高等院校金融经济数学教材

经济代数

谢为安　陈　博　编著

中国计量出版社
CHINA METROLOGY PUBLISHING HOUSE

高等院校金融经济数学教材

经济代数

谢为安　陈　博　编著

中国计量出版社

图书在版编目（CIP）数据

经济代数/谢为安，陈博编著．—北京：中国计量出版社，2006.8
高等院校金融经济数学教材
ISBN 7-5026-2495-3

Ⅰ．经…　Ⅱ．①谢…②陈…　Ⅲ．线性代数—高等学校—教材　Ⅳ．0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 096412 号

内 容 提 要

本书以经济活动为背景，阐述了经济矩阵、经济行列式、经济向量空间、经济二次型、经济内积空间等理论与应用问题。

本书既是一本经济应用代数的书，又是一本代数应用于经济的书。每章末附有习题，且在书末附有习题解答以及 MATLAB 软件的使用说明。

本书力求简明扼要，学以致用，且操作性强，可作为高等院校经济、金融、财务、保险等专业的教学用书，也可作为经济管理人员自学或参考用书。

中国计量出版社出版
北京和平里西街甲 2 号
邮政编码　100013
电话（010）64275360
http://www.zgjl.com.cn
北京市密东印刷有限公司印刷
新华书店北京发行所发行

*

787 mm×1092 mm　16 开本　印张 11.75　字数 257 千字
2006 年 9 月第 1 版　2006 年 9 月第 1 次印刷

*

印数 1—2 000　**定价：** 24.00 **元**

前 言

随着经济科学的深入与发展，数学日益不断地向这门学科的各个领域渗透。正像当年的物理学与数学的发展趋势，当今的经济学与数学也融为了一体。简单地说，现在的经济学不异于数学，数学也不异于经济学。作为数学的一个分支——代数学，它与经济学之间的关系亦复如是。

长期的教学与科研工作，不断地增强了我撰写《经济代数》这本书的欲望，而且逐渐使我形成了一条清晰的写作思路，明确了该书的应用方向。本书的内容体系为：

第一章　经济模型与矩阵理论

本章以国民经济的投入产出系统为背景，说明了矩阵的定义、运算性质以及如何应用矩阵来为经济计划服务。

第二章　经济代数与行列式

本章以经济变量间的关系而形成的代数式为根本，来阐述行列式的性质及其在求解经济模型中的作用。

第三章　经济向量空间

用经济实例，给予向量空间的定义，阐述了经济向量间的关系及其有关的线性经济问题。

第四章　秩与经济应用

以解决一般线性经济系统的问题为最终目的，来展开矩阵的秩、向量的秩及其在经济学中的应用等问题的讨论。

第五章　特征值、特征向量与经济问题

本章首先阐述了经济向量的一些特征问题（如特征向量与特征值的概念及其性质），其次讨论了经济矩阵的对角化问题，最后将这些知识应用于经济时间序列以及系统模型的求解过程中。

第六章　经济二次型

从消费、生产以及效用等函数入手，讨论了二次型的特性，展开了经济二次型的应用前景。

第七章　经济内积空间

本章阐述了经济内积空间的内涵、正交及其投影等问题，着重讨论了经济最小二乘问

题，强调了内积空间在解决实际的经济问题中是非常有用的。

在数学理论方面，本书有别于任何一本《线性代数》书的结构体系，在经济应用方面，本书将《线性代数》这门数学浓浓地融于经济问题之中，且在每章末附有一定数量的经济应用题，且书末附有习题答案或解题过程。

本书力求简明扼要，学以致用，且可操作性强（这点可见书末 MATLAB 软件的使用说明）。本书可作为高等院校的经济、金融、财务、保险等专业的教学用书，也可作为经济管理人员自学或参考用书。

由于作者水平有限，书中错误之处在所难免，恳请同行及读者批评指正。

谢为安
于复旦大学经济学院
2006 年 6 月

目 录

第一章

经济模型与矩阵理论

1.1 里昂惕夫投入产出模型

经济学学生对“一般均衡”概念都是耳熟能详。研究一般均衡的思路是确定一组相对价格，使得所有市场均达到均衡。通常的研究方法和结论（如瓦尔拉斯均衡的方法）都是在一定制度前提下进行的，如完全竞争，完全的中央计划。而 1949 年里昂惕夫所做的工作则开辟了通过完全计算通向一般均衡的路径。

