程集合中,代表元素是 $ax+b=0(a\neq0)$ 的根,这个集合是方程的根的集合.

[例 5]把下列集合用另一种方法表示出来,并指出它们分别是有限集还是无限集.

(1)$\{-1,1\}$;(2)$\{1,-3,5,-7,9,-11,\cdots\}$;

(3)$\left\{x\in\mathbf{N}\,\middle|\,\frac{6}{6-x}\in\mathbf{N}\right\}$;(4)$\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}3x+y=2\\2x-3y=27\end{cases}\right\}$.

思路分析 (1)(2)需用描述法来表示,找出元素的属性是关键;(3)(4)需用列举法来表示,正确理解元素的属性才能使解答正确.

解答 (1)$\{-1,1\}$的另一种表示可以为 $\{x\mid |x|=1\}$,有限集;

(2)$\{1,-3,5,-7,9,-11,\cdots\}$的另一种表示可以为 $\{x\mid x=(-1)^{n+1}(2n-1),n\in\mathbf{N}\}$,无限集;

(3)$\left\{x\in\mathbf{N}\,\middle|\,\frac{6}{6-x}\in\mathbf{N}\right\}$的另一种表示为 $\{0,3,4,5\}$,有限集;

(4)$\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}3x+y=2\\2x-3y=27\end{cases}\right\}$的另一种表示为 $\{(3,-7)\}$,有限集.

思维诊断

用列举法表示集合时,要把元素不重复、不遗漏、不计顺序地全部列举出来;用描述法表示集合时,一要注意元素的属性,二要注意表示方法的书写规范.此外,还要注意同样是用描述法表示集合,可能表示的方法或者形式不一定会相同.

亲爱的读者,你还能写出其他的表示形式吗?

(1)____________

(2)____________

(3)____________

(4)____________

体验探究

一、科海拾贝

集合论的背景

集合论在 19 世纪诞生的基本原因,来自数学分析基础的批判运动.数学分析的发展必然涉及无穷过程,无穷小和无穷大这些无穷概念.在 18 世纪,由于无穷概念没有精确的定义,使微积分理论不仅遇到严重的逻辑困难,而且还使无穷概念在数学中信誉扫地.19 世纪上半叶,柯西给出了极限概念的精确描述.在这基础上建立起连续、导数、微分、积分以及无穷级数的理论.正是这 19 世纪发展起来的极限理

论相当完美地解决了微积分理论所遇到的逻辑困难.但是,柯西并没有彻底完成微积分的严密化.柯西思想有一定的模糊性,甚至产生逻辑矛盾.19世纪后期的数学家们发现使柯西产生逻辑矛盾的问题的原因在于奠定微积分基础的极限概念上.严格地说柯西的极限概念并没有真正地摆脱几何直观,确实地建立在纯粹严密的算术的基础上.于是,许多受分析基础危机影响的数学家致力于分析的严格化.在这一过程中,都涉及对微积分的基本研究对象——连续函数的描述.在数与连续性的定义中,有涉及关于无限的理论.因此,无限集合在数学上的存在问题又被提出来了.这自然也就导致寻求无限集合的理论基础的工作.总之,寻求微积分彻底严密的算术化倾向,成了集合论产生的一个重要原因.

二、智慧列车

[例6]设集合 $A=\{1,k^2,k^2+k+2\}$,求实数 k 的取值范围.

思考 给定一个集合,不但这个集合中的每一个元素是确定的,而且两两也是互异的,能否依此列出不等式组,并解之得出结论呢?

发现 k 的取值范围由下面的不等式组确定

$\begin{cases}k^2\neq 1\\k^2+k+2\neq 1\\k^2\neq k^2+k+2\end{cases}$ (*),其中,$k^2+k+2\neq 1$ 也即 $k^2+k+1\neq 0$,而 $k^2+k+1=\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}>0$恒成立,所以,不等式组(*)可简化为:

$\begin{cases}k\neq\pm 1\\k\neq -2\end{cases}$,所以,实数 k 的取值范围是$\{k\in\mathbf{R}\mid k\neq -2,-1,1\}$.

解题规律

在本例中要注意两个问题:

(1)集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$中 $a_i\neq a_j\ (i\neq j)$ 的意义是集合中的任意两个元素都不能相同,即所谓的互异性;

(2)取值范围的问题,其结果要用集合的形式来表示,不可用不等式表示.

