上海版新教材

高中数学教材全解

数学

SHU XUE

高二（下）

曹建华 主编

上海科学普及出版社

前　言

2002 年 8 月，上海市教育委员会颁布了《上海市中小学数学课程标准》，在充分总结一期课改的基础上，进一步吸收、借鉴了国内外课改，并将全面推广使用在《上海市中小学数学课程标准》指导下的新教材，新教材注重培养学生的数学素养，力求根据学生的不同个性，充分发挥每个学生的聪明才智. 特别是教材中增加了大量联系实际的例题和应用题，这极大地引起了学生学习兴趣，同时也给广大师生的教和学带来了新的挑战.

为了满足广大师生的需求，本着促进课改的精神，我们组织了一批从事新教材第一线的骨干教师，结合自身的教学经验和研究心得，编写了这套全新视角的《高中数学新教材全解》，其内容紧扣教材，注重释疑解难，迁移延伸，第次深入.

本书旨在帮助广大学生能够更好地理解、消化、学好新教材，使同学们可以独立预习、复习，同时也是教师教学的参考教案.

欢迎使用本书的读者提出宝贵的意见，使本书更具有科学性、实用性、指导性，使它能够伴随你的学习进程，成为你的良师益友.

编　者
2005 年 12 月

目 录

目　录

目　录

第 13 章　排列与组合

本章综合解说

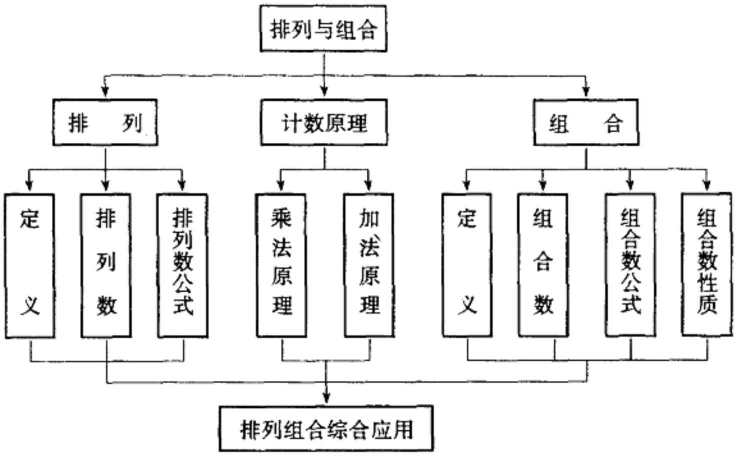
乘法原理与加法原理是两个基本的原理，它们都是用来计算"完成一件事"的方法的种数，所以是解决排列、组合问题的基础，同时它们的应用也是贯穿本章的始终. 两者最大的区别在于：乘法原理与分步有关，而加法原理与分类有关. 运用两个计数原理时要时刻意识到两点：一是怎样才算"完成一件事"，即"做什么"，二是如何才能"完成一件事"，即"怎样做".

排列与组合主要研究从一些不同元素中，任取部分或全部元素进行排列或组合，求共有多少种取法的问题. 区别排列问题与组合问题要看是否与顺序有关，与顺序有关的属于排列问题，与顺序无关的属于组合问题. 研究排列与组合的过程贯穿着两个计数原理，并且围绕着计数这个主题. 组合的研究无论是内容还是思考方法都借助着排列，即使从组合数公式 $C_n^m=\frac{P_n^m}{P_m^m}$，也可以看出组合是依赖于排列的概念.

排列组合的综合运用是我们研究的一个重点和难点，由于本章概念的理解和解决问题的方法与以往有很大的不同，解题所得的结果有时往往比较大，同时解题需要有较强的分析能力，所以初学时我们会感到比较困难，读者要多思考、多比较，仔细分析题目中表述的细微差异，并逐步内化为自己的一种能力，只有这样才能不断提高我们的分析问题、解决问题的水平.

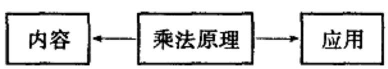
二期课改教材的学习过程中，读者需要掌握乘法原理与加法原理、排列和组合的概念及其计算，但所涉及的问题情境比较简单. 排列、组合问题中的限制条件不超过两个；不讨论重复排列问题，解排列和组合问题仅限用常见的方法(包括枚举法).