他的思路是：一个国家的经济可以被划分为若干部门（制造、通信、服务、能源等），每个部门既是生产者，又是消耗者。所有部门正好将它们生产的总和消耗光，整个国民经济就在这样一种错综复杂的关系之中达到均衡。如果我们把一个部门产出的货币总价值称做产出的价格（请注意，这里被称做价格的是总产值），里昂惕夫证明了，存在着一组均衡价格，使得各个部门的花费和收入相当。接下来的工作便是如何寻找这个均衡价格。

我们将先从一个极其简单的三部门模型入手，向读者展示这一模型的架构和解决思路。

例 1.1 假设国民经济总共由三个部门组成，那么按照里昂惕夫的分析思路，我们可以得到表 1.1。

表 1.1

	第一部门	第二部门	第三部门
第一部门	1/2	1/3	1/2
第二部门	1/4	1/3	1/4
第三部门	1/4	1/3	1/4

表 1.1 中，列数据代表了每个部门生产出的产品所消耗其他部门的份额，行数据代表各个部门分配给其他部门的份额。以第一列和第一行数据为例，它们分别代表第一部门消耗其他部门所生产产品的份额以及制造业生产出的产品分配给其他部门的份额。在这个模型中，不存在纯消耗的部门。因此，三大生产部门将生产的产品消耗殆尽。表

1.1 中，列数据相加为 1，而行数据则不具有这一特征。里昂惕夫后来对生产部门和非生产部门进行了区分，对模型做了修正。

我们在这里所设定的是一个极端简化的经济模型，事实上，里昂惕夫当初将美国的经济划分为 500 个部门，他向计算机中输入了超过 250000 个数据。这个数据集是如此庞大，以至于当时世界上最先进的 MARK Ⅱ 型计算机也对这 500 个方程和 500 个未知数无能为力。里昂惕夫后来将之简化为 42 个方程和 42 个未知数，MARK Ⅱ 在嗡鸣了 56 个钟头后终于交出了答案。在本章的第七节，我们将给出一般的模型及模型的解。

对这一求解一般均衡思想优劣的评价不属于本书的讨论范围。事实上，里昂惕夫于 1973 年获得诺贝尔经济学奖，主要是由于它打开了研究经济数学模型的新时代的大门，那便是，应用计算机来分析数学模型的方法，这个模型是线性的。其中蕴涵的线性代数的内容便是本书要研究的范畴。

1.2 矩阵的概念及运算

1.2.1 矩阵的概念

矩阵并没有非常严格的定义，它更多是一种概念上的东西。在例 1.1 中，将表 1.1 中的数字写成 $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \end{pmatrix}$ 的形式，我们便得到一张 9 个数字按照一定顺序排列的表，把这样的表称做一个 3×3 矩阵，并由此得到矩阵的一般概念，即由 $m\times n$ 个数字排成的 m 行，n 列的矩形表，称做一个 $m\times n$ 矩阵。用 a_{ij}（$i=1$，2，…，m；$j=1$，2，…，n）表示矩阵中位于第 i 行第 j 列的元素，我们得到一个一般的矩阵形式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵在经济、科技领域有着极其广泛的应用，将数据进行分类，然后按照一定顺序排列，就得到一个矩阵的形式。一些矩阵具有比较特殊的形式，下面给出它们的定义。

定义 1.1 如果 $m=n$，我们称这样的矩阵叫做方阵，对方阵通常的称呼是 n 阶矩阵。

定义 1.2 如果所有的 a_{ij} 均等于 0，这样的矩阵称做零矩阵。

定义 1.3 如果 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}_{m\times n}$ 对应位置上的元素都相等，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记做 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$。

1.2.2 矩阵的运算

1.2.2.1 矩阵的线性运算

矩阵最基本的运算有两种，加法和数乘。矩阵的加法和数乘，统称为矩阵的线性

运算。

当且仅当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算。加法运算的法则是将两个同型矩阵对应位置上的元素分别相加。

即：设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}_{m\times n}=(b_{ij})_{m\times n}$，则 $\boldsymbol{A}_{m\times n}+\boldsymbol{B}_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$

矩阵的数乘是指数 r 与矩阵 A 相乘，法则是将矩阵的每一个元素分别与 r 相乘。

即：$r\boldsymbol{A}_{m\times n}=(ra_{ij})_{m\times n}$例如，$-\boldsymbol{A}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素都乘以-1。

将矩阵的加法与数乘结合起来，我们有如下运算规律：

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 是同型矩阵，m，s 为数，则有

(1)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(2)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