[例7]数集 A 满足条件:若 $a\in A$,则有$\frac{1+a}{1-a}\in A\quad(a\neq 1)$.

(1)已知 $2\in A$,求证:在 A 中必定还有另外三个数,并求出这三个数;

(2)若 $a\in\mathbf{R}$,求证:A 不可能是单元素集合.

思考 集合 A 满足的条件究竟是什么?可否举一实例来演示一下呢?

发现 只要 A 中的元素 $a\neq 1$,则必有$\frac{1+a}{1-a}\in A$,于是有:

(1)$2\in A$,$\therefore\frac{1+2}{1-2}=-3\in A$,$\frac{1+(-3)}{1-(-3)}=-\frac{1}{2}\in A$,$\frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{3}\in A$,所以,$A$ 中必定还有另外三个数$-3,-\frac{1}{2},\frac{1}{3}$;

(2)若 A 是单元素集合,则必有 $a=\frac{1+a}{1-a}$,即 $a^2+1=0$,显然满足此等式的实数 a 是不存在的,所以,A 不可能是单元素集合.

解题规律

对于第(2)小题,宜用反证法进行证明,若用直接证法,则不易证明.一般地,对于问题的结论是不可能或不存在的命题,用反证法证明较合适.

思维发散 试问:满足上述条件的集合 A 中,你能找到另外的第四个数吗?若将数集 A 满足的条件改成:若$a\in A$,则有$\frac{1}{1-a}\in A$ $(a\neq1)$,你能判断在第(1)小题中 $2\in A$ 时,集合 A 中有几个元素吗?对于第(2)小题,其结论还相同吗?

[例 8]下列各组对象能否构成一个集合?指出其中的集合是无限集还是有限集,并用适当的方法表示出来;对有限集的,指出它的元素的个数.

(1)两边分别在坐标轴的非负半轴上,且边长为 1 的正方形的顶点;

(2)方程 $x^4+x^3+x^2+2=0$ 的实数根;

(3)图中阴影部分的点(含边界上的点).

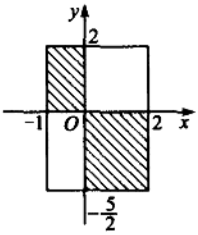


图 1 - 1

思考 用适当的方法表示集合的关键是搞清集合中的元素是什么,它有哪些特征或者应该符合什么条件;然后考虑用描述法、列举法还是图示法来表示;最后再看集合中所含元素的个数,依此判断它是有限集还是无限集.

发现 (1)根据正方形所在平面直角坐标系中的位置,正方形的顶点共有四个,它们是确定的,能构成一个集合,并可表示为:$\{(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)\}$,它是一个有限集,共有 4 个元素;

(2)$x^4+x^3+x^2+2=0\Rightarrow(x^4+x^2+1)+(x^3+1)=0\Rightarrow[(x^4+2x^2+1)-x^2]+(x^3+1)=0\Rightarrow(x^2+x+1)(x^2-x+1)+(x+1)(x^2-x+1)=0\Rightarrow(x^2-x+1)(x^2+2x+2)=0$.

而方程:$x^2-x+1=0$,$x^2+2x+2=0$ 均无实数根,则这个集合不含任何元素,根据定义它是一个空集,可表示为:$\varnothing$,它是一个有限集,有 0 个元素;

(3)此图形由平面直角坐标系中无穷多个点组成,且分布在坐标轴上或第二、四象限内,又 x,y 的范围分别是:$-1\leqslant x\leqslant2$,$-\frac{5}{2}\leqslant y\leqslant2$,且除了坐标轴上的点之外 x、y 异号,故此集合可表示为:$\left\{(x,y)\middle|-1\leqslant x\leqslant2,-\frac{5}{2}\leqslant y\leqslant2,且\ xy\leqslant0\right\}$,它是一个无限集.

