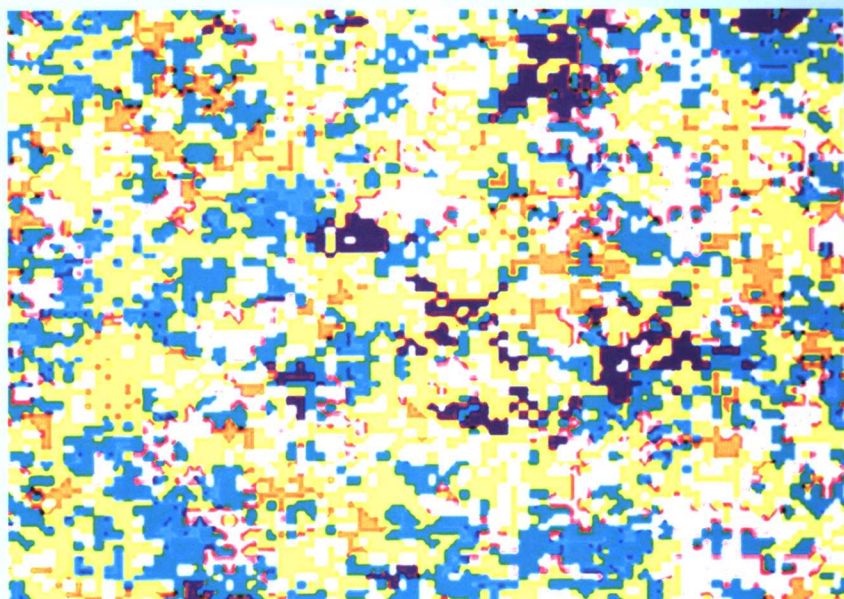


种群动力学

林振山◎著



科学出版社

www.sciencep.com

种群动力学

林振山 著

国家自然科学基金资助项目(40371108)
国家“十五”“211”工程重大项目 联合资助

科学出版社

北京

内 容 简 介

本专著是作者负责国家自然科学基金资助项目“人类对栖息地的若干作用与动物种群演化的关系”(40371108)和国家“十五”“211”工程重大项目“不同时空尺度环境演变和生态建设”的部分研究成果,内容涉及人类活动环境效应、景观生态学、生态学模型、理论生态学、种群多样性预测和非线性科学等。本书详细、系统地研究了单物种种群动力模式、2-物种种群动力系统、Tilman n 种集合种群动力模式、普适自治 n 种集合种群动力模式、普适非自治 n 种集合种群动力模式。

本书观点新颖独特,方法科学严谨,论述深刻透彻,所涉及的研究内容均为国际前沿或热点问题。本书可供生物科学、生态学、环境科学、地理科学以及有关学科的研究人员和教学人员参考,也可作为有关学科高年级本科生和研究生的教科书或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

种群动力学/林振山著. —北京:科学出版社,2006

ISBN 7-03-017288-4

I. 种… II. 林… III. 种群-动力学 IV. Q145

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 051728 号

责任编辑:彭胜潮 韩 鹏等 / 责任校对:刘小梅

责任印制:钱玉芬 / 封面设计:王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006 年 8 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2006 年 8 月第一次印刷 印张: 13 3/4

印数: 1~1 500 字数: 263 000

定价: 35.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换(环伟))

前 言

当前,由于人类活动而导致环境异变和物种灭绝等一系列重大问题,促使地理科学和宏观生物学的联合研究进入了一个新的深度和广度。俄罗斯科学家提出了地生态学;美国国家基金会在 2000~2010 年“地球科学”规划中,已将有关“人类活动而导致生态异变”的研究列为支持重点,有关的动力学研究则为重点中的重点。而 2001 年美国景观生态学会年会则将“线性科学和非线性科学在景观生态学中的应用”、“把人类和人类活动整合到景观生态学”和“景观水平的生物多样性保护”列为 21 世纪景观生态学的主题部分。国际上正酝酿着一种基于物种的景观生态学。国内有关该领域的研究则刚刚起步。2004 年度国家自然科学基金项目指南鼓励探索人类活动影响下,地球表层的结构功能变化机制及动力学与可持续发展途径的研究。国家自然科学基金委员会地球科学部将生态系统分析与生物多样性列为拟重点资助研究的关键科学问题。