本章知识结构如下：



13.1　计数原理Ⅰ——乘法原理

知识结构框图表解



基础知识详解与要点点拨

1. 乘法原理： 做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，做第一步有 m_1 种不同的方法，做第二步有 m_2 种不同的方法，……，做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有

$$N = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$$

种不同的方法，**乘法原理也叫分步计数原理.**

注： 理解该定义必须要有两个明确：(1) 明确怎样才算是完成一件事情，也就是“做什么”；(2) 明确如何才能完成这件事情，也就是“怎么做”.

2. 乘法原理是解决一类可以进行排序分步计数的问题，其核心思想是： 要完成一件事情必须是按顺序通过每一个步骤才能算完成这件事，所以说，“分步”是乘法原理的特征标志.

3. 应用乘法原理应该注意的问题：

(1) “完成它需要分成 n 个步骤”的含义是指完成这件事的任何一种方法都要分 n 个步骤. 分步时首先要根据问题的特点确定一个分步的标准，其次是注意这件事必须且只需经过这 n 个步骤. 只有满足这些条件，才能使用乘法原理.

(2) 应用乘法原理时，每个步骤只能完成这件事的一部分，而且只有当每步都完成了这件事才算完成.

(3) 分步计数时应注意“步”与“步”间的连续性和独立性，以确保问题不遗漏不重复.

典型例题精讲与规律、方法、技巧总结

1. 乘法原理概念的理解

例 1 (1) 3 封不同的信要投入 4 个不同的信箱，共有多少不同的投法？

(2) 4 封不同的信要投入 3 个不同的信箱，共有多少不同的投法？

解题策略 针对第(1)小题，完成这件事就是指“投完 3 封信”，方法是把信一封一封地投入信箱，是分步的，即有几封信就分几步，可用乘法原理；第(2)小题完成这件事就是指“投完 4 封信”，思考方法与第(1)小题完全类似.

解 (1) 要投完 3 封不同的信需要分三步完成(一封一封地投)：

第一步：随便拿出一封来投，有 4 种投法；

第二步：再投剩余两封中的一封，也有 4 种投法；

第三步：投最后一封，有 4 种投法.

根据乘法原理，共有不同的投法：

$$N = 4 \times 4 \times 4 = 64(\text{种}).$$

(2) 同理，共有不同的投法：$N = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81(\text{种})$.

注意 运用乘法原理，要学会抽象概括，如：① 3 封不同的信要投入 4 个不同的信箱，共有多少不同的投法？② 3 个旅客，去 4 家旅社投宿，有多少种方法？③ 1、2、3 三个数，构成一个 4 位数，有多少个数？④ 3 名学生走进 4 个大门的教室，有多少种不同的进法？

这四个问题实质就是“完成一件事(投信、投宿、构数、进门)，要有四个步骤”. 把完成一件事概括成分几步，而且缺一不可，这就是乘法原理的思想，它是本章学习入门的难点，需要仔细领会.

例 2 现有 3 名学生和 4 个课外活动小组，试分别回答下列问题：

(1) 每名学生参加一个课外活动小组，有几种不同的方法？

(2) 每名学生只参加一个课外活动小组，而且每个活动小组至多有一名学生参加，有几种不同的方法？

(3) 每个活动小组至少有一名学生参加，每名学生参加几个课外活动小组不限制，有几种不同的方法？

解题策略 第(1)小题中，完成一件事是指每名学生都要选好一个课外活动小组，3 名学生分三步进行；第(2)小题中，完成一件事也是指每名学生都要选好一个课外活动小组，3 名学生分三步进行，但当第一名学生选好某一个课外活动小组后，第二名学生只能从余下的 3 个课外活动小组中选择，而第三名学生只能在第二名学生选好后的余下的 2 个课外活动小组中选择；第(3)小题中，完成一件事是指保证每个活动小组至少有一名学生参加.

解 (1) 每名学生都可以参加 4 个课外活动小组中的任何一个，可以让三名学生各自选择自己想参加的课外活动小组，所以有：

$$N = 4 \times 4 \times 4 = 64(\text{种}).$$

(2) 第一名学生有 4 种选法，第二名学生有 3 种选法，第三名学生有 2 种选法，

所以有：$N = 4 \times 3 \times 2 = 24(\text{种})$.