学力测评

双基复习巩固

1. 下列各条件中,不能确定一个集合的是 ( )

A. 充分接近$\sqrt{7}$的所有实数的全体

B. 某校身高不超过 1.7 米的所有学生

C. 小于 100 的所有偶数

D. 数轴上到原点的距离不超过一个单位的点的全体

2. 设有下列四个关系式:$\sqrt{2}\in\mathbf{R}$,$0.3\in\mathbf{Q}$,$0\in\mathbf{N}$,$0\in\{0\}$,其中正确的个数是 ( )

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

3. 已知:$a=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$,$b=2$,$c=2\sqrt{2}$,$d=\sqrt{3}(\sqrt{6}-2)$,集合 $M=\{x\mid x=m+n\sqrt{2},(m,n\in\mathbf{Q})\}$,其中 a,b,c,d

是集合M的元素的个数是　（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

4. 有下列四个命题：①$\{\varnothing\}$是空集；②$0\in\{(0,1)\}$；③若$a\in\mathbf{N}$，则$-a\in\mathbf{N}$；④集合$A=\{x|x^2+2x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$是二元集（即集合中只有两个元素，依次类推）. 其中正确命题的个数为　（　　）

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

5. 已知集合$M=\{m\in\mathbf{N}|6-m\in\mathbf{N}\}$，则集合$M$的元素个数是　（　　）

A. 5个　　B. 6个　　C. 7个　　D. 8个

6. 集合$\{x\in\mathbf{N}|-1<x<4\}$用列举法表示为________.

7. 在实数范围内，方程$x^2+x-6=0$的解集为________.

8. 集合$\left\{x\left|x=\frac{n-2}{n+1},n\in\mathbf{N},n\leqslant5\right.\right\}$用列举法表示为________.

9. 数集$\{a,a^2-a\}$中的a的取值用集合表示为________.

10. 设A表示集合$\{2,3,a^2+2a-3\}$，B表示集合$\{2,|a+3|\}$. 已知$5\in A$，且$5\notin B$，求实数a的值.

11. 以正整数为元素的集合S满足命题："若$x\in S$，则$8-x\in S$"，写出：

(1)集合中元素的个数为1的集合S_1；

(2)集合中元素的个数为2的集合S_2.

综合拓广探索

12. 若$P=\{y|y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$，$Q=\{(x,y)|y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$，则必有　（　　）

A. $P\cap Q=\varnothing$　　B. $P\subsetneqq Q$　　C. $P=Q$　　D. $P\supsetneqq Q$

13. 对由0,2,4,6,…,2 002,2 004组成的集合，给出下列四种表示形式：

①$\{x\in\mathbf{Z}|x=2n,且0\leqslant n\leqslant1\,002\}$；②$\{x\in\mathbf{N}|x=2n,且0\leqslant n\leqslant1\,003\}$；

③$\{x\in\mathbf{Z}|x=2n,且-1<n<1\,003\}$；④$\left\{x\left|\frac{x}{2}=n,且n=0,1,2,\cdots,1\,002\right.\right\}$.

其中不正确的是　（　　）

A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ④

14. 已知$a,b\in\mathbf{R}$，且$\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}=\{a^2,a+b,0\}$，试求$a^{2\,005}+b^{2\,005}$的值.

15. 集合 $A=\{x|x=3n+1,n\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x=3n+2,n\in \mathbf{Z}\}$，$C=\{x|x=6n+3,n\in \mathbf{Z}\}$.

(1)若 $c\in C$，求证：必存在 $a\in A$，$b\in B$，使得 $c=a+b$；

(2)对任意 $a\in A$，$b\in B$，是否一定有 $a+b\in C$，试证明你的结论.

16. 已知集合 $P=\{x|px^2+2x+1=0,p\in \mathbf{R},x\in \mathbf{R}\}$.

(1)若 P 中只有一个元素，求 p 的值，并求出这个元素；

(2)若 P 中至多只有一个元素，求 p 的取值范围.

学习延伸

集合思想在解题中的应用之一

——集合语言与其他数学语言的互译

集合思想是现代数学思想向中学渗透的重要标志，在解决某些数学问题时，若是运用集合思想，可以使问题解决的更简单、明了. 事实上，各种数学语言形态间的互译，可为我们在更广阔的思维领域里寻找问题的解决途径，因而这种互译是我们在解题过程中常常必须做的事情. 本节首先谈谈集合语言与其他数学语言的互译. 对于用集合语言叙述的问题，求解时往往需要转译成一般的代数语言或几何语言. 例如：

已知集合 $B=\left\{x\left|\dfrac{x+a}{x^2-2}=1\right.\right\}$ 有惟一元素，用列举法表示 a 的值构成的集合 A.