近几十年来,人类正以前所未有的速度改变着地球上的物种多样性。集合种群在大面积的人类干扰(如大范围的森林砍伐、农业活动和城市化)所造成的残留缀块或破碎的生境片段的续存问题、“子孙债”问题、物种多样性及其预测问题,是当前地球科学和生态学有关交叉学科的前沿研究方向和热点问题。鉴于种群演化的长期性和生态系统内在的复杂性,诸如此类的许多重要的科学问题仅靠传统生态学的野外观察、抽样分析和基于经验的统计分析是无法回答和解决的。当前生态学发展的前沿方向之一,就是有关生态系统的动力学机制研究和动力学预测(如多样性或多度的预测)。众所周知,已知研究对象的某些现象或某些结果并不等于真正认识、洞察该对象。基于简单假设和数值模拟方法是当今自然科学各学科解释现象和结果的最有力、最科学的方法之一。在 20 世纪最后的 20 年里,大气科学和海洋科学建立了以海洋-大气-生态-地表为研究主题的各类全球变化耦合动力模式,进行了空前的大规模数值模拟实验研究,地球物理学建立以固体地球为研究主题的地球构造耦合动力模式,地球化学建立以元素为研究主题的地球示踪动力模式。但国际上有关宏观生态动力学和种群动力学方面的研究则刚刚起步。

余以为,21 世纪生态学的主要研究方法有以下三大类:

(1) 构建以 GIS、RS、GPS、e-Science、Data-Science 等“5S”为核心的集成技术平台,支持传统的野外观测、调查及其相关的统计分析等研究。

(2) 基于现代物理-化学-生物分析技术的实验室试验研究。

(3) 多尺度数值模拟的理论研究与各类耦合动力模式的构建,即建立各类地表、生态基本过程和各类时间、空间尺度的模式系统,建立有关宏观生态动力学、景观生态动力学和种群动力学等新理论体系。

本书正是源于上述的观点。在出版本专著之前,余已出版4本教材和5部专著,这些书都是按合同之约而如期交稿的。本书的出版意向书早在2002年就与科学出版社草签了,却拖至2005年10月才与科学出版社正式签定了出版合同。经过5年多的时间,总算基本完成了最初的框架设计所涉及的有关研究。所幸的是余有关种群适应人类活动过程的数值模拟试验研究和数值模拟预测种群多样性的观念及其有关成果也已被国内外的同行所接受和认同。

在20世纪的最后5年里,余在美国工作期间就开始了基于非线性科学的有关全球变化复杂性和生态复杂性的研究。2001年回国后,作为国家“十五”“211”工程重大项目“不同时空尺度环境演变和生态建设”的首席科学家和项目法人,余开展了人类活动环境效应的研究,2003年开始实施国家自然科学基金项目“人类对栖息地的若干作用与动物种群演化的关系”的有关研究计划。本书虽是余近年来主要研究成果的小结,然而还是得意的少、不满的多。盖因作者学识浅薄,时间亦仓促而已。挟泰山以超北海,非不为也,是不能也。由于本书属于前沿性研究,及作者水平所限,难免有许多谬误和不当之处,敬请读者不吝赐教,不胜感激。

全书共七章,其中第一章是关于动力系统基本知识,第二章是关于单物种种群动力模式,第三章是关于2-物种种群动力系统,第四章是关于 Tilman n -种集合种群动力模式,第五章是关于普适自治 n -种集合种群动力模式,第六章是关于普适非自治 n -种集合种群动力模式,第七章是关于检验的讨论。南京师范大学博士研究生刘会玉参加了第六章的部分研究工作,博士研究生齐相贞参加了第四章第六节和第五章第一节的部分研究工作,博士研究生刘钦普教授参加了第六章第三节的研究工作,刘红玉教授参加了第六章第四节的部分研究工作,博士研究生梁仁君副教授参加了第三章第三节和第四节的部分研究工作,硕士研究生谢正磊参加了第五章第二节的部分研究工作。博士研究生梁仁君副教授和硕士研究生陈玲玲参加了校稿工作。感谢本研究小组所有成员的支持和劳动! 美国 University of California 的 Larry Li 教授一直关心、支持本书的撰写与出版,谨此对 Larry Li 教授表示衷心的感谢!