(3) 为了保证每个活动小组至少有一名学生参加，可以让 4 个课外活动小组选择学生，

共有：$N=3\times3\times3\times3=81$(种).

注意 当完成每一步的方法数均为 m(即 $m_1=m_2=\cdots=m_n$)时，那么结果是 m^n 还是 n^m 容易产生混淆，解决的关键是分清是按照何种对象分步，是谁选择谁. 如本题中的第(1)、(2)小题是学生选择课外活动小组，学生是主动的，第(3)小题中却是课外活动小组选择学生，学生是被动的，但都是利用分步计数原理. 因此我们在解决问题时，还是要具体问题具体分析，仔细分辨题目之间的差异，找出"形似"背后的"意异".

2. 约数问题

例 3 3 600 的不同正约数共有几个？其中偶约数有几个？

解题策略 因为一个自然数的因数可以惟一分解成(不计因数的排列顺序)它的素因数的幂的乘积的形式，所以要先将 3 600 进行素因数分解，再进行计数.

解 (1) ∵ $3\,600=2^4\times3^2\times5^2$

∴ 3 600 的任何一个正约数的素因数分解形式为：$p=2^\alpha\cdot3^\beta\cdot5^\gamma$，其中 $\alpha\in\{0,1,2,3,4\}$，$\beta\in\{0,1,2\}$，$\gamma\in\{0,1,2\}$.

于是要得到 3 600 的一个确定的正约数必需而且只需确定幂指数 α,β,γ 的值. 这可以分三步完成：

第一步，确定 α 的值，有 5 种；

第二步，确定 β 的值，有 3 种；

第三步，确定 γ 的值，有 3 种.

又∵确定了一组 α, β, γ 的值，也就惟一确定了 3 600 的一个正约数，而不同组的值(即 α, β, γ 中至少有一个不同)，对应了不同的正约数.

∴ 3 600 的不同正约数个数为：$N=5\times3\times3=45$(个).

(2) 偶约数必须含有因数 2，因此 α 只能取 1,2,3,4 中的一种情况，所以偶约数的个数有：

$$N=4\times3\times3=36(\text{个}).$$

注意 (1) 本题中设计三步完成这件事情(得到一个正约数)的方案时，三步的顺序并不是固定不变的，对于 α,β,γ 的取值，并不是一定要第一步确定 α 的值，第二步确定 β 的值，第三步确定 γ 的值. 例如也可以依次确定 β,α,γ 值，这并不影响结果.

(2) 本题的结论可以推广到一般的情形，设正自然数 N 质因数分解的形式为 $N=n_1^{\alpha_1}\cdot n_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot n_k^{\alpha_k}$，则 N 的不同正约数共有 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$ 个.

3. 钱币面值问题

例 4 有壹元人民币 3 张，伍元人民币 1 张，十元人民币 2 张，共可以组成多少种不同的币值(币值为 0 的不计在内)？

解题策略 每一种确定的币值只能由壹元人民币、伍元人民币和十元人民币或其中的部分币种的若干张构成.

解 壹元人民币可以取：0 张、1 张、2 张、3 张四种情况；

伍元人民币可以取：0 张、1 张两种情况；

十元人民币可以取：0 张、1 张、2 张三种情况.

但由于壹元人民币、伍元人民币和十元人民币不能同时取 0 张，所以所求的不同的币值共有：

$$N = 4 \times 2 \times 3 - 1 = 23\text{ 种}.$$

注意 (1) 本题和例 3 有类似之处，但也要体会它们之间的细微差异. (2) 本题中若干枚币值之和都是不同的币值，若不满足此条件，则要发生错误，如我们把条件改为：有壹元人民币 3 张，伍元人民币 3 张，十元人民币 2 张，共可以组成多少种不同的币值(币值为 0 的不计在内)？由于 2 张伍元人民币与 1 张十元人民币等值，所以 $N \neq 4 \times 4 \times 3 - 1 = 47$，应该把问题转化为：有壹元人民币 3 张，伍元人民币 1 张，十元人民币 3 张，共可以组成多少种不同的币值？

知识联系与拓展

1. 乘法原理与函数的联系

例 5 从 0，-1，-2，3，4，5，6 这 7 个数中任取三个分别作为二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中的系数 a,b,c，如果函数的图像经过原点，且顶点在第一象限，这样的二次函数有几个？

解题策略 完成一件事就是确定二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中的系数 a,b,c. 为此需要先算出 a,b,c 所满足的条件.