(3)$m(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=m\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B}$；

(4)$(m+s)\boldsymbol{A}=m\boldsymbol{A}+s\boldsymbol{A}$；

(5)$m(s\boldsymbol{A})=(ms)\boldsymbol{A}$；

(6)$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=0$；

(7)$\boldsymbol{A}+0=\boldsymbol{A}$。

例 1.2　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&1&2\\-3&5&7\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&4&3\\5&1&6\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$。

解：$2\boldsymbol{B}=2\begin{bmatrix}2&4&3\\5&1&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&8&6\\10&2&12\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4&1&2\\-3&5&7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&8&6\\10&2&12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-7&-4\\-13&3&-5\end{bmatrix}$$

1.2.2.2　矩阵的乘法

矩阵的乘法运算比较复杂，在介绍运算法则前，有必要先将矩阵相乘的概念弄清楚。为弄清这点，我们将从极简化了的现实生活中的例子入手。

假设一个消费者 A，全年仅消费两种商品，牛肉和牛奶。他一年消费牛肉的数量是350，牛奶的数量是400，牛肉的价格是10，牛奶的价格是2，问他全年的支出是多少。

几乎所有学生都能不假思索的答出，$350\times10+400\times2=4300$，没错，这是道小学算术题。可是如果我们引进矩阵的思想，将消费的数量看作一个 1×2 的矩阵 $\begin{bmatrix}350&400\end{bmatrix}$ 将价格看作一个 2×1 的矩阵$\begin{bmatrix}10\\2\end{bmatrix}$将支出看作一个 1×1 的矩阵（4300），那么它的意义就不同于小学算术题目了。没错，$[4300]=\begin{bmatrix}350&400\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}10\\2\end{bmatrix}$，我们在后面将对这种表示形式予以说明。

现在考虑两个消费者的情形，假设另一个消费者 B 的消费数量是 280，330，那么 B 的支出为 $280\times10+330\times2=3460$，此时我们将两个消费者的消费数量看作一个 2×2

的矩阵$\begin{bmatrix}350 & 400\\280 & 330\end{bmatrix}$，将两个消费者的支出看作一个 2×1 的矩阵$\begin{bmatrix}4300\\3460\end{bmatrix}$，就有

$$\begin{bmatrix}4300\\3460\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}350 & 400\\280 & 330\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}10\\2\end{bmatrix}$$

现在再将时间的因素考虑进来，假设第二年，牛肉的价格为 8，牛奶的价格为 3，现在两个消费者的支出分别为 350×8＋400×3＝4000，280×8＋330×3＝3230。将两个消费者在两年的支出表示写成一个 2×2 的矩阵$\begin{bmatrix}4300 & 4000\\3460 & 3230\end{bmatrix}$则$\begin{bmatrix}4300 & 4000\\3460 & 3230\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}350 & 400\\280 & 330\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}10 & 2\\8 & 3\end{bmatrix}$。

读者心中现在一定已经有了关于矩阵相乘的概念。随着矩阵行和列数目的增多，矩阵相乘也便包含了越来越多的内容，这使得我们能够解决复杂无比的问题。下面我们将对矩阵相乘的形式给以详细说明。

读者一定已经注意到，我们在书写数量矩阵和价格矩阵时是按照一定的规则的。我们将一个消费者消费的数量排在一行中，将商品的价格排在一列中。这种规则是矩阵相乘的规则，两个矩阵能够相乘，前提是前一个矩阵的列数等于后一个矩阵的行数。而乘积矩阵中的每个元素等于前一个矩阵的对应行元素与后一个矩阵的对应列元素分别相乘并求和。下面给出矩阵相乘的一般规则：

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times p},\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}_{m\times p},\boldsymbol{C}_{m\times p}=(c_{ij})_{m\times p}$

其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj} \tag{1.1}$$

前面做过说明，矩阵相乘有严格的要求，所以，$\boldsymbol{AB}$ 存在，并不表示 $\boldsymbol{BA}$ 同样存在，更不意味着 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$。因此，矩阵相乘时，一定要分清两个矩阵能否进行相乘运算，以及是左乘还是右乘。

例 1.3 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 8\\3 & 5\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4 & 2 & 6\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}$，计算 $\boldsymbol{AB}$。

解：

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}4\times4+8\times1 & 4\times2+8\times2 & 4\times6+8\times3\\3\times4+5\times1 & 3\times2+5\times2 & 3\times6+5\times3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24 & 24 & 48\\17 & 16 & 33\end{bmatrix}$$