本书是由国家自然科学基金资助项目(40371108)和国家“十五”“211”工程重大项目“不同时空尺度环境演变和生态建设”联合资助,特此说明。

林振山

2006年1月于契阔斋

目 录

前 言

第一章 动力系统基本知识	1
§ 1 线性动力系统与非线性动力系统	1
1.1 线性动力系统与非线性动力系统	1
1.2 线性动力系统和非线性动力系统的数学描述	2
1.3 线性动力系统和非线性动力系统的特点	3
§ 2 相空间和定态	3
2.1 相空间和相平面	3
2.2 定态	4
§ 3 稳定性分析理论	5
3.1 线性扰动方程	5
3.2 平衡态(系统)的稳定性	7
3.3 奇点(平衡态)的分类	8
§ 4 随机动力学基本理论	11
4.1 Langevin 方程	11
4.2 Fokker-Planck 方程	12
第二章 单物种种群动力模式	14
§ 1 指数增长模式	14
§ 2 种内竞争模式	16
2.1 环境容量限制模式	16
2.2 Logistic(Verhulst)模型	17
§ 3 再生资源管理与开发模型	21
3.1 Schaefer 资源开发模型	21
3.2 最大持续收获量的捕捞策略	22
3.3 最大经济效益的捕捞策略	23
3.4 非线性二次捕捞	24
§ 4 普适虫口模式	28
4.1 普适最大持续生产量(MSY)模式	28
4.2 具有捕杀(捞)、迁移的普适虫口模式	29

§ 5 生态-地学建模的动力学机制分析	30
5.1 $f=0$	31
5.2 $F=0$	32
5.3 耦合系统	32
§ 6 一维离散虫口动力系统	33
6.1 离散动力系统的不动点	34
6.2 不动点的稳定性	34
6.3 分岔过程	35
§ 7 三次随机虫口模式	39
7.1 模式的建立	39
7.2 定态的概率分布	40
7.3 任意时刻概率 $P(N, t)$ 的分布	43
§ 8 非 Allee 与 Allee 哺乳种群系统的最大持续生产量	44
8.1 不同形状参数下非 Allee 种群增长模型的一些极值	45
8.2 d 取极大值时 Allee 系统的最大持续产量	48
8.3 不同形状参数下 Allee 系统的一些极值	49
§ 9 单种群的空间扩散、传播模式	50
9.1 一维无源扩散虫口模式	50
9.2 二维无源扩散虫口模式	52
9.3 一维有源扩散虫口模式	52
9.4 一维普适有源扩散传播方程	53
第三章 2-物种种群动力系统	54
§ 1 竞争模型	54
1.1 Volterra 竞争共存第一模式	54
1.2 Volterra 竞争共存第二模式	55
1.3 平等竞争模式	57
§ 2 浮游植物和浮游动物总量变化的平衡态问题	60
2.1 准三分子生物链模型	61
2.2 平衡态及其稳定性分析	62
2.3 空间定态耗散结构的分歧级数解	65
§ 3 狼-羊-草竞争模式	67
3.1 模式	67
3.2 关于平衡态的讨论	68
3.3 动力预测	69
§ 4 两个种群对两种资源的竞争	71

