



高考早知道 学习真需要



新考纲
新教材

高二同步必备

与高考零距离

5年高考 3年模拟

WUNIANGAOKAO SANNIANMONI

高二数学(上)

与最新版考纲全程对接 与最新人教版教材配套

为什么, 5·3连续两年位居北京西单图书大厦、王府井书店高考畅销书排行榜第一?

为什么, 5·3连续两年成为全国百万名校师生的首选?

北京四中特级教师徐克兴如此评价: 5·3实为高考科学备考领军之作, 集学考之精粹, 成名世之奇书, 有助于迅速提高考试成绩。



刮涂层 辨真伪 中奖奖
学习更有趣 考试更容易

首都师范大学出版社



高考早知道 学习真需要



新考纲
新课标

高二同步必备

与高考零距离

5年高考 3年模拟

WUNIANGAOKAO SANNIANMONI

高二数学(上)

- 丛书主编: 曲一线
- 丛书策划: 董凤举
- 专家顾问: 徐克兴 乔家瑞 齐平昌 洪安生 刘振贵 王永惠 康振明 李秉国 王树声
- 本册主编: 段记超
- 副主编: 钟本华 徐卫东 吕丁学
- 编委: 罗学平 许晓磊 罗增交 郑圣烽 赵子义 张登军 徐学刚 李合生 焦长兴
岳雪普 李斌 刘现增 张纪斌 黄连杰

首都师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

5 年高考 3 年模拟. 高二数学/曲一线主编;段记超分册主编.
—北京:首都师范大学出版社,2006.5
ISBN 7-81064-811-X

I. 5... II. ①曲...②段... III. 数学课—高中—习题
IV. G613

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 038227 号

5 年高考 3 年模拟

GAO ER SHU XUE

高二数学(上)

丛书主编 曲一线

丛书策划 董凤举

执行策划 路颖

责任编辑 张玉霞

责任录排 高俊英

本册主编 段记超

责任校对 姜开红 孙悦华

插图制作 范明磊 张凤亮

首都师范大学出版社出版发行

地 址 北京西三环北路 105 号

邮 编 100037

电 话 68418523(总编室) 68982468(发行部)

网 址 www.cnup.cnu.cn

E-mail cnup@mail.cnu.edu.cn

北京市铁成印刷厂印刷

全国新华书店发行

版 次 2006 年 5 月第 1 版

印 次 2006 年 5 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 7-81064-811-X/G·613

开 本 890×1240 毫米 1/16

印 张 14

字 数 450 千

印 数 0 001—10 000 册

定 价 17.00 元

版权所有 违者必究

如有质量问题 请与出版社联系退换

传承文明



创造文化

曲一线象征一种完美 柔韧包容 直率真诚

曲一线体现一种聪慧 能屈能伸 睿智机灵

曲一线蕴涵一种哲理 刚柔并济 愈挫愈勇

曲一线表明一种态度 一心一意 铸造成功

曲一线代表一种理念 百折不挠 永远前行

曲一线有

奖

购书正在进行

凡购买曲一线科学备考系列图书，均有机会获得曲一线赠送的系列奖品。

刮涂层 辨真伪 中大奖

本次活动奖项设置如下：

奖项	奖品	数量
一等奖	数码相机（价值3000元）	5
二等奖	电子词典（价值1000元）	30
三等奖	Mp3一台（价值500元）	100

防伪中奖查询方法

第一种：购书后，刮开书上的全国电码防伪标签，拨打020—61286315按语音提示连续输入18位密码进行操作。

第二种：以18位密码为内容发送手机短信至95003655等待回信。

第三种：登陆曲一线高考网www.exian.cn在“防伪中奖查询”窗口输入18位密码，点击查询按钮。

注意

1. 查询后如果提示为非正版图书或为中奖号码，请及时拨打电话010—63721419进行核实登记。
2. 封面无防伪标志或提示为非正版图书，请将该书寄至北京市丰台区富丰路4号工商联科技大厦A座2104 曲一线收（邮编100070），您将及时得到正版图书并获得意外的奖励。
3. 本次活动最终解释权归曲一线所有。
4. 全国电码防伪标签撕毁或涂改无效。

团购

上门订书
服务电话

010-63735353 13311185353

邮购

邮购电话：010-63721441

邮编：100070

邮购地址：北京市丰台区富丰路4号工商联科技大厦A座2104 曲一线收

邮购说明：全部免收邮资，10本以上八折优惠！

注意事项：汇款单上请务必写清详细地址、邮编和联系电话，以便图书迅速准确地送达。

2007A版《5年高考3年模拟》·学生用书（人教大纲版）

语文	定价39.00	文数	定价39.00	理数	定价39.00	英语	定价39.00	物理	定价39.00
化学	定价39.00	生物	定价29.00	政治	定价29.00	历史	定价39.00	地理	定价29.00

2007A版《5年高考3年模拟》·教师用书（人教大纲版）

语文	定价60.00	文数	定价60.00	理数	定价60.00	英语	定价60.00	物理	定价60.00
化学	定价60.00	生物	定价60.00	政治	定价60.00	历史	定价60.00	地理	定价60.00

2007版《5年高考3年模拟》（山东广东宁夏海南四省专用）

语文	定价39.00	文数	定价39.00	理数	定价39.00	英语	定价39.00	物理	定价37.00
化学	定价37.00	生物	定价32.00	政治	定价35.00	历史	定价35.00	地理	定价32.00

《知识清单》（第2次修订）

语文	定价25.00	数学	定价20.00	英语	定价23.00	物理	定价20.00	化学	定价22.00
生物	定价18.00	政治	定价18.00	历史	定价13.00	地理	定价18.00	英语必考词3500	定价30.00

《5年高考3年模拟》高二同步系列（人教大纲版）

语文	定价18.00	数学	定价17.00	英语	定价18.00	物理	定价17.00	化学	定价17.00
生物	定价17.00	政治	定价13.00	历史	定价16.00	地理	定价17.00		

《5年高考3年模拟》高一同步系列（人教大纲版）

语文	定价15.00	文言文	定价15.00	数学	定价15.00	英语	定价15.00	物理	定价14.00
化学	定价14.00	政治	定价13.00	历史	定价13.00	地理	定价13.00		

2007版《高考1号文件》

语文	定价25.00	文数	定价25.00	理数	定价25.00	英语	定价25.00	物理	定价22.00
化学	定价22.00	生物	定价22.00	政治	定价18.00	历史	定价18.00	地理	定价18.00