解 由图像经过原点(0, 0)，可知 $c=0$，又二次函数顶点 $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 在第一象限，

所以 $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} > 0, \\ \dfrac{4ac-b^2}{4a} > 0. \end{cases}$ 可得 $a<0$，$b>0$，

∴ 系数 a,b,c 必须满足 $\begin{cases} a<0 \\ b>0 \\ c=0 \end{cases}$.

故 a 可取 -1，-2 两者之一，b 可取 3，4，5，6 四者之一，而 c 只能取 0. 所以符合题意的二次函数共有：

$$N = 2 \times 4 \times 1 = 8(\text{个}).$$

注意 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像经过原点且顶点在第一象限⇔

$\begin{cases} a \times 0^2 + b \times 0 + c = 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > 0, \\ \dfrac{4ac-b^2}{4a} > 0. \end{cases}$ 即 $\begin{cases} c=0 \\ a<0 \\ b>0 \end{cases}$，所以由 a,b,c 的取值分步骤考虑.

2. 乘法原理在坐标平面内的研究

例 6 设集合 $M = \{x \mid |x| \leqslant 3,\ x \in \mathbf{Z}\}$，$P(a, b)$ 是坐标平面上的点，且 $a,b \in M$，则

(1) P 可表示平面上多少个点？ (2) P 可表示平面上多少个第二象限点？

(3) P 可表示多少个不在直线 $y=x$ 上的点？

解题策略 三个小题中要确定的都是点，而一个点是由横坐标、纵坐标确定，所以利用分步计数原理.

解 显然 $M = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$，

(1) 分两步：第一步，确定横坐标，有 7 种；

第二步，确定纵坐标，也有 7 种.

因此，P 可表示平面上 49 个点.

(2) 若 P 第二象限点，则横坐标为负，纵坐标为正，

分两步：第一步，确定小于 0 的横坐标，有 3 种；

第二步，确定大于 0 的纵坐标，有 3 种.

因此，P 可表示平面上 9 个点.

(3) 分两步：第一步，确定横坐标，有 7 种；

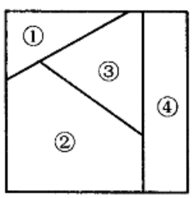
第二步，确定纵坐标，可以从剩余的六个数中选择，有 6 种.

因此，P 可表示不在直线 $y=x$ 上的点有 $7\times 6=42$(个).

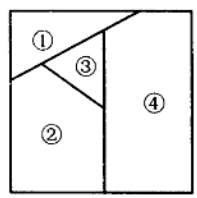
注意 本题中完成一件事(即确定一个点)就是指确定点的横坐标和纵坐标，因此问题就转化为分两步分别确定横坐标和纵坐标，但在确定横坐标和纵坐标时需要具体考虑各个小题中对横坐标和纵坐标的限制.

3. 着色问题

例 7 用 n 种不同颜色为下列两块广告牌着色(如图 13－1)，要求在区域中，相邻(有公共边界)的区域不用同一种颜色.



甲



乙

图 13－1

(1) 若 $n=6$，分别为甲着色时有多少种不同方法？(2) 若为乙着色时共有 120 种不同方法，求 n.

解题策略 完成着色这件事，共分四个步骤，可以依次考虑为①、②、③、④着色时各自的方法数，再由乘法原理确定总的着色方法数.

解 (1) 着色(方法数)可以分四步完成：

第一步：为①着色有 6 种方法，

第二步：为②着色有 5 种方法，

第三步：为③着色有 4 种方法，

第四步：为④着色有 4 种方法.

根据乘法原理，所以着色方法有

$$N=6\times 5\times 4\times 4=480(\text{种}).$$

(2)与(1)的区别在于，与④相邻的区域由两块变成了三块，所以前三步着色的思考方法同(1)，第四步为④着色时共有$(n-3)$种方法.

同样根据乘法原理，有 $n(n-1)(n-2)(n-3)=120$，

$\therefore n=5$.