4.1	两种群对两种指数增长资源的竞争模式	71
4.2	两种群对不同斑块(patch)上单一资源的竞争	73
4.3	廊道对种群发展的影响	75
4.4	两种群对两种线性增长资源的竞争模式	78
第四章	Tilman n-种集合种群动力模式	79
§ 1	回顾	79
1.1	岛屿生物地理学	79
1.2	集合种群(meta-population)与 Levins 模式	80
1.3	集合种群(meta-population)的分类	81
§ 2	Tilman n -种集合种群模式	81
§ 3	第一类灭绝机制及其演化过程	85
3.1	第一类灭绝机制	85
3.2	第一类灭绝种群数的阈值	85
3.3	第一类灭绝机制的演化过程与特点	88
3.4	偶数-奇数对称律和奇数-偶数对称律	91
3.5	奇数种群与最强种群的协同退化	93
§ 4	第二类灭绝机制及其演化过程	95
4.1	第二类灭绝机制	95
4.2	第二类灭绝的种群数	97
§ 5	灭绝序	98
5.1	灭绝序	98
5.2	种群多样性的预测	98
5.3	q 、 D 的等价性	102
§ 6	生态序谱	102
6.1	生态位	102
6.2	平衡态的生态序与生境地毁坏率和种群结构的关系	103
6.3	生态序谱	113
6.4	生境变化集合种群多样性模型	116
6.5	应用与检验	118
§ 7	n -种集合种群的多样性与平衡态理论	122
7.1	种群多样性平衡态理论的基本方法	122
7.2	种群多样性不变的基本判据	125
7.3	热带雨林物种多样性减少的实际检验	127
7.4	景观时间异质性的动力学机制	127

第五章 普适自治 n-种集合种群动力模式	129
§ 1 外来种入侵的不确定性动态模拟	129
1.1 物种共存模型	130
1.2 外来种入侵干扰模型	131
1.3 外来种入侵失败	132
1.4 入侵物种演化中的不确定性	132
§ 2 基于生境地(恢复)扩展的 n 种集合种群演化模式	135
2.1 问题的提出	135
2.2 基本假设和模式	136
2.3 准第一类种群灭绝机制	136
2.4 协同进化与协同退化	140
2.5 生境地增加下物种多样性的预测	140
§ 3 基于幂指数形式的 n 种集合种群动力模式	143
3.1 模式	143
3.2 $d < 1$ 时,种群灭绝数与栖息地(生境地)毁坏率的关系	146
3.3 剩余环境容量幂指数 d 的物理意义	147
3.4 种群灭绝与栖息地(生境地)毁坏的一个基本定律	149
3.5 栖息地毁坏率的变化与种群灭绝数的变化	149
3.6 种群多度的预测	151
§ 4 普适 n 种集合种群动力模式及若干假设	154
4.1 六类普适 n 种集合种群的动力学模式	154
4.2 6 种基本假设	155
4.3 普适自治 n 种集合种群动力模式与普适非自治 n 种集合种群动力模式	156
4.4 第三类灭绝机制	156
第六章 普适非自治 n-种集合种群动力模式	160
§ 1 多时间尺度集合种群演化动力模式	160
1.1 多时间尺度集合种群演化动力模式	160
1.2 种群多样性对人类瞬间大规模毁坏景观的响应	161
1.3 种群多样性对人类持续毁坏栖息地的响应	163
1.4 种群多样性对人类周期性活动的响应	165
1.5 种群多样性对不同强度的周期性人类活动的响应	169
1.6 种群多样性变化的预测研究	169
§ 2 洪湖湿地生境毁坏对水鸟种群多样性的影响	171
2.1 模式	171

2.2 参数值	172
2.3 数值模拟与分析	173
§ 3 内蒙古羊草草原优势物种生产力对气候变化的响应	175
3.1 草原优势物种生产力对气候变化的响应模型	176
3.2 临界温度变化率	177
3.3 模拟与检验	178
§ 4 我国的野外丹顶鹤——活着的灭绝种群(活死者)	180
4.1 观测资料	181
4.2 人类活动影响下具有 Allee 效应的非自治种群动态模式的研制	181
4.3 数值模拟与预测	184
§ 5 多时间尺度集合种群的空间格局演化	186
5.1 元胞自动机	186
5.2 万年尺度生境地毁坏对物种多样性的影响	188
5.3 万年尺度生境地毁坏下物种种群分布格局预测	189
5.4 物种种群动态对百年尺度生境地部分毁坏的响应	190
5.5 百年尺度生境地部分毁坏下物种种群格局预测	191
5.6 讨论	192
第七章 关于检验的讨论	193
§ 1 预测误差的三大因素	193
§ 2 浑沌	194
参考文献	197
作者简介	207