2007B版《5年高考3年模拟》

语文	定价39.00	文数	定价32.00	理数	定价39.00	英语	定价39.00	物理	定价32.00
化学	定价32.00	生物	定价29.00	政治	定价29.00	历史	定价29.00	地理	定价32.00
文综	定价32.00	理综	定价29.00	高考话题作文	定价29.00	高考英语听力（含光盘）			定价29.00

轻轻地告诉你

Qingqing de gaosu ni

朋友，我正看着你呢，你也正看着我。

我不是一幅色彩缤纷、线条优美的画卷，也许不能让你感受生活的美妙、世界的神奇；

我不是一曲余音绕梁、三月不绝的仙乐，也许不能让你领悟高山的淳朴、流水的真挚。

我只是一行行前人的足迹，引领你登上书山的峰顶；

我只是一句句殷切的叮咛，提醒你拾起遗漏的点滴。

啊，朋友！

其实，我是一页页在久久期待，期待着能与你晤谈的文字。

我给予你的，是需要你辛勤劳作的土地。

我爱你，我对所有的学子充满敬意：你最辛苦，因此你也最美丽。

我爱你，你的勤奋、刻苦、拼搏、进取，将成为我永久的记忆。

我想对你说，拥抱明天，需要你学会做人、学会学习、学会生存，也需要你付出百倍努力，学会考试！

我想对你说，考试就意味着竞争，考试就意味着较量，考试就意味着选拔，考试就意味着优胜劣汰。

考试需要有健康的体魄和挺拔的心理，考试更需要有坚韧的毅力和顽强的斗志。

我想对你说，我可能有点丑陋，只是一本毫无表情的普普通通的书，但我的字里行间，流淌着无数老师的良苦，蕴蓄着无数专家学者的睿智。

知识清单

这是千万老教师的经验，这是无数成功者的累积。这是最系统的归纳，这是最科学的设计。将学科知识设计成习题，便于你在练习中实现对学科基本概念、基本知识的理解和记忆，实践证明，这是进行基础训练的最好方式。你要记死，不要死记。

教材点拨

这是对教材精华的浓缩，这是对教材的精讲精析，这是点金拨雾的手指。当你透彻地掌握了教材知识，你就能以不变应万变，从容地面对每一次考试！

练习全解

这是对课后习题的精彩解析，这是一个无声的老师在陪伴着你。课后练习，这是一切试题的题源，高考题模拟题一般都是课后练习的变式，你要精心地去练习，探索个中就里！

五年高考

这是新高考与新教材的无缝对接。高考试题，是多少命题专家的心血啊，是多少命题学者的汗滴。这是智慧的结晶，这是精心的设计，这是苦心的创作，这是优美的诗句。洞悉高考试题及命题规律就等于抓住了上帝的一只手，就等于揭开了上帝手中的谜底！

三年模拟

这是全国一线教师团结起来跟命题人的较量，是命题人不得不阅读的重要信息，也是命题人灵感的发源地。

Qingqing de gaosu ni

整合提升 这是检测自我的后花园，这是提升能力的试金石，这是体味成功的目的地。

智力背景 这是知识的拓展，这是能力的延伸，这是智慧的加油站，这是高考的动力臂。如果拥有这个支点，你将会拥有解决所有问题的妙计。

我想对你说，我正迫不及待地走向你。因为你拥有了我，我就拥有了你。你拥有了我，你就多了一份慰藉；我拥有了你，我就多了一份欣喜。

我想对你说，请把我介绍给所有认识你的你，你的成功，你的终生受益是我的唯一。

我想对你说，我虽不是什么“灵丹妙药”，但如果你掌握了我给你讲的应试技巧，你却能“妙手回春”。

我虽不是什么“金钥匙”，却能开启你通往理想王国的大门。

我虽不是什么“救生符”，却是你在短时间内走向成功的阶梯。

我想对你说，军号已经吹响，钢枪正需擦亮，高考正向你走来，东方已露出曙光。时间，不允许你再犹豫；空间，不允许你再逃避。

你和所有人一样都站在同一条起跑线上，既然，天才不常有，蠢才也罕见，既然，智慧就在你的脑袋里，那么，面对高考，你只有充满自信和乐观，决不能留下遗憾和叹息。

我想对你说，不再回头的，不只是那古老的辰光，也不只是那些个夜晚的群星和月亮，还有你的青春在流逝。青春，这是上帝赋予你的无限高贵的礼品，青春充满着力量、信心和希冀。

请把烦恼和无奈抛给昨天，面对挑战，无论是输是赢，你都须全身心地投入，向着既定的目标冲刺！

我想轻轻地告诉你，所有的人，都在祝福着你。

你抬头向上看，上面写着，我永远祝福你；你回首向后看，后面写着，我永远祝福你。这一点毫不怀疑。

朋友，你正看着我呢，我也正看着你。

Contents

目录

第六章 不等式 001

6.1 不等式的性质 001

6.2 算术平均数与几何平均数 008

6.3 不等式的证明 016

6.4 不等式的解法举例 024

6.5 含有绝对值的不等式 034

第六章 整合提升 041

第七章 直线和圆的方程 045

7.1 直线的倾斜角和斜率 045

7.2 直线的方程 050

7.3 两条直线的位置关系 057

期中测试 069

7.4 简单的线性规划 071

7.5 曲线和方程 080

7.6 圆的方程 088

第七章 整合提升 099

第八章 圆锥曲线方程 103

8.1 椭圆及其标准方程 103

8.2 椭圆的简单几何性质 113

8.3 双曲线及其标准方程 125

8.4 双曲线的简单几何性质 135

8.5 抛物线及其标准方程 147

8.6 抛物线的简单几何性质 154

第八章 整合提升 164

期末测试 167

答案全解全析 169

Contents

高中数学智力背景

第六章 不等式

一个小数点与一场大悲剧(1)	(001)
一个小数点与一场大悲剧(2)	(002)
一个小数点与一场大悲剧(3)	(003)
一个小数点与一场大悲剧(4)	(004)
动物中的数学“天才”(1)	(005)
动物中的数学“天才”(2)	(006)
麦比乌斯带	(007)
牛顿问题(1)	(008)
牛顿问题(2)	(009)
陈景润(1)	(010)
陈景润(2)	(011)
数学家陈省身(1)	(012)
数学家陈省身(2)	(013)
数学家陈省身(3)	(014)
数学与诺贝尔经济学奖(1)	(015)
数学与诺贝尔经济学奖(2)	(016)
智商低下的数学大师(1)	(017)
智商低下的数学大师(2)	(018)
智商低下的数学大师(3)	(019)
吴文俊	(020)
苏步青的故事(1)	(021)
苏步青的故事(2)	(022)
苏步青的故事(3)	(023)
绞刑架与理发师的故事(1)	(024)
绞刑架与理发师的故事(2)	(025)
数学家巧破杀人案(1)	(026)
数学家巧破杀人案(2)	(027)
数学家巧破杀人案(3)	(028)
数学家巧破杀人案(4)	(029)
伟大的韦达(1)	(030)
伟大的韦达(2)	(031)
韦达的两则趣事(1)	(032)
韦达的两则趣事(2)	(033)
钱学森的故事(1)	(034)
钱学森的故事(2)	(035)
钱学森的故事(3)	(036)
惊人的计算(1)	(037)
惊人的计算(2)	(038)
惊人的计算(3)	(039)
惊人的计算(4)	(040)
中国数学界的伯乐——熊庆来(1)	(041)
中国数学界的伯乐——熊庆来(2)	(042)
中国数学界的伯乐——熊庆来(3)	(043)