错解：集合 A 表示方程 $\dfrac{x+a}{x^2-2}=1$①，即方程 $x^2-x-a-2=0$②有等根时 a 的取值集合. 方程②有等根的条件是 $\Delta=(-1)^2-4(-a-2)=0$，解得 $a=-\dfrac{9}{4}$，因此 $A=\left\{-\dfrac{9}{4}\right\}$.

分析：不难看出，将 B 译为方程②有等根时 a 的取值集合是不准确的. 转译时忽视了 $x^2\neq 2$ 即 $|x|\neq\sqrt{2}$这一隐含条件. 可见，与方程①等价的应是 $\begin{cases}x^2-x-a-2=0\\x^2-2\neq 0\end{cases}$ ③. 由于方程①为分式方程，可能有增根，当条件②的二实根中有一个是方程①的增根 $x=-\sqrt{2}$或 $x=\sqrt{2}$时，方程①也只有一个实根，正确解法是：方程①等价于混合组③. 从而

(1)当②有等根时，同上解得 $a=-\dfrac{9}{4}$，此时 $x=\dfrac{1}{2}$，适合③；(2)当②有两个不等的实根时，由 $\Delta>0$ 可得 $a>-\dfrac{9}{4}$，当 $x=-\sqrt{2}$为①的增根时，由②得 $a=\sqrt{2}$；当 $x=\sqrt{2}$为①的增根时，由②得 $a=-\sqrt{2}$.

所以 $A=\left\{-\dfrac{9}{4},-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$.

由此可以看到集合语言转译成其他语言，转译的准确与否直接关系到解题的成功与失败. 另外集合语言与其他语言转译过程中，根据问题的需要也可能转译成图形语言，利用数形结合解题. 根据解题需要，有时也可能将其他语言转译为集合语言.

1.2 子集、全集、补集

亲爱的读者，假如你是理想中学高一(1)班的学生，那么你就是由所有高一(1)班的学生所组成的集合中的一个元素. 如果我们把每一个班都当做一个集合，那么学校就可以看做由集合作为元素的一个大集合. 在学校这个大集合下，高一(1)班这个集合它是什么呢？同样，高一(1)班之外的高一(2)班、高一(3)班……又是什么呢？相信你学习过本节之后，你会给出正确答案的.

学法建议

(1)正确理解子集、真子集和集合相等的概念关键之一是对子集概念的理解，若集合 A 是集合 B 的子集，则可得只要是集合 A 的元素，一定是集合 B 的元素；关键之二是区分符号“$\in,\notin$”与“$\subsetneqq,\subseteq$”的意义，“$\in,\notin$”是连接元素与集合之间的符号，“$\subsetneqq,\subseteq$”则是连接集合与集合之间的符号.

(2)由于全集中含有与研究问题有关的各个集合的全部元素，所以全集是相对研究问题而言的概念，可以根据实际需要来确定全集. 同样补集也是相对全集而言的概念，所以在学习本节知识的过程中把握好各个数学概念之间的相互联系是关键.

一、知识网络

- 集合关系
  - 元素与集合
  - 集合与集合
    - 子集
    - 全集、补集
    - 交集
    - 并集

易错点提示

集合与集合之间的关系的判定不能“空对空”，最终还是牢牢抓住通过元素与集合的关系来进行判断.

二、知识归纳

1. 对子集概念的理解

理解子集概念，应注意以下几点：

(1)“A 是 B 的子集”的含义是：集合 A 的任意一个元素都是集合 B 的元素；

(2)当 A 不是 B 的子集时，一般记作“$A \not\subseteq B$”；

(3)任何一个集合都是它本身的子集；

(4)规定空集是任意一个集合的子集，即 $\varnothing \subseteq A$. 当然空集是任意一个非空集合的真子集；

(5)在子集的定义中，不能理解为子集 A 是集合 B 中的部分元素所组成的集合，要注意空集对概念的影响；子集和真子集均有传递性.

2. 集合相等

教材中有这样一个问题：“$A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 能否同时成立？”，回答当然是肯定的. 这实际上就是集合相等的定义，即若 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 同时成立，则称 $A=B$，这同时也是我们证明两个集合相等的方法.