第一章 动力系统基本知识

§ 1 线性动力系统与非线性动力系统

1.1 线性动力系统与非线性动力系统

任何学科的动力学研究(如天气动力学、气候动力学、海洋动力学)重要的一步是建立数学模型,通过建模来较逼真地描写客观动力系统。要做到这一点,最为关键的就是关于相互作用的描述,包括系统内部的相互作用、系统与外部的相互作用,以及系统对这些作用的响应和反馈。关于相互作用的描述,通常可分为线性和非线性两大类。线性描述的就是所谓的线性动力系统,非线性描述的就是所谓的非线性动力系统。

线性动力系统对客观动力系统的描写是近似的,往往只适用于描写系统局部和短时的行为,其特点就是数学上的简单和物理上的一目了然。

非线性动力系统对客观动力系统的描写是较客观的和全局性的,不仅可以描写全空域,还可以描写全时域的行为。其代价就是模式上的复杂带来了数学求解的困难,大部分非线性模式是无法求出数学的解析解的。为了解决这个矛盾,稳定性分析理论应运而生。而在非线性科学诞生之前,人们大多用线性模式来近似研究、处理非线性的客观动力系统。

在客观世界里,非线性作用和非线性现象是普遍的,而线性作用和线性现象则是非线性作用和非线性现象在极端条件下的特例。

例 1: 大鱼吃小鱼

从局部和短时间来看,大鱼吃小鱼是一线性现象或线性行为,被吃的小鱼死了,吃了小鱼的大鱼长大了。从时、空局部来看,小鱼密度线性减少,大鱼密度线性成长(或增加),线性理论还是有用的。但对整个系统的长期演化来说,如果根据上述的线性作用来看这个简单的群落,不要经过太长的时间后,小鱼将灭绝,而小鱼灭绝的结果必将导致大鱼的灭绝。所以从全局出发,从种群演化和群落演替的长时间来看,线性作用必将导致群落里所有的种群全部灭绝。显然,这是不真实的。在客观生物界里,由于生物链(网)的非线性制约,在小鱼数量减少到一定的量(不能满足所有的大鱼都有足够的食物)时,由于种内竞争,大鱼的数量将减少,而大鱼数量的减少,将使小鱼的数量有所增加,从而达到一个稳定的状态。正是群落内部这种非线性的反馈作用,才保障了生物界强弱共存;尽管在短时间来看是生死冤

家,但在长时间来看却是互为生存前提。

例 2: 普通光束和相干光的叠加

普通光束即非相干光的叠加是一线性现象,其光强遵守线性叠加原理,即代数叠加

$$I = I_1 + I_2 \quad (1.1)$$

普通光束即非相干光的叠加结果是一均匀的光强分布。

而位相差为 α 的两束相干光的叠加(如光的干涉)是一非线性现象,其光强遵守非线性叠加原理,即矢量叠加

$$I = I_1 + I_2 + 2I_1 I_2 \cos \alpha \quad (1.2)$$

相干光的叠加结果是一非均匀的光强分布。如果两束相干光的强度相等,都是 I_0 ,那么叠加后的光强分布是从零到 $4I_0$ 之间的非均匀分布。

1.2 线性动力系统和非线性动力系统的数学描述

根据牛顿第二定律,当质量为 1 个单位($m=1$)的物体受到力 F 的作用,其运动方程为

$$F = ma = a = \frac{dv}{dt} \quad (1.3)$$

如果把速度 v 延伸为广义的物理量 x_i ,把 F 延伸为导致物理量 x_i 随时间变化的广义作用力 f ,则可用以下的微分方程来表示普适的动力系统

$$\frac{dx_i}{dt} = f(\beta_k, x_i, x_j) \quad (1.4)$$

式中 β_k 为参数族。

如果空间是均匀的

$$\nabla x_i = 0 \quad (1.5)$$

对于任意的动力系统,只要 f 是线性(关于 x_i 或 x_j 的一次幂)函数,那么系统(1.4)就是线性动力系统。如果 f 是一非线性函数,那么系统(1.4)就是非线性动力系统。