博尔思岛上的骑士和无赖	(044)
-------------------	-------

第七章 直线和圆的方程

抽屉原理与电脑算命(1)	(045)
抽屉原理与电脑算命(2)	(046)
抽屉原理与电脑算命(3)	(047)
抽屉原理与电脑算命(4)	(048)
蜂窝猜想(1)	(049)
蜂窝猜想(2)	(050)
蜂窝猜想(3)	(051)
小徒弟巧背圆周率	(052)
检票问题(1)	(053)
检票问题(2)	(054)
数学趣题:河东狮吼	(055)
无理数的发现——第一次数学危机(1)	(056)
无理数的发现——第一次数学危机(2)	(057)
无穷小是零吗?——第二次数学危机(1)	(058)
无穷小是零吗?——第二次数学危机(2)	(059)
无穷小是零吗?——第二次数学危机(3)	(060)
悖论的产生——第三次数学危机(1)	(061)
悖论的产生——第三次数学危机(2)	(062)
悖论的产生——第三次数学危机(3)	(063)
蝴蝶效应(1)	(064)
蝴蝶效应(2)	(065)
1名数学家=10个师的由来	(066)
菲尔兹奖章(1)	(067)
菲尔兹奖章(2)	(068)
哥德巴赫猜想(Goldbach Conjecture)(1)	(069)
哥德巴赫猜想(Goldbach Conjecture)(2)	(070)
等号与不等号(1)	(071)
等号与不等号(2)	(072)
天然不等式	(073)
非欧几何学的创始人	(074)
欧几里得	(075)
盲人数学家欧拉	(076)
嘉当	(077)
计算机之父:阿伦·图灵(1)	(078)
计算机之父:阿伦·图灵(2)	(079)

Contents

计算机之父:阿伦·图灵(3)	(080)	数学谜语	(124)
计算机之父:阿伦·图灵(4)	(081)	数学谜语答案	(125)
计算机之父:冯·诺伊曼(1)	(082)	《周髀算经》简介	(126)
计算机之父:冯·诺伊曼(2)	(083)	诗歌数学题	(127)
计算机之父:冯·诺伊曼(3)	(084)	中国数学在几何学领域的贡献	(128)
难忘母亲的教诲(1)	(085)	毕达哥拉斯定理	(129)
难忘母亲的教诲(2)	(086)	无穷大	(130)
难忘母亲的教诲(3)	(087)	求职记趣	(131)
韩信点兵	(088)	高明的蜂王	(132)
数学家的记忆力(1)	(089)	数字是不会骗人的	(133)
数学家的记忆力(2)	(090)	子午线的长度	(134)
数学家的记忆力(3)	(091)	唐诗中的数学——数字的对比	(135)
程大位及其所著《算法统宗》(1)	(092)	唐诗中的数学——用数字点睛	(136)
程大位及其所著《算法统宗》(2)	(093)	扑克牌中的数学游戏——巧排顺序	(137)
程大位及其所著《算法统宗》(3)	(094)	数学复习窍门(一)	(138)
希尔伯特	(095)	数学复习窍门(二)	(139)
费拉里发现的一元四次方程的解法	(096)	中国古代数学金牌	(140)
萧何月下追韩信	(097)	药品混乱(一)	(141)
脑筋急转弯	(098)	药品混乱(二)	(142)
第一个算出地球周长的人	(099)	杨乐	(143)
数学概念的学习方法(1)	(100)	商高	(144)
数学公式的学习方法(2)	(101)	陈建功	(145)
数学定理的学习方法(3)	(102)	数学名言(一)	(146)
		数学名言(二)	(147)
		蜗牛爬树	(148)
		高中数学学习方法(一)	(149)
		高中数学学习方法(二)	(150)
		过河	(151)
		公鸡归纳法	(152)
		双语数学(一)	(153)
		双语数学(二)	(154)
		著名的“四色问题”(1)	(155)
		著名的“四色问题”(2)	(156)
		著名的“四色问题”(3)	(157)
		数论的发展简况(1)	(158)
		数论的发展简况(2)	(159)
		数学的发源地:古希腊	(160)
		奇书:《几何原本》(1)	(161)
		奇书:《几何原本》(2)	(162)
		奇书:《几何原本》(3)	(163)
		阿基米德(1)	(164)
		阿基米德(2)	(165)
		数学笑话	(166)
		说谎者悖论	(167)
		三角学	(168)
第八章 圆锥曲线方程			
最大与最小的长度单位	(103)		
一家人及警察与犯人	(104)		
鬼谷算	(105)		
鸡兔同笼(1)	(106)		
鸡兔同笼(2)	(107)		
高利贷者破产的故事(1)	(108)		
高利贷者破产的故事(2)	(109)		
厨师烙饼	(110)		
希尔伯特(1)	(111)		
希尔伯特(2)	(112)		
数学趣题:三个乞丐	(113)		
平面解析几何	(114)		
学习方法之联想记忆法	(115)		
阿拉伯数字	(116)		
数字讽刺诗	(117)		
鸳鸯阵	(118)		
你的体型标准吗?	(119)		
苏步青问题	(120)		
数字对联	(121)		
竹片算出的大数目	(122)		
用 π 值作为墓志铭	(123)		

5年 3年模拟

第六章 不等式

6.1 不等式的性质

知识清单

一、不等式的定义

用不等号(“ $>$ ”或“ $<$ ”或“ $\leq$ ”或“ $\geq$ ”)连接两个数(式)所成的式子叫做不等式.

二、两个实数比较大小依据

_____ ; _____ ; _____ .

三、不等式的基本性质

1. 对称性: $a > b \Leftrightarrow b < a$;

2. 传递性: $a > b, b > c \Rightarrow$ _____, 是“放缩法”证明不等式的依据;

3. 移项法则: $a + b < c \Leftrightarrow a$ _____ $c - b$, 是 $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$ 的推广;

4. 去分母法则: 当 $c > 0$ 时, $a > b \Leftrightarrow ac$ _____ bc ; 当 $c < 0$ 时, $a > b \Leftrightarrow ac$ _____ bc .