3. 对补集概念的理解

(1)要正确应用数学的三种语言表示补集，即分别是普通语言：设 S 是一个集合，A 是 S 的一个子集，由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合叫做 S 中子集 A 的补集；符号语言：$\complement_S A=\{x \mid x\in S, x\notin A\}$；图形语言.

(2)理解补集概念时，应注意补集 $\complement_S A$ 是对给定的集合 A 和 $S(A\subseteq S)$ 相对而言的一个概念，一个确定的集合 A，对于不同的集合 S，补集不同. 如：集合 $A=\{$正方形$\}$，当 $S=\{$菱形$\}$时，$\complement_S A=\{$一个内角不等于 90° 的菱形$\}$；当 $S=\{$矩形$\}$时，$\complement_S A=\{$邻边不相等的矩形$\}$.

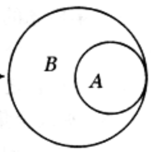
(3)补集的几个特殊性质：$A\cup\complement_S A=S$，$\complement_S S=\varnothing$，$\complement_S\varnothing=S$，$\complement_S(\complement_S A)=A$.

4. 三点注意

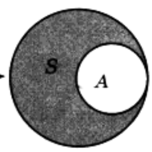
(1)若某集合中有 n 个元素，则它的所有子集的个数有 2^n 个(包括空集)，真子集个数有 (2^n-1) 个，非空真子集个数有 (2^n-2) 个；若此集合的元素均为实数，则此集合所有子集中元素的总和为 $2^{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$；(2)解集合题时，其元素中有字母时，要注意对字母的讨论；(3)正确利用 Venn 图(图示法). 会利用数轴进行集合的补集运算.

三、图解重点

1. A 是 B 的真子集



2. A 的补集 $\complement_S A$(阴影部分)



潜能开发

[例 1]写出集合 $A=\{p,q,r,s\}$ 的所有的子集，并分别指出集合 A 的子集、真子集、非空子集及非空真子集的个数.

思路分析 分情况讨论，用列举法将它们一一列举出来，并数一数满足条件的子集的个数.

解答 因为集合 $A=\{p,q,r,s\}$ 的所有的子集可以分为五类，即

(1)空集：$\varnothing$；

(2)一元子集：$\{p\},\{q\},\{r\},\{s\}$；

(3)二元子集：$\{p,q\},\{p,r\},\{p,s\},\{q,r\},\{q,s\},\{r,s\}$；

(4)三元子集：$\{p,q,r\},\{p,q,s\},\{p,r,s\},\{q,r,s\}$；

(5)四元子集：$\{p,q,r,s\}$.

所以，集合 A 的子集的个数为 16，集合 A 的真子集的个数为 15；集合 A 的非空子集的个数为 15；集合 A 非空真子集的个数为 14.

思维诊断

本例的难度表现在分类讨论思想的运用上，第一次分类讨论，是按集合 A 的子集含有的元素的个数进行划分的，即集合 A 的子集含有的元素的个数依次是 0，1，2，3，4；第二次分类讨论，是对 p,q,r,s 四个元素实施合理的搭配，不妨可以画示意图来帮助实施.

另外在解题时要注意，在解题过程中，不要遗漏空集.

[例 2]已知：集合 $A=\{a\mid a=2k,k\in\mathbf{N}\}$，集合 $B=\left\{b\,\middle|\,b=\frac{1}{8}[1-(-1)^n](n^2-1),n\in\mathbf{N}\right\}$，那么 A,B 间的关系是 ( )

A. $A\subsetneqq B$　　B. $B\subsetneqq A$　　C. $A=B$　　D. 以上都不对

思维诊断

在三种误解中，其中误解一：没有深入分析题设，草率下的结论是错误的；误解二只认识到 $n+1$、$n-1$ 均为

思路分析 题设中的A,B是用描述法表示的,要明确A与B的关系,应设法先化简它们,其次再用列举法分别表示A和B.

解答 由题意可知,集合A是非负偶数集,即$A=\{0,2,4,6,8,\cdots\}$;集合B中的元素$b=\frac{1}{8}[1-(-1)^n]\cdot(n^2-1)=$
$\begin{cases}0 & (n\text{ 为非负偶数})\\ \frac{1}{4}(n+1)(n-1) & (n\text{ 为正奇数})\end{cases}$,而$\frac{1}{4}(n+1)(n-1)$ (n为正奇数)表示0或正偶数,但不是表示所有的正偶数.取$n=1,3,5,7,\cdots$,由$\frac{1}{4}(n+1)(n-1)$依次得$0,2,6,12,\cdots$,即$B=\{0,2,6,12,28,\cdots\}$.