如果空间不均匀

$$\nabla x_i \neq 0, \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla x_i = f(x_i, x_j) \quad (1.6)$$

即个别变化=局地变化+平流项。

当广义速度 v 是不均匀的(是空间的函数),那么 $\vec{v} \cdot \nabla x_i$ 是一非线性项;不管 f 是否为线性函数,动力系统(1.4)都是非线性系统。如果广义速度 v 是均匀的

(常数), 而且 $\vec{v} \cdot \nabla x_i$ 是一线性项, 那么, 当 f 是线性函数时, 系统(1.4)是一线性系统; 如果 f 是一非线性函数, 系统(1.4)则是一非线性动力系统。

1.3 线性动力系统和非线性动力系统的特点

(1) 线性动力系统具有以下显著特点:

- a. 均匀性(空间分布均匀、相互作用等权重);
- b. 独立性(代数叠加律);
- c. 可逆性。

所谓可逆性, 指的是当 $t \rightarrow -t$, 物理规律或结果仅变号而形式、分布不变。

(2) 非线性动力系统具有以下显著特点:

- a. 非均匀性(空间分布、相互作用的方式、效应、结果随时间、地点条件而变);
- b. 相干性(各要素丧失其独立性, 遵守矢量叠加原理);
- c. 不可逆性(空间不均匀所至; 各要素的作用和重要性不同), 如生物进化、天气演变、地球自转等演化行为的不可逆性;
- d. 存在支配与从属、控制与反馈、策动与响应等对立矛盾的两方面。

§ 2 相空间和定态

2.1 相空间和相平面

所谓的相空间, 指的是用状态变量 $\{x_i\}$, $i=1, 2, \dots, n$ 支撑起来的抽象的物理空间, 也称为 Hilbert 空间。它不同于真实的 3 维位置空间 $\vec{r}$ 以及真实的 4 维时间-空间 $t-\vec{r}$ 。主要差别在于相空间是想象和抽象的, 是非现实的, 它的维数可以是有限的 n 维(即所研究的对象有 n 个变量)或无穷维。此外, 相空间的坐标还可以代表任意一个状态变量或状态参量的某个分量, 因而相空间的含义就更为广义了。

构成相空间的状态变量是任意的, 可以是位置、速度、温度, 也可以是生殖率、虫口密度等。引入相空间的目的就是能直观地描写状态的运动和系统的拓扑结构。

由任意二个状态变量支撑起来的抽象的物理空间(抽象平面)叫做相平面。

我们可以把任意一个二阶非线性微分方程

$$f(x, v) = ma \quad (1.7)$$

改写为

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = f(x, v) \\ \frac{dx}{dt} = v \end{cases} \quad (1.8)$$

如果把 $f(x, v)$ 看成是作用在单位质量 ($m=1$) 上的广义力, 那么 (x, v) 则分别表示系统的广义位置和广义速度。由于 x 和 v 刻画了该系统任一时刻的状态, 因此成为“相”。而由状态变量 $x-v$ 所支撑的广义空间就叫做相空间, 因为是 2 维的, 我们把广义平面 $x-v$ 叫做相平面。

为方便起见, 我们用 y 来代替 v , 那么式 (1.8) 可以写成以下的二元 (以后称为维, 广义维) 动力方程组

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dx}{dt} = y \end{cases} \quad (1.9)$$

式 (1.9) 更为普遍的形式是二维自治动力系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (1.10)$$

所谓自治动力系统, 就是方程右边函数 $f(x, y), g(x, y)$ 都不显含自变量 t 。反之, 如果 $f=f(x, y, t), g=g(x, y, t)$ 则对应于非自治动力系统。