想一想 下列说法正确吗? 并说明理由.

(1) 如果 $\frac{1}{x} > x$, 那么 $1 > x^2$;

(2) 因为 $x > x - 2$, 所以 $x\sqrt{x-1} > (x-2)\sqrt{x-1}$.

四、不等式的运算性质

1. 加法法则: $a > b, c > d \Rightarrow$ _____ (同向不等式的可加性);

2. 减法法则: $a > b, c > d \Rightarrow a - d$ _____ $b - c$;

3. 乘法法则: $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd > 0$ (两边都是正数的同向不等式的可乘性);

4. 乘方法则: $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n > 0 (n \in \mathbf{N}, n \geq 2)$;

5. 开方法则: $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} (n \in \mathbf{N}, n \geq 2)$.

注 (1) 以上性质、条件与结论的逻辑关系有两种, 即推出关系和等价关系.

推出关系如: $a > b, b > c \Rightarrow a > c$;

等价关系如: $a + b < c \Leftrightarrow a < c - b$.

(2) 应用性质时一定要注意该性质成立的前提条件. 如:

$a > b \Leftrightarrow ac$ _____ bc 需要 _____.

想一想 判断下列说法的正误:

(1) 因为 $a + 8 > 4$, 所以 $a > -4$;

(2) 因为 $3 > 2$, 所以 $3a > 2a$;

(3) 因为 $-1 > -2$, 所以 $a - 1 > a - 2$;

(4) 因为 $ab > 0$, 所以 $a > 0, b > 0$.

教材点拨

一、利用不等式的基本性质证明较简单的不等式

例1 证明: 若 $a > b > 0, c < d < 0, m < 0$, 则 $\frac{m}{a-c} > \frac{m}{b-d}$.

分析 根据式子的结构, 可以利用不等式的基本性质进行证明.

证明 $\begin{cases} a > b > 0 \\ c < d < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > b > 0 \\ -c > -d > 0 \end{cases} \Rightarrow a - c > b - d > 0$

$\Rightarrow \frac{1}{a-c} < \frac{1}{b-d}$.

又 $\because m < 0, \therefore \frac{m}{a-c} > \frac{m}{b-d}$.

点评 本题利用了同向不等式可加性, 同号两数取倒数或不等式两边同乘以某一负数要改变不等号的方向等不等式的性质.

二、利用不等式的基本性质判断某些不等式或命题的正误

这一类题目能够很好地帮助同学们掌握不等式的性质并灵活应用, 在高考中也经常出现.

例2 对于实数 a, b, c , 判断下列命题的真假:

(1) 若 $a > b$, 则 $ac > bc$;

(2) 若 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$;

(3) 若 $a < b < 0$, 则 $a^2 > ab > b^2$;

(4) 若 $a < b < 0$, 则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$;

(5) 若 $a < b < 0$, 则 $\frac{b}{a} > \frac{a}{b}$.

解 (1) 因未知 c 的正负或是否为零, 无法确定 ac 与 bc 的大小, 所以是假命题;

(2) 因为 $c^2 \geq 0$, 所以只有 $c \neq 0$ 时才能正确. $c = 0$ 时, $ac^2 =$

高中数学智力背景

一个小数点与一场大悲剧(1) 1967年8月23日, 前苏联著名宇航员科马洛夫一个人驾驶着“联盟一号”宇宙飞船返航. 当飞船返回大气层后, 科马洛夫无论怎么操作也无法使降落伞打开以减慢飞船的速度. 地面指挥中心采取了一切可能的措施帮助排除故障, 但都无济于事. 经请示中央, 决定将实况向全国人民公布. 电视台的播音员以沉重的语调宣布: “‘联盟一号’飞船由于无法排除故障, 不能减速, 两小时后将在着陆基地附近坠毁. 我们将目睹宇航英雄科马洛夫遇难.”

bc^2 , 所以是假命题;

变式: 若 $ac^2 > bc^2$, 则 $a > b$, 命题是真命题;

(3) $a < b, a < 0 \Rightarrow a^2 > ab; a < b, b < 0 \Rightarrow ab > b^2$, 命题是真命题;

(4) 由性质定理 $a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 命题是真命题;

(5) 例如 $-3 < -2 < 0, \frac{2}{3} < \frac{3}{2}$, 命题是假命题.

$$a < b < 0 \Rightarrow \begin{cases} -a > -b > 0 \\ \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a > -b > 0 \\ -\frac{1}{b} > -\frac{1}{a} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{b}{a}.$$

点评 不等式的性质是证明不等式和解不等式的理论基础, 必须熟练掌握. 还要注意不等式性质定理中的条件是否为充要条件, 不能用充分不必要条件的性质定理理解不等式.

例 3 如果 $a > b$, 则下列各式正确的是 ()

- A. $a \cdot \lg x > b \cdot \lg x (x > 0)$ B. $ax^2 > bx^2$
C. $a^2 > b^2$ D. $a \cdot 2^x > b \cdot 2^x$

分析 本题是在条件“ $a > b$ ”的情况下, 利用不等式的性质, 判断出成立的一个不等式.

解 对于 A: 当 $x > 0$ 时, $\lg x \in \mathbf{R}$, 当 $\lg x \leq 0$ 时, $a \cdot \lg x > b \cdot \lg x (x > 0)$ 不成立, 故应排除 A;

对于 B: $\because x \in \mathbf{R}$, 当 $x = 0$ 时, $ax^2 = bx^2$, $\therefore ax^2 > bx^2$ 不成立, 故应排除 B;

对于 C: $\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, 又由 $a > b$ 可知 $a-b > 0$, 但是 $a+b$ 的符号是不确定的, 因此 $a^2 > b^2$ 不成立, 故应排除 C;

对于 D: 由指数函数的性质可知, $2^x > 0$, 又 $\because a > b$, $\therefore a \cdot 2^x > b \cdot 2^x$ 成立, 故选择 D.

点评 本题综合利用了不等式的基本性质、对数函数的值域、指数函数的性质, 以及“作差法”.

例 4 若 $a < b < 0$, 则下列不等式中, 不能成立的是 ()

- A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ B. $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{a}$
C. $|a| > |b|$ D. $\left(\frac{1}{3}\right)^a > \left(\frac{1}{3}\right)^b$

分析 审题时, 首先要看清楚“不能成立”这个条件, “不能成立”就是对于任何满足条件“ $a < b < 0$ ”的 a, b , 某结论都不成立; 其次要从不等式的性质出发, 做出正确的判断.