注意 (1) 观察图形的特点，理解题目的要求.(2) 本题的两小题也可以从接触区域最多的那块区域开始逐一着色.

4. 枚举法

例 8 若连续掷两次骰子分别得到的点数 m, n 作为点 P 的坐标，则落在圆 $x^2+y^2=16$ 内的这样的点 P 有几个？

解题策略 由于 m, n 只能取 1,2,3,4,5,6，且必须满足 $m^2+n^2<16$，所以符合题意的点数不会太大，我们可以用枚举法.

解 要使点 P 落在圆 $x^2+y^2=16$ 内，m, n 必须满足 $m^2+n^2<16$，骰子有 6 个面，其点数为 1,2,3,4,5,6，所以 $1\leqslant m, n\leqslant 3$，所以满足条件的点为：$P(1,1)$，$P(1,2)$，$P(1,3)$，$P(2,1)$，$P(2,2)$，$P(2,3)$，$P(3,1)$，$P(3,2)$. 所以一共有 8 个点.

注意 用枚举法写出排列，要特别注意不重复、不遗漏. 本题同时需要注意的是点(3，3)是不符合题意的.

例 9 在所有 6 位二进制中至少有连续 4 位是 1 的数有几个？

解题策略 把满足条件的二进制数分成三类，第一类是恰好有 4 个连续的 1，第二类恰有 5 个连续的 1，第三类恰有 6 个连续的 1，把所有这些满足条件的数写出.

解 恰好有 4 个连续的 1 的数有：001111，101111，011110，111100，111101；
恰有 5 个连续的 1 的数有：011111，111110；
恰有 6 个连续的 1 的数有：111111.
所以符合题意的数共有 8 个.

注意 枚举法在解决个数较小的问题时非常有效，特别是在能保证不重复、不遗漏的前提下都能得到正确的结论.

历届高考题解析与应注意的问题

例 10 某体育彩票规定：从 01 至 36 中抽出 7 个号为“一注”，每注 2 元，某人想从 01 至 10 中选 3 个连续的号，从 11 至 20 中选 2 个连续的号，从 21 至 30 中选 1 个号，从 31 至 36 中选 1 个号组成一注，则这人想把这种特殊要求的号买全，至少要花多少钱？

分析 由于每注是 2 元，所以总共要花多少钱关键是算出需要买多少注. 本题中要完成一件事就是买好“一注”，而每注对号码的选择是有要求的.

解 “一注”的构成是 7 个号，为了得到一注，需要分四个步骤：
第一步：选“01 至 10”中 3 个连续的号码，共有 8 种可能选法；
第二步：选“11 至 20”中 2 个连续的号码，共有 9 种可能选法；
第三步：选“21 至 30”中 1 个号码，共有 10 种可能选法；
第四步：选“31 至 36”中 1 个号码，共有 6 种可能选法.
根据乘法原理，符合题意的共有：

$$N=8\times 9\times 10\times 6=4\,320\text{(种)不同情况.}$$

所以至少要花 $2\times 4\,320=8\,640$ (元).

注意 本题的一个特点是深化能力立意，突出应用性，直接考查基本原理，同时又着重于

关注学生阅读理解能力和应用能力.

例 11 同室 4 人各写一张贺年卡,先集中起来,然后每人从中拿一张别人写的贺卡,则 4 张贺卡不同的分配方式有多少种?

解题策略 给 4 人分别编 1,2,3,4 四个号,对 4 张贺卡也编上 1,2,3,4 四个数,那么,1,2,3,4 四个数填入 1,2,3,4 四个方格的一种填法对应贺卡的一种分配方法,则原问题就转化为上面所述方格的编号与所填数字不同的填法种类问题.

解 法一 分三步完成:

第一步:在 1 号方格里填数,可以填入 2,3,4 中的任一个数,有 3 种填法;

第二步:当在第 1 号方格填数 $i(2\leqslant i\leqslant 4)$之后,在第 i 号方格中填上合乎要求的数,有 3 种填法;

第三步:将剩下的两个数填入空着的方格里,只有 1 种符合要求(因为此时剩下的两个数中至少有一个数与空着的方格序号相同).