综上知,$B\subsetneqq A$,应选B.

对本题容易出现以下几种误解:

误解一:A表示偶数集,B中元素$b=\frac{1}{8}[1-(-1)^n](n^2-1)$,当$n\in\mathbf{N}$时,不一定是整数,∴选D.

误解二:A表示非负偶数集.B:$b=\frac{1}{8}[1-(-1)^n](n^2-1)=$
$\begin{cases}0 & (n\text{ 为非负偶数})\\ \frac{1}{4}(n+1)(n-1) & (n\text{ 为正奇数})\end{cases}$,其中,$n$为正奇数时,$n+1$与$n-1$均为偶数,∴$(n+1)(n-1)$一定能被4整除,∴$\frac{1}{4}(n+1)(n-1)$是正整数或零,但不一定是正偶数.所以$A\subsetneqq B$,选A.

误解三:A表示非负偶数集.B:$b=\frac{1}{8}[1-(-1)^n](n^2-1)=$
$\begin{cases}0 & (n\text{ 为非负偶数})\\ \frac{1}{4}(n+1)(n-1) & (n\text{ 为正奇数})\end{cases}$,当$n$为正奇数时,$n-1$与$n+1$表示两个连续的偶数,其中必有一个是4的倍数,∴$\frac{1}{4}(n+1)(n-1)$表示0或正的偶数.故$A=B$,选C.

偶数,因此$\frac{1}{4}(n+1)(n-1)$是整数,认识比较肤浅;误解三虽挖掘了$n+1$、$n-1$是两个连续的偶数,得到$\frac{1}{4}(n+1)(n-1)$必为非负偶数,但接着犯了一个常识性的逻辑错误,认为“非负偶数即可表示为$\frac{1}{4}(n+1)(n-1)$(n为正奇数)”,结果功亏一篑.

由本题的解答可以得到如下启示:解题时,一定要仔细分析题设条件,由浅入深,追根究底,千万不能被问题的表面现象所迷惑,从而导致浅尝辄止,草率了事.

另外需要说明的是上述解法显得过于严谨,从心理上来说感到害怕.其实也可通过列举A,B两个集合中的部分元素来进行观察分析,对这两个集合进行感性的认识,从中发现解题方向,这也是解选择题的一个重要方法,毕竟本题仅仅是一个选择题.

[例3]用下列四种符号$\in$、$\notin$、$\subseteq$、$\subsetneqq$进行填空.

(1)设$B=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{y}{x}=1\right\}$,$(0,k)$中的$k$使得$\sqrt{k}+\sqrt{-k}$有意义,则$(0,k)$______$B$;

(2)已知$E=\{x\mid\sqrt{x^2}=0\}$,$F=\{x\mid x^2-(a-1)x=0\}$,则E______F.

思路分析 符号$\in$、$\notin$只适用于元素与集合之间的从属关系,而符号$\subseteq$、$\subsetneqq$只适用于集合之间的包含关系.

解答 (1)由$\frac{y}{x}=1$,可得$y=x$,$x\neq0$.所以,集合$B=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{y}{x}=1\right\}$表示的图形是直线$y=x$去掉原点$(0,0)$.$(0,k)$中的$k$使得$\sqrt{k}+\sqrt{-k}$有意义,必须且只需$\begin{cases}k\geqslant0\\-k\geqslant0\end{cases}$,由此可得$k=0$,所以$(0,k)$也即$(0,0)$,所

思维诊断

本例的第(2)小题的结论是$E\subseteq F$,它有两种可能,即$E=F$,$E\subsetneqq F$,由此看来,当这两种可能都有时,$E\subseteq F$写成$E=F$或写成$E\subsetneqq F$都是不妥的.需要注意的是,尽管$E\subseteq F$有两种可能,但是一旦确定了$E\subseteq F$只有其中的一种可能,$E\subseteq F$就应该具体地写成$E=F$或$E\subsetneqq F$之一的形式,而不再继续写成$E\subseteq F$形式.