解 对于 A: $\because a < b < 0, \therefore ab > 0$ (即 a, b 同号), 因此 $a \cdot \frac{1}{ab} < b \cdot \frac{1}{ab}, \therefore \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, 即 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 可见 A 是必定成立的, 故不能选 A;

对于 C: $\because a < b < 0, \therefore -a > -b > 0$, 从而 $-a = |a|, -b = |b|, \therefore |a| > |b|$ 也一定成立, 故不能选 C;

对于 D: $\because y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 是减函数, $\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^a > \left(\frac{1}{3}\right)^b$, 可见 D 也成立, 故不能选;

对于 B: $\because a < b < 0, \therefore a-b < 0$, 进而 $a(a-b) > 0$. 不等

式 $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{a}$ 两边都乘以 $a(a-b)$, 得 $a > a-b$. 解得 $b > 0$, 这和已知条件 $b < 0$ 矛盾, 故应选择 B.

另外, 本题也可以利用特殊值来帮助我们解决问题, 如不妨令“ $a = -2, b = -1$ ”, 可以很快排除 A、C、D, 所以选 B.

点评 要注意结合已知条件来利用不等式的性质判断不等式是否成立. 另外合理的利用特殊值法与排除法, 可以使某些问题很快“水落石出”.

例 5 $\begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases}$ 成立的充要条件是 ()

- A. $\begin{cases} x+y > 2 \\ xy > 1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x+y > 2 \\ xy > 2 \end{cases}$
C. $\begin{cases} x+y > 0 \\ xy > 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x+y > 2 \\ (x-1)(y-1) > 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{解 } \begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ y-1 > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) + (y-1) > 0 \\ (x-1)(y-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y > 2, \\ (x-1)(y-1) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{即 } \begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases} \text{ 成立的充要条件是 } \begin{cases} x+y > 2, \\ (x-1)(y-1) > 0. \end{cases}$$

点评 不等式的性质, 实质也是一组不等式的基本变换, 在这组不等式的基本变换中, 条件对结论而言, 有的只是推出关系——充分而非必要条件, 有的则是等价关系——充分且必要条件. 证明不等式就是从条件出发进行一系列的推出变换, 而解不等式则是进行一系列的等价变换.

三、比较数(或式)的大小

1. 实数(或式)比较大小依据是 $a > b \Leftrightarrow a-b > 0, a = b \Leftrightarrow a-b = 0; a < b \Leftrightarrow a-b < 0$ (或 $a > 0, b > 0$ 时, $\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a > b$).

方法步骤 作差(商)——变形——判断大于或小于零(大于 1 或小于 1). 关键是变形, 变形的目的在于便于判断正负. 常见的变形有因式分解、配方等.

例 6 已知 $P = 1 + 2x^4, Q = 2x^3 + x^2, x \in \mathbf{R}$, 比较 P 与 Q 的大小.

$$\begin{aligned} \text{解 } P-Q &= 1 + 2x^4 - 2x^3 - x^2 \\ &= 1 - x^2 + 2x^3(x-1) \\ &= (x-1)(2x^3 - x - 1) \\ &= (x-1)(x^3 - x + x^3 - 1) \\ &= (x-1)^2(2x^2 + 2x + 1) \\ &= (x-1)^2[(x+1)^2 + x^2] \geq 0. \end{aligned}$$

$$\therefore P \geq Q.$$

点评 本题通过因式分解之后, 进一步把二次因式 $2x^2 + 2x + 1$ 写成 $(x+1)^2 + x^2$, 这是两个完全平方和的形式, 能判断其符号, 这种方法是比较常用的.

例 7 设 $a > b > 0$, 比较 $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ 与 $\frac{a-b}{a+b}$ 的大小.

分析 利用 $a > b \Leftrightarrow a-b > 0$ 或利用 $a > 0, b > 0$ 时, $\frac{a}{b} > 1$

高中数学智力背景

一个小数点与一场大悲剧(2) 科马洛夫的亲人被请到指挥台, 指挥中心的首长通知科马洛夫与亲人通话. 科马洛夫控制着自己的激动: “首长, 属于我的时间不多了, 我先把这次飞行的情况向您汇报……”. 生命在一分一秒中消逝, 科马洛夫目光泰然, 态度从容, 他整整汇报了几十分钟. 汇报完毕, 国家领导人接过话筒宣布: “我代表最高苏维埃向你致以崇高的敬礼, 你是苏联的英雄, 人民的好儿子……”. 当问及科马洛夫有什么要求时, 科马洛夫眼含热泪: “谢谢, 谢谢最高苏维埃授予我这个光荣称号, 我是一名宇航员, 为祖国的宇航事业献身我无怨无悔!”

$\Leftrightarrow a > b$ 来比较.

$$\begin{aligned} \text{解法一} \quad & \because \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} - \frac{a - b}{a + b} \\ &= \frac{(a^2 - b^2)(a + b) - (a - b)(a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)(a + b)} \\ &= \frac{2ab(a - b)}{(a^2 + b^2)(a + b)} > 0, \\ \therefore \quad & \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} > \frac{a - b}{a + b}. \end{aligned}$$

解法二 由 $a > b > 0$, 得 $|a| > |b|$, $a^2 > b^2$,
 $\therefore a^2 > b^2 > 0$, $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} > 0$.

又 $a - b > 0$, $a + b > 0$, $\therefore \frac{a - b}{a + b} > 0$.

$$\begin{aligned} \therefore \quad & \frac{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}{\frac{a - b}{a + b}} = \frac{(a + b)(a - b)(a + b)}{(a^2 + b^2)(a - b)} \\ &= \frac{(a + b)^2}{a^2 + b^2} = 1 + \frac{2ab}{a^2 + b^2} > 1, \\ \therefore \quad & \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} > \frac{a - b}{a + b}. \end{aligned}$$

点评 比较两个实数的大小,通常利用“作差法”“作商法”或“函数的单调性法”或“媒介法”。“媒介法”是指根据 $a > b$, $b > c$, 则 $a > c$, 以 b 为桥梁,间接地比较 a 与 c 的大小的方法.

2. 要注意分类讨论的思想在比较大小中的应用.