例 1.4 投资者的投资组合中有三种资产：股票，债券，黄金。三种资产在两种投资策略下的回报矩阵为

$$\boldsymbol{R}(r_{ij})_{3\times2}=\begin{bmatrix}1.2 & 0.9\\1.05 & 0.95\\0.9 & 1.1\end{bmatrix}$$

其中，r_{ij} 表示第 i 种资产在第 j 种状态下的投资回报率。$r_{ij}>1$ 表示盈利，反之则表示亏损。已知投资者期初对三种资产的投资数量为 $\boldsymbol{Y}=[10000 \quad 9500 \quad 12000]^T$，问投资

者将选择何种策略进行投资。

解：投资组合在两种策略下的回报分别为

$$\boldsymbol{R}^T \times \boldsymbol{Y} = [32775 \quad 31225]^T$$

故投资者将选择第一种策略进行投资。

这里，再介绍矩阵相乘的另一种表示法。若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times p$ 矩阵，用 $\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，…，$\boldsymbol{b}_p$ 来表示 $\boldsymbol{B}$ 的各个列，其中

$$\boldsymbol{b}_i = \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{mi} \end{bmatrix}$$

（读者应熟悉这种表示方法，在矩阵代数中，用这种方法来表示矩阵有着广泛的用途，有时可以使问题大大简化）那么，$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_p] = [\boldsymbol{Ab}_1, \boldsymbol{Ab}_2, \cdots, \boldsymbol{Ab}_n]$，即 $\boldsymbol{AB}$ 乘积矩阵中的每一列都等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 乘以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的对应列。

我们所熟悉的方程组，就可以利用这种矩阵相乘的表示法，写成 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的形式，其中，$\boldsymbol{A}$ 为方程组的系数矩阵，$\boldsymbol{X}$ 为变量矩阵，$\boldsymbol{b}$ 便是方程组等号右边的数值组成的矩阵。

这种相乘的表示通常不用于计算，但对于定理的证明却很有帮助。

矩阵相乘具有如下运算性质：

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$；

(3) $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$；

(4) $k(\boldsymbol{AB}) = (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$；

(5) $\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A}_{m\times n} = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{AI}_n$。

这里，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 均为矩阵，k 为常数。注意，这些运算法则有一个前提，那就是，这些计算都是可以进行的。这一点，从性质（5）看得很清楚，矩阵相乘是半点马虎不得的。

这里列出三点，提请读者注意：

(1) 一般情况下，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为可交换矩阵；

(2) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，一般情况下，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ 并不成立；

(3) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，未必有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 或者 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$。

特殊的，对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 及自然数 k，有方阵的幂运算，记为 $\boldsymbol{A}^k$，即

$$\boldsymbol{A}^k = \underbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}_{k个} \tag{1.2}$$

把 $\boldsymbol{A}^k$ 称做 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂。显然，$\boldsymbol{A}^k$ 仍为 n 阶方阵。方阵的幂满足如下运算规律：

(1) $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l = \boldsymbol{A}^{k+l}$；

(2) $(\boldsymbol{A}^k)^l = \boldsymbol{A}^{kl}$。

1.2.2.3 矩阵的转置

定义 1.4 将 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行与列互换，得到的 $n\times m$ 矩阵，称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，

记做 $\boldsymbol{A}^T$ 或者 $\boldsymbol{A}'$。即

若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$，转置矩阵具有如下运算性质：

(1) $(\boldsymbol{A}^T)^T=\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T$;

(3) $(k\boldsymbol{A})^T=k\boldsymbol{A}^T$;

(4) $(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$。

1.3 典型矩阵

本节将介绍几种特殊的矩阵及其运算性质。

1.3.1 对角矩阵

定义 1.5 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中的元素 $a_{ij}=0$，$i\neq j$ (i，$j=1$，2，3，…，n)，则称 $\boldsymbol{A}$ 为对角矩阵。即除主对角线以外，其余元素均为 0

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

对角矩阵常用符号 $\boldsymbol{\Lambda}$ 来表示，上面的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 还可以简记做 $\boldsymbol{A}=diag\ (a_{11},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{nn})$。

对角矩阵具有如下运算性质：如果 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同阶对角矩阵，那么 $k\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 仍为同阶对角矩阵。如果 $\boldsymbol{A}$ 为对角阵，那么 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$。

运用这些运算性质，我们又可以得到关于对角阵的另外一些有用的性质：

(1) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$;