根据乘法原理,共有

$$N = 3\times 3\times 1 = 9\,(\text{种})\text{不同的分配方式}.$$

法二 4 张贺卡,4 个方格,可以用枚举法罗列出来,其对应关系如下:

2	1	4	3	2	3	4	1	2	4	1	3
3	1	4	2	3	4	1	2	3	4	2	1
4	1	2	3	4	3	1	2	4	3	2	1

图 13 - 2

从上述枚举的结果可知有且只有 9 种分配方法符合题意.

例 12 (2005 年全国高考题)在由数字 0,1,2,3,4,5 所组成的没有重复数字的四位数中,不能被 5 整除的数共有________个.

解题策略 由于个位数和千位数是两个特殊的位置,可以优先考虑,然后再考虑没有受到限制的十位数和百位数.

解 依据题意,可以分四个步骤确定四位数:

第一步:先考虑个位数,只能从 1,2,3,4 中选取一个,共有 4 种可能;

第二步:再考虑千位数,只能从 1,2,3,4 中剩下的 3 个数字以及 5 中选取 1 个(注:0 不能排在首位),共有 4 种可能;

第三步:确定百位上的数,可以从前面两步选取好以后剩下的 4 个数字中任取 1 个,共有 4 种可能;

第四步:确定十位上的数,可以从前面三步选取好以后剩下的 3 个数字中任取 1 个,共有 3 种可能.

根据乘法原理,共有 $4\times 4\times 4\times 3 = 192$(个).

注意 本题的解答中,第三步和第四步完全可以对调,也即在确定好个位数和千位数后,到底是先确定百位数还是先确定十位数是无关紧要的. 而个位数和千位数均是有特殊要求的位置,但是它们是不能对调的,试想一想,为什么?

课后习题解答

练习 13.1

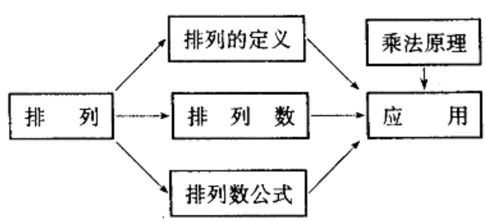
1. 12 种.
2. 24 种.
3. 260 种.
4. $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$ 个.

习题 13.1

1. 1 000 种.
2. 72 种.
3. 16 条.
4. 18 次.
5. 24 项.
6. 81 种.　因为可将信全部或部分投入某一个信箱,因此每封信都有 3 种不同的投法,共有 $3^4=81$ 种不同的投法.
7. $12^4=20\ 736$ 种.　每个人的生日月份都有 12 种可能.

13.2 排　　列

知识结构框图表解



基础知识详解与要点点拨

1. 排列:从 n 个不同元素中,任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素(这里被取元素各不相同)按照一定的顺序排成一列,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

注:(1) 定义中含有两层含义:① 取出元素;② 按照一定的顺序排列.

(2) 与集合的区别:

	相　　同	不　　同
排　列	元素相同且顺序相同	元素有一个不同或元素相同但元素排列的顺序不同
集　合	元素相同(元素无序性)	元素有一个不同

(3) 当 $m<n$ 时,称为选排列;当 $m=n$ 时,称为全排列.

2. 排列数:从 n 个不同元素中取 $m(m\leqslant n)$ 个元素的排列个数,称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数,记为 P_n^m. 当 $m=n$ 时,称为 n 个元素的全排列,记为 P_n^n.

3. 排列与排列数的区别:排列是从 n 个不同元素中,任取 m 个元素 $(m\leqslant n)$,按一定顺序排成一列,是一个具体的形式,它不是一个数;而排列数是指从 n 个不同元素中,任取 m 个元素 $(m\leqslant n)$ 的所有排列的个数,即共有多少个排列的形式,它是一个数.

4. 排列数公式:$P_n^m=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$

(1) $P_n^m=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)$ 称为连乘式形式,

它有三个特点:① 第一个因数是 n,后面的每个因数都比它前面的一个因数少 1;

② 一共有 n 个;③ 最后一个因数是 $n-m+1$.

(2) $P_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$ 称为阶乘式形式,其中 $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n$. 并规定:$0!=1$.

(3) P_n^m 的连乘式形式常用于具体数值的计算,而阶乘式形式则常用于含有字母或因式较多的排列数的计算、变形等问题.