例 8 已知 $a > 0$, 试比较 a 与 $\frac{1}{a}$ 的大小.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & a - \frac{1}{a} = \frac{a^2 - 1}{a} = \frac{(a + 1)(a - 1)}{a}. \\ \therefore \quad & a > 0, \text{ 令 } (a + 1)(a - 1) > 0, \text{ 得 } a > 1, \\ \therefore \quad & \text{当 } a > 1 \text{ 时}, \frac{(a + 1)(a - 1)}{a} > 0, \text{ 此时 } a > \frac{1}{a}; \\ \text{当 } a = 1 \text{ 时}, \quad & \frac{(a + 1)(a - 1)}{a} = 0, \text{ 此时 } a = \frac{1}{a}; \\ \text{当 } 0 < a < 1 \text{ 时}, \quad & \frac{(a + 1)(a - 1)}{a} < 0, \text{ 此时 } a < \frac{1}{a}. \\ \text{综上, 当 } 0 < a < 1 \text{ 时}, \quad & a < \frac{1}{a}; \text{ 当 } a = 1 \text{ 时}, a = \frac{1}{a}; \\ \text{当 } a > 1 \text{ 时}, \quad & a > \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

点评 令 $\frac{(a + 1)(a - 1)}{a} > 0$ 是确认分类标准的关键,是寻找分类标准的常用方法. 本题条件 $a > 0$ 改为 $a < 0$ 时,请读者完成本题.

例 9 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $m > n > 0$, 比较 $A = a^m + \frac{1}{a^m}$ 和 $B = a^n + \frac{1}{a^n}$ 的大小.

分析 采用“作差法”比较它们的大小;在利用指数函数的

单调性时,要注意对底数 a 进行分类讨论.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & A - B = \left(a^m + \frac{1}{a^m}\right) - \left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) \\ &= (a^m - a^n) + \left(\frac{1}{a^m} - \frac{1}{a^n}\right) \\ &= (a^m - a^n) - \frac{a^m - a^n}{a^{m+n}} \\ &= \frac{(a^m - a^n)(a^{m+n} - 1)}{a^{m+n}}. \end{aligned}$$

(1) 若 $a > 1$ 时, $\therefore m > n > 0$, $\therefore a^m > a^n$, $a^{m+n} > 1$,

$\therefore A - B > 0$, 因此, $A > B$;

(2) 若 $0 < a < 1$ 时, $\therefore m > n > 0$, $\therefore a^m < a^n$, $0 < a^{m+n} < 1$,

$\therefore A - B > 0$, 因此, $A > B$.

综上(1),(2)可知,当 $a > 0$ 且 $m > n > 0$ 时,

都有 $A > B$ 成立.

点评 解决本题用的知识点为指数函数的单调性,不等式的性质等,还运用了分类讨论的数学思想和“作差比较法”.

四、求数(式)的取值范围

在解决某些问题时经常会遇到求数(式)的取值范围的问题,在求数(式)的取值范围时一定要严格依据不等式的基本性质进行等价变形,否则会导致范围的扩大或缩小.

例 10 已知 $-6 < a < 8$, $2 < b < 3$, 分别求 $2a + b$, $a - b$, $\frac{a}{b}$ 的范围.

$$\text{解} \quad \because -6 < a < 8, \therefore -12 < 2a < 16.$$

$$\text{又 } 2 < b < 3, \therefore -10 < 2a + b < 19.$$

$$\therefore 2 < b < 3, \therefore -3 < -b < -2.$$

$$\text{又 } -6 < a < 8, \therefore -9 < a - b < 6.$$

$$\therefore 2 < b < 3, \therefore \frac{1}{3} < \frac{1}{b} < \frac{1}{2}.$$

$$(1) \text{ 当 } 0 \leq a < 8 \text{ 时 } 0 \leq \frac{a}{b} < 4;$$

$$(2) \text{ 当 } -6 < a < 0 \text{ 时 } -3 < \frac{a}{b} < 0.$$

$$\text{综合(1)(2)得 } -3 < \frac{a}{b} < 4.$$

点评 要准确运用不等式的性质,如:同向不等式不能相减,同向不等式只有当它的两边都是正数时才能相乘.

五、重难点突破

在求数(式)的取值范围时一定要严格依据不等式的基本性质进行等价变形,否则会导致范围的扩大或缩小. 下面通过例题来分析怎样依据不等式的基本性质进行等价变形,以及“看似正确的解法”出错的原因.

例 11 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$), 满足 $1 \leq f(-1) \leq 2$, $3 \leq f(1) \leq 4$, 求 $f(-2)$ 的取值范围. 下面给出的解法对吗? 如果不对,请说明理由,并把正确的解法写出来.

$$\text{解} \quad \because f(-1) = a - b, f(1) = a + b, \text{ 据题意, 有}$$

$$1 \leq a - b \leq 2, \quad \text{①}$$

$$3 \leq a + b \leq 4. \quad \text{②}$$

高中数学智力背景

一个小数点与一场大悲剧(3) 领导人把话筒递给科马洛夫的老母亲,母亲老泪纵横,心如刀绞,泣不成声.她把话筒递给科马洛夫的妻子.科马洛夫给妻子送来一个调皮而又深情的飞吻.妻子拿着话筒只说了一句话:“亲爱的,我好想你!”就泪如雨下,再也说不出话来了.科马洛夫12岁的女儿接过话筒,泣不成声.科马洛夫微笑着说:“女儿,你要坚强,不要哭.”“我不哭,爸爸,你是苏联的英雄,我是你的女儿,我一定会坚强地生活.”刚毅的科马洛夫不禁落泪了,他叮嘱孩子“要记住这个日子,以后每年的这个日子要到坟前献一朵花,向爸爸汇报学习情况.”

由 $\frac{①+②}{2}$, 得 $2 \leq a \leq 3$,

由 $\frac{②-①}{2}$, 得 $\frac{1}{2} \leq b \leq \frac{3}{2}$.

又 $\because f(-2) = 4a - 2b$, 且 $8 \leq 4a \leq 12$, $-3 \leq -2b \leq -1$,
 $\therefore 5 \leq 4a - 2b \leq 11$, 即 $5 \leq f(-2) \leq 11$.

此种解法不正确, 错因分析:

$$\begin{cases} 1 \leq a - b \leq 2 \\ 3 \leq a + b \leq 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 \leq a \leq 3, \\ \frac{1}{2} \leq b \leq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

$$\text{但是, } \begin{cases} 2 \leq a \leq 3 \\ \frac{1}{2} \leq b \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \leq a - b \leq 2, \\ 3 \leq a + b \leq 4. \end{cases}$$

$\therefore$ 这两个不等式组不等价.

③

④

①

②

③

④

③

④

①

②

而解不等式或求范围所施的一系列变换是否为等价变换, 决定是否产生错误.