(2) $\boldsymbol{A}^k=diag\ (a_{11}^k,\ a_{22}^k,\ \cdots,\ a_{nn}^k)$，这里要求 k 非负；

(3) $(\boldsymbol{AB})^k=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$ (k 非负)。

对角矩阵还有两种更特殊的形式：数量矩阵和单位矩阵。

定义 1.6 如果 n 阶对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的元素 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a$ (a 为常数) 时，那么称 $\boldsymbol{A}$ 为数量矩阵。记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{bmatrix}$$

数量矩阵具有一条非常有用的运算性质：以数量阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘或右乘一个矩阵 $\boldsymbol{B}$，乘积

等于数 a 乘矩阵 $\boldsymbol{B}$。若

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} ab_{11} & ab_{12} & \cdots & ab_{1n} \\ ab_{21} & ab_{22} & \cdots & ab_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ab_{n1} & ab_{n2} & \cdots & ab_{nn} \end{bmatrix}=a\boldsymbol{B} \tag{1.3}$$

定义 1.7　若 n 阶数量阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角线元素为 1，则称 A 为单位阵。

容易得到单位阵的运算性质：$\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}$。并且，对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，规定 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{I}$。

1.3.2　对称矩阵

定义 1.8　若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，亦即：$a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$。

对称矩阵的元素关于主对角线对称。

例如：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 1 \\ 9 & 8 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

都是对称矩阵。显然，对角矩阵都是对称矩阵。

对称矩阵具有如下运算性质：

(1) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$；即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 仍然是对称阵；

(2) $(k\boldsymbol{A})^T=k\boldsymbol{A}$；同上。

但是，$(\boldsymbol{AB})^T$ 不一定等于 $\boldsymbol{AB}$，即：$\boldsymbol{AB}$ 不一定是对称矩阵。

例 1.5　设对称矩阵

$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$2\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{AB}$。

解：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$，$2\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$。

可见，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$2\boldsymbol{A}$ 仍是对称阵，$\boldsymbol{AB}$ 不是。事实上，若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{AB}$ 均是对称阵，则 $\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{BA}$。

1.3.3　反对称矩阵

定义 1.9　若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}$，亦即：$a_{ij}=-a_{ji}$ $(i, j=1, 2, \cdots, n)$，

当 $i=j$ 时，$a_{ii}=0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵。

例如：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

都是反对称矩阵。

反对称矩阵具有如下运算性质：

(1) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T=-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$；

(2) $(k\boldsymbol{A})^T=-k\boldsymbol{A}$。

与对称矩阵类似，$\boldsymbol{AB}$ 也不一定是反对称矩阵，容易证明，当且仅当 $\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{BA}$ 时，$\boldsymbol{AB}$ 才是反对称矩阵。

本节介绍的几种特殊矩阵都是方阵，在以后的章节中，我们将接触到它们的广泛应用。

1.4 逆矩阵

本节主要向读者介绍矩阵中另一个非常重要的概念：逆矩阵。逆矩阵的概念仅是对方阵而言的。

定义 1.10 如果 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵，$\boldsymbol{C}$ 也是一个 n 阶方阵，并且有 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{I}$ 同时成立，那么，我们说，$\boldsymbol{A}$ 是可逆的，或者称 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异的。称 $\boldsymbol{C}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记做 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^{-1}$。

对于逆矩阵，有：

定理 1.1 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵惟一。

证明： 假设 $\boldsymbol{B}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的一个逆矩阵，并且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$，那么，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BI}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC})=(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}$，因此，$\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵是惟一的。

需注意的是，任意方阵 $\boldsymbol{A}$ 未必是可逆的。

读者恐怕已经注意到，矩阵代数提供了许多与实数代数相似的有用的工具。矩阵的逆实际与实数的倒数是相似的问题。例如，实数 3 的乘法逆是 $\frac{1}{3}$，或者 3^{-1}，它满足方程 $3^{-1}\times3=1$ 和 $3\times3^{-1}=1$。

再联想到方程组，如果将一个有 n 个方程和 n 个未知数的一般方程组的系数矩阵记为 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$，将未知数矩阵记做 $\boldsymbol{X}_{n\times1}$，将方程等式右边的数值记做 $\boldsymbol{B}_{n\times1}$，我们将得到 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的矩阵方程形式，如果 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在，将方程组两边都左乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}$，将得到 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，即，我们将得到该方程组的解。

目前我们能用来求判定矩阵逆是否存在和求矩阵逆的方法非常单一，那就是解方程组的方法。