5. 处理排列问题应该注意的问题:

(1) 注意排列的有序性,分清是全排列还是选排列,做到不重复不遗漏;

(2) 有条件限制的位置和元素应该优先考虑,再考虑一般的位置和元素;

(3) 同一个问题,有时从位置出发比较方便,有时从元素入手比较简单,需要灵活进行选择;

(4) 解决排列数问题常用直接法、间接法;间接法常见的技巧是"插空法"、"捆绑法".

典型例题精讲与规律、方法、技巧总结

1. 排列的概念

例 1　(1) 10 人走进只有 6 把椅子的屋子,若每把椅子必须且只能坐一个人,共有多少种不同的坐法?

(2) 6 人走进放有 10 把椅子的屋子,若每把椅子必须且只能坐一个人,共有多少种不同的坐法?

解题策略　(1) 坐在椅子上的 6 个人是走进屋子的 10 人中的任意 6 个人. 若我们把人抽象地看成元素,将 6 把椅子当成 6 个不同的位置,则原问题便抽象为:从 10 个元素中任取 6 个元素占据 6 个不同的位置,显然是从 10 个元素中任取 6 个元素的排列问题. (2)同第(1)小题相反,被坐的 6 把椅子是 10 把中的任意 6 把. 将椅子看成元素,6 个人看成不同的位置,同样是:从 10 个元素中任取 6 个元素占据 6 个不同的位置,也是从 10 个元素中任取 6 个元素的排列问题. 所以(2)本质上与(1)是相同的.

解　(1) 共有 $P_{10}^{6}=151\ 200$ 种坐法;(2) 共有 $P_{10}^{6}=151\ 200$ 种坐法.

注意　(1) 本例说明了在解决与排列有关的问题时,处理问题的方法与生活中人们的看法可能截然相反,这正说明了排列中"元素"与"位置"的相对性.(2) 本例为排列提供了一个易于操作的模型:n 个不同的元素去占据 m 个不同的位置,① 若 $n\geqslant m$ 且每个位置只占(排)一个元素,则有 P_{n}^{m} 种不同的占(排)法;② 若 $n<m$ 且每个元素只占一个位置,则有 P_{m}^{n} 种不同的占(排)法.

例 2　甲乙两支中学足球队,经过 90 分钟的苦战以 2∶2 战平,现决定两队各派 5 名队员,每人射一个点球决定胜负,则两队球员一个间隔一个出场射球,有多少种不同的出场顺序.

解题策略　出场顺序需要考虑每支球队队员的出场顺序,以及由哪支球队先射点球.

解　依据题意可分三个步骤安排出场顺序:

第一步:安排甲队的出场顺序,共有 P_{5}^{5} 种;

第二步:安排乙队的出场顺序,共有 P_{5}^{5} 种;

第三步:确定哪支球队的先射点球,共有 P_{2}^{2} 种.

根据乘法原理,共有 $P_{5}^{5}\cdot P_{5}^{5}\cdot P_{2}^{2}=28\ 800$ 种不同的出场顺序.

注意　本题中各个步骤之间是相对独立的,也即先确定乙队的出场顺序或先确定哪支球队先射点球是不影响本题的结论.

例 3　甲、乙、丙三人传球,从甲开始传出,并记为第 1 次,经过 5 次传球,球恰好传回到甲手中,则不同的传球方式共有多少种?

解题策略　本题只有甲、乙、丙三人传球,人数较少,可用树型图分析.

解　作出甲、乙、丙三人传球的示意图(如图 13-3)

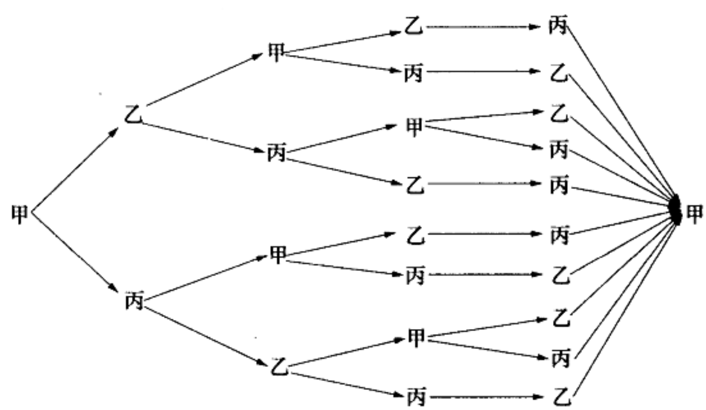


图 13-3

由上述的树型图可知,符合题意的传球方式共有 10 种.