正确: $\because f(-1) = a - b$, $f(1) = a + b$, 解方程组

$$\begin{cases} f(-1) = a - b, \\ f(1) = a + b, \end{cases} \text{得}$$

$$\begin{cases} a = \frac{f(1) + f(-1)}{2}, \\ b = \frac{f(1) - f(-1)}{2}. \end{cases}$$

$$\therefore f(-2) = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) = 4a - 2b$$

$$= 4 \cdot \frac{f(1) + f(-1)}{2} - 2 \cdot \frac{f(1) - f(-1)}{2}$$

$$= 2[f(1) + f(-1)] - f(1) + f(-1) = f(1) + 3 \cdot f(-1).$$

又 $\because 1 \leq f(-1) \leq 2$, $\therefore 3 \leq 3 \cdot f(-1) \leq 6$. 又 $\because 3 \leq f(1) \leq 4$, $\therefore 6 \leq f(1) + 3 \cdot f(-1) \leq 10$, 即 $6 \leq f(-2) \leq 10$.

点评 严格依据不等式的基本性质进行等价变形是正确求出范围的关键.

练习全解

人教大纲版练习(第5页)

$$1. \because (x+5)(x+7) - (x+6)^2$$

$$= (x^2 + 12x + 35) - (x^2 + 12x + 36) = -1 < 0,$$

$$\therefore (x+5)(x+7) < (x+6)^2.$$

$$2. \because (\sqrt{x}-1)^2 - (\sqrt{x}+1)^2 = x - 2\sqrt{x} + 1 - x - 2\sqrt{x} - 1$$

$$= -4\sqrt{x},$$

$$\text{由 } x > 0, \text{ 知 } \sqrt{x} > 0, \therefore -4\sqrt{x} < 0.$$

$$\therefore (\sqrt{x}-1)^2 < (\sqrt{x}+1)^2.$$

$$3. \because (a^2 + \sqrt{2}a + 1)(a^2 - \sqrt{2}a + 1) - (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$$

$$= [(a^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}a)^2] - [(a^2 + 1)^2 - a^2] = -a^2.$$

由 $a \neq 0$, 知 $-a^2$ 是一个负数,

$$\therefore (a^2 + \sqrt{2}a + 1)(a^2 - \sqrt{2}a + 1) < (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1).$$

人教大纲版练习(第7页)

1. (1)真命题;(2)假命题,因为如果 $c < 0$, 那么 $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$; (3)假命题,因为如果 $c < 0$, 那么 $a > b$; (4)真命题.

2. (1)不能断定;(2)不能断定;(3)不能推出;(4)不能推出. 举例略.

$$3. (1) \because a > b, \therefore a - d > b - d, \text{ 又 } c > d,$$

$$\therefore -d > -c, b - d > b - c. \therefore a - d > b - c;$$

$$(2) \because a > b, ab > 0, \text{ 两边同乘正数 } \frac{1}{ab}, \text{ 得 } \frac{1}{b} > \frac{1}{a},$$

$$\therefore \frac{1}{a} < \frac{1}{b};$$

$$(3) \because a > b > 0, c < d < 0, \therefore ac < bc, bc < bd. \therefore ac < bd;$$

$$(4) \because a > b, \therefore -2a < -2b, \therefore c - 2a < c - 2b.$$

人教大纲版习题(第8页)

$$1. \because (2a+1)(a-3) - [(a-6)(2a+7) + 45]$$

$$= 2a^2 - 5a - 3 - (2a^2 - 5a + 3) = -6 < 0,$$

$$\therefore (2a+1)(a-3) < (a-6)(2a+7) + 45.$$

$$2. \because (x+1)\left(x^2 + \frac{x}{2} + 1\right) - \left(x + \frac{1}{2}\right)(x^2 + x + 1)$$

$$= x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1 - \left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} > 0,$$

$$\therefore (x+1)\left(x^2 + \frac{x}{2} + 1\right) > \left(x + \frac{1}{2}\right)(x^2 + x + 1).$$

$$3. \because x^3 - (x^2 - x + 1) = x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x-1)$$

$$= (x^2 + 1)(x-1),$$

$$\text{且由 } x \geq 1, \text{ 知 } (x^2 + 1)(x-1) \geq 0, \therefore x^3 \geq x^2 - x + 1.$$

$$4. (1) <; (2) >; (3) <; (4) >, >$$

$$5. (1) \because a > b, c > 0, \therefore -ac < -bc, \text{ 又 } f < e, \therefore f - ac < e - bc;$$

$$(2) \because a > b > 0, ab > 0, \therefore 0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}. \therefore \frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2};$$

$$(3) \because c > d > 0, \therefore \frac{1}{d} > \frac{1}{c} > 0.$$

$$\text{又 } \because a > b > 0,$$

$$\therefore \frac{a}{d} > \frac{b}{c} > 0,$$

$$\therefore \sqrt{\frac{a}{d}} > \sqrt{\frac{b}{c}}.$$

高中数学智力背景

一个小数点与一场大悲剧(4) 永别的时刻到了——飞船坠地,电视图象消失.整个苏联一片肃静,人们纷纷走向街头,向着飞船坠毁的地方默默地哀悼.同学们,读到这里,你是否被这悲壮的局面所感染了!“联盟一号”当时发生的一切,就是因为地面检查时,忽略了一个小数点.让我们记住这一个小数点所酿成的大悲剧吧!让我们以更加严谨的态度对待学习和科学,以更加认真的态度对待工作和生活吧.

6. 由 $30 < x < 42, 16 < y < 24$, 可得 $-48 < -2y < -32, \frac{1}{24} < \frac{1}{y}$
 $< \frac{1}{16}, \therefore 30 + 16 < x + y < 42 + 24$, 即 $46 < x + y < 66; 30 - 48$

$< x - 2y < 42 - 32$, 即 $-18 < x - 2y < 10; \frac{30}{24} < \frac{x}{y} < \frac{42}{16}$,
 即 $\frac{5}{4} < \frac{x}{y} < \frac{21}{8}$.

五年高考

一、选择题

例1 ('06 上海春招, 14) 若 $a, b, c \in \mathbf{R}, a > b$, 则下列不等式成立的是 ()

- A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $a^2 > b^2$
 C. $\frac{a}{c^2+1} > \frac{b}{c^2+1}$ D. $a|c| > b|c|$

答案 C

解 $\because c^2 + 1 > 0, \therefore \frac{1}{c^2+1} > 0$.

又 $\because a > b, \therefore \frac{a}{c^2+1} > \frac{b}{c^2+1}$.

点评 本题较灵活地全面地考查了不等式的基本性质.

例2 ('04 北京, 4) 已知 a, b, c 满足 $c < b < a$, 且 $ac < 0$, 那么下列选项中一定成立的是 ()

- A. $ab > ac$ B. $c(b-a) < 0$
 C. $cb^2 < ab^2$ D. $ac(a-c) > 0$

答案 A

解 $\because c < b < a$, 且 $ac < 0$,

$\therefore a > 0, c < 0$. 由 $b > c$, 得 $ab > ac$.

点评 本题考查了不等式的基本性质.

例3 ('03 北京春, 文1) 设 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, 且 $a > b, c > d$, 则下列结论中正确的是 ()

- A. $a+c > b+d$ B. $a-c > b-d$
 C. $ac > bd$ D. $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$

答案 A

解 $\because a > b, c > d, \therefore a+c > b+d$. 故选 A.

点评 本题考查不等式的基本性质.

例4 ('01 春季上海) 若 a, b 为实数, 则 $a > b > 0$ 是 $a^2 > b^2$ 的 ()

- A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件

答案 A

解 $a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$, 但 $a^2 > b^2$ 则可能有 $a < b < 0$, 故 $a > b > 0$ 是 $a^2 > b^2$ 的充分不必要条件.

点评 本题主要考查不等式的性质和充分、必要条件的概念.

例5 ('05 上海春招) 若 a, b, c 是常数, 则“ $a > 0$ 且 $b^2 -$

$4ac < 0$ ”是“对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $ax^2 + bx + c > 0$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件

答案 A

解 由“ $a > 0$ 且 $\Delta < 0$ ”可推得“对任意 $x \in \mathbf{R}$ 有 $ax^2 + bx + c > 0$ ”成立, 而当 $a = b = 0, c > 0$ 时, 仍有 $ax^2 + bx + c > 0$, 即由“对任意 $x \in \mathbf{R}, ax^2 + bx + c > 0$ ”不能推得“ $a > 0$ 且 $b^2 - 4ac < 0$ ”. 故选 A.

点评 “ $x \in \mathbf{R}$ ”时一元二次不等式恒成立问题须: ①开口, ②“ Δ ”缺一不可. 反之由 $ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow$ 字母范围要讨论“ a 是否为 0”.

例6 ('04 天津, 3) 对任意实数 a, b, c 在下列命题中, 真命题是 ()

- A. “ $ac > bc$ ”是“ $a > b$ ”的必要条件
 B. “ $ac = bc$ ”是“ $a = b$ ”的必要条件
 C. “ $ac > bc$ ”是“ $a > b$ ”的充分条件
 D. “ $ac = bc$ ”是“ $a = b$ ”的充分条件

答案 B

解 $\because ac > bc \nRightarrow a > b$, 且 $a > b \nRightarrow ac > bc$,

$\therefore$ “ $ac > bc$ ”是“ $a > b$ ”的既不充分也不必要条件.

又 $\because ac = bc \nRightarrow a = b$, 但 $a = b \Rightarrow ac = bc, \therefore$ B 选项正确.

点评 本小题主要考查不等式的性质, 以及充要条件等基本知识.

例7 ('04 上海, 理16 文16) 某地 2004 年第一季度应聘和招聘人数排行榜前 5 个行业的情况列表如下:

行业名称	计算机	机械	营销	物流	贸易
应聘人数	215 830	200 250	154 676	74 570	65 280

行业名称	计算机	营销	机械	建筑	化工
招聘人数	124 620	102 935	89 115	76 516	70 436

若用同一行业中应聘人数与招聘人数比值的大小来衡量该行业的就业情况, 则根据表中数据, 就业形势一定是 ()

- A. 计算机行业好于化工行业
 B. 建筑行业好于物流行业
 C. 机械行业最紧张
 D. 营销行业比贸易行业紧张

高中数学智力背景

动物中的数学“天才” (1) 蜜蜂蜂房是严格的六角柱状体, 它的一端是平整的六角形开口, 另一端是封闭的六角菱锥形的底, 由三个相同的菱形组成. 组成底盘的菱形的钝角为 $109^\circ 28'$, 所有的锐角为 $70^\circ 32'$, 这样既坚固又省料. 蜂房的巢壁厚 0.073 毫米, 误差极小. 丹顶鹤总是成群结队迁飞, 而且排成“人”字形. “人”字形的角度是 110° . 更精确地计算还表明“人”字形夹角的一半——即每边与鹤群前进方向的夹角为 $54^\circ 44' 8$ 秒! 而金刚石结晶体的角度正好也是 $54^\circ 44' 8$ 秒! 是巧合还是某种大自然的“默契”?

答案 B

解 显然应聘人数与招聘人数的比值越小,就业形势就越好. 设建筑行业应聘人数与招聘人数分别为 a, b , 物流行业应聘人数与招聘人数分别为 c, d , 则由表格, 得 $0 < a < c, b > d > 0$, $\therefore \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. 故建筑行业好于物流行业.

点评 本题考查学生应用不等式的性质解决实际问题的能力以及把实际问题转化为数学问题的能力, 透彻理解题意, 建立相应的数学模型是解决这一类问题的关键.

例 8 ('04 全国 I, 12) $a^2 + b^2 = 1, b^2 + c^2 = 2, c^2 + a^2 = 2$, 则 $ab + bc + ca$ 的最小值为 ()

A. $\sqrt{3} - \frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2} - \sqrt{3}$

C. $-\frac{1}{2} - \sqrt{3}$

D. $\frac{1}{2} + \sqrt{3}$

答案 B

解 解答本题最容易犯的错误是利用 $a^2 + b^2 \geq 2ab, b^2 + c^2 \geq 2bc, c^2 + a^2 \geq 2ca$, 相加得 $5 \geq 2(ab + bc + ca)$, 从而 $ab + bc + ca \leq \frac{5}{2}$. 错误一是无法求出最小值, 错误二是这里的等号取不到, 显然 $a = b = c$ 不成立. 实际上, 由条件 $a^2 + b^2 = 1, b^2 + c^2 = 2, c^2 + a^2 = 2$ 可求出 a, b, c 的值. $a^2 = b^2 = \frac{1}{2}, c^2 = \frac{3}{2}$,

$$\text{又} \because ab + bc + ca = \frac{1}{2}[(a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)]$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)^2 - \frac{5}{4},$$

$\therefore$ 只需求 $|a+b+c|$ 的最小值即可.

$$\text{当 } a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}, c = -\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 时, } ab + bc + ca \text{ 有最小值 } \frac{1}{2} - \sqrt{3}.$$

点评 本小题主要考查考生综合运用数学知识解决问题的能力.

二、填空题

例 9 ('06 上海春招, 12) 同学们都知道, 在一次考试后, 如果按顺序去掉一些高分, 那么班级的平均分将降低; 反之, 如果按顺序去掉一些低分, 那么班级的平均分将提高. 这两个事实可以用数学语言描述为: 若有限数列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 满足 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, 则 (结论用数学式子表示).

$$\text{答案 } \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad (1 \leq m < n) \text