在 $x-y$ 相平面里, 向量场

$$w(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

直观地描写了系统的演化行为。该向量场在相空间里表现为一族带箭头方向的曲线, 即相轨道, 或称相速度流 [$w(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$]。每一条相轨道都由无穷多的相点所组成。由于运动是有方向的, 所以相点不仅代表系统某时刻的相位置, 还表示相流的方向 (相轨道的切线方向)。

在相空间 (平面) 里, 系统的状态由其位置和运动方向惟一地确定了, 因此相空间里的相点与系统的状态是惟一对应的。一个相点对应于一个状态; 反过来, 一个状态可以惟一地用一个相点来表示。

2.2 定态

所谓定态, 指的是在一定参数下不随时间变化的态, 也就是在相空间里静止不动的点, 即满足以下条件的点

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x} = 0 = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = \dot{y} = 0 = g(x, y) \end{cases} \quad (1.11)$$

定态的物理意义是指相空间广义相速度为零的点 (一个或多个), 因为广义速

度为零,系统是静止的(所以叫做“定”);也可理解为 $t \rightarrow \infty$ 时,系统最终到达的状态。

由于式(1.11)是一代数方程组,可以容易求出其解: $(x_{0i}, y_{0i}; i=1, 2, \dots, n)$ 。

在动力学定性研究中,“定态”是一个非常重要的概念。从某种意义上说,知道了系统的定态的个数和定态的各自特性,我们就基本知道了系统的演化特性和物理场的空间分布(拓扑结构)。而求定态的过程,则是将一个复杂甚至无法求解解析的微分方程组转化为求简单、可解的代数方程组。这在数理分析史上是一个飞跃。

在多数情况下,还常常把满足式(1.11)条件的解的态叫做平衡态,尽管过去习惯把稳定的定态才称为定态的。在本书里,定态就是平衡态,两者是同一个态。至于定态的稳定与否,则分别用稳定的定态和不稳定的定态来表示。在数学上,还把满足式(1.11)条件的解的态叫做奇点。奇点的“奇”就是“奇怪和不真实”。因为式(1.11)的左边为一组导数等于零的方程,导数等于零就意味着没有确定的切线方向,所以从数学角度来看,所有满足式(1.11)的解的点(即定态)可以有任意的切线方向。换句话说,在任意一个定态上可以存在无穷多的轨线,这显然违背了状态与相点惟一对应的惟一性定理,所以定态是不真实的态,是“奇怪”的。

§ 3 稳定性分析理论

3.1 线性扰动方程

状态(定态)的稳定性,是指系统不随参数或物理量的微小涨落而远离该态。

假设系统的初态为某一定态 (x_0, y_0) , 给系统一个扰动 $(\delta x, \delta y)$, $(\delta x, \delta y) \ll (x_0, y_0)$, 考察系统是否会远离该定态。

扰动后的状态为

$$\begin{cases} x = x_0 + \delta x \\ y = y_0 + \delta y \end{cases} \quad (1.12)$$

所谓的稳定性分析,就是研究该扰动 $(\delta x, \delta y)$ 是否随时间放大或衰减。如果经过充分长的时间后,扰动 $(\delta x, \delta y) \rightarrow 0$, 系统将回到原来的初态 $(x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0)$, 则称该定(初)态是稳定的。如果扰动 $(\delta x, \delta y)$ 不随时间的增大而衰减并趋于零反而增大,那么经扰动后的状态 (x, y) 将随时间的增加而远离初态 (x_0, y_0) 。此时,我们称该定(初)态是不稳定的。

因此,稳定性的研究实质就是考察状态的微小偏离是否被有效放大,或扰动 $(\delta x, \delta y)$ 是否趋于零。

$$\text{考察动力系统} \quad \frac{dx}{dt} = ax + bx^2 = f(x) \quad (1.13)$$

假设系统(1.13)的某一定态为 x_0 , 今给系统一个扰动 δx , ($\delta x \ll x_0$), 使得系统由原来的定态 x_0 偏离为 $x = x_0 + \delta x$. 将 $x = x_0 + \delta x$ 代入式(1.13)的右边, 并对右边的 $f(x)$ 进行泰勒展开, 展开的参考点为某定态 x_0 . 由于扰动 $\delta x \ll x_0$ 为一小量, 我们只取至一阶小量

$$\frac{dx_0}{dt} + \frac{d\delta x}{dt} = f(x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} \delta x + \dots \quad (1.14)$$