注意　(1) 在枚举法中,树型图法、字典排列法是研究排列问题的最基本的方法,在元素不多的情况下,枚举法往往是非常奏效的.(2) 本题中,通过树型图,直观地把各种结果既无重复也无遗漏地表示出来.(3) 我们还可以思考:甲、乙、丙、丁四个人传球从甲开始传出,并记为第 1 次,经过 4 次传球,球恰好传回到甲手中,则不同的传球方式有多少种?

例 4　记 10 个人排成一排的排列数为 a,10 个人排成两排的排列数为 b,则 a 与 b 的大小

关系(　　)

A. $a=b$　　B. $a>b$　　C. $a<b$　　D. $b<a<2b$

解题策略　关键是分别算出两种不同的情况下的排列数 a 与 b，再进行比较.

解　若排成一排：$a=\mathrm{P}_{10}^{10}=10!$

若排成两排：先排第一排的选排列，有 P_{10}^{5} 种，再排第二排时只能是剩下的 5 人进行全排列，有 P_{5}^{5} 种方法，根据乘法原理，总的排列数为 $b=\mathrm{P}_{10}^{5}\cdot\mathrm{P}_{5}^{5}=10!$

所以 $a=b$，选 A.

注意　本题会容易误选 D，实际上无论是排一排还是排两排，最终完成任何一种排列都是给 10 个人找到固定好的位置，对于已经排好一排的排列，我们可以把它按照一定的规则在排两排的所有排列中找到惟一的一个排列与之对应(比如图 13－4 就是一种对应). 也就是说在这两种不同的排列类型间(排一排和排两排)可以建立了一一对应的关系.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

⇓

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

图 13－4

所以说排一排和排两排得到的排列数是相同的.

2. 关于 P_n^m 的计算公式问题

例 5　(1) 展开下列的排列数：① P_{k+1}^{k-4}，② P_{n+5}^{n+2}；

(2) 用排列数表示下列各式：① $(m-2)(m-3)(m-4)\cdot\cdots\cdot(m-n+2)$，② $n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)$.

解题策略　第(1)小题只需根据 P_n^m 的展开公式计算即可，第(2)小题中只能先写成连续自然数的乘积，再根据 P_n^m 的计算公式"反过来"写出排列数.

解　(1) ① $\mathrm{P}_{k+1}^{k-4}=\dfrac{(k+1)!}{[(k+1)-(k-4)]!}=\dfrac{(k+1)!}{5!}=(k+1)\cdot k\cdot(k-1)\cdot\cdots\cdot7\cdot6$，

② $\mathrm{P}_{n+5}^{n+2}=\dfrac{(n+5)!}{[(n+5)-(n+2)]!}=\dfrac{(n+5)!}{3!}=(n+5)\cdot(n+4)\cdot\cdots\cdot5\cdot4$；

(2) ① $(m-2)(m-3)(m-4)\cdot\cdots\cdot(m-n+2)=(m-2)(m-3)\cdot\cdots\cdot[m-(n-1)+1]=\mathrm{P}_{m-2}^{n-1}$，

② $n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)=n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)(n-3)(n+3)$

$=(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)=\mathrm{P}_{n+3}^{n-4}$.

注意　对 P_n^m 的计算公式要深刻领会，要能正用、逆用该公式.

例 6　解方程或不等式：(1) $3\mathrm{P}_8^x=4\mathrm{P}_9^{x-1}$；(2) $\mathrm{P}_{x-2}^2+x>2$.

解题策略　根据 P_n^m 的计算公式严格展开每个排列数.

解　(1) 由 $\begin{cases}x\in\mathbf{N}\\x\leqslant8\\x-1\leqslant9\end{cases}$，得 $x\in\mathbf{N}$ 且 $x\leqslant8$ ①

原方程可化为：$3\cdot\dfrac{8!}{(8-x)!}=4\cdot\dfrac{9!}{[9-(x-1)]!}$，即 $\dfrac{1}{(8-x)!}=\dfrac{12}{(10-x)!}$，