由于

$$\frac{dx_0}{dt} = f(x_0) \quad (1.15)$$

我们用泰勒展开法求得以下线性扰动方程

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = a_{11} \delta x \quad (1.16)$$

式中

$$a_{11} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_{0i}} = a + 2bx_{0i} \quad (1.17)$$

其中 x_{0i} ($i=1, 2$) 是动力系统(1.13)的两个定态。

考察二维(元)(这里的维, 指的是广义相空间或物理空间的维数, 下同)非线性动力系统(1.10)的一个定态 (x_0, y_0) 。

扰动后的状态为

$$\begin{cases} x = x_0 + \delta x \\ y = y_0 + \delta y \end{cases} \quad (1.18)$$

将式(1.18)代入式(1.10)并进行泰勒展开, 由于扰动 $(\delta x, \delta y) \ll (x_0, y_0)$ 为一小量, 我们只取泰勒展开至一阶, 从而有

$$\frac{dx_0}{dt} + \frac{d(\delta x)}{dt} = f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0, y_0} \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0} \delta y \quad (1.19)$$

$$\frac{dy_0}{dt} + \frac{d(\delta y)}{dt} = g(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{x_0, y_0} \delta x + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_{x_0, y_0} \delta y \quad (1.20)$$

由于

$$\frac{dx_0}{dt} = f(x_0, y_0), \quad \frac{dy_0}{dt} = g(x_0, y_0) \Rightarrow$$

$$\dot{\delta x} = \frac{d(\delta x)}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0, y_0} \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0} \delta y = a_{11} \delta x + a_{12} \delta y \quad (1.21)$$

$$\dot{\delta y} = \frac{d(\delta y)}{dt} = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{x_0, y_0} \delta x + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_{x_0, y_0} \delta y = a_{21} \delta x + a_{22} \delta y \quad (1.22)$$

微分方程组(1.21)~(1.22)可以写成

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta x} \\ \dot{\delta y} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

所以,非线性动力方程组(1.10)的扰动方程(1.23)是一线性微分方程组,这主要是由于我们在进行泰勒展开时只取到一阶所致。

其中雅可比矩阵

$$J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (1.24)$$

各矩阵元为

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0, y_0} &= a_{11}, \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0} = a_{12} \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{x_0, y_0} &= a_{21}, \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_{x_0, y_0} = a_{22} \end{aligned} \quad (1.25)$$

下角标 (x_0, y_0) 代表任意的定态或平衡态。一个系统如果有多个定态,则每一个定态都有一个对应的雅可比矩阵和扰动方程, n 个定态就有 n 个扰动方程和 n 个雅可比矩阵。

特例:对于一元(维)动力系统,因为 $f=f(x)$ 只是 x 的函数,而且 $g=0$,所以

$$a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0 \quad (1.26)$$

$$J = a_{11} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0} \quad (1.27)$$

3.2 平衡态(系统)的稳定性

我们知道线性微分方程

$$\frac{dX}{dt} = aX$$

的解为

$$\int_{X_0}^X \frac{dX}{X} = \int_0^t a dt; X = X_0 e^{at} \quad (1.28)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{\delta x} \\ \dot{\delta y} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \delta x \sim e^{at} \\ \delta y \sim e^{at} \end{matrix} \quad (1.29)$$

所以,线性扰动方程的解的形式是指数形的。

由于 $\omega > 0$,扰动随时间增大; $\omega < 0$,扰动随时间减少。所以 ω 的正负决定了系统(定态)的稳定与不稳定。而 ω 的实、虚数则决定系统定态的物理性质和空间的拓扑结构,如系统的定态是焦点还是结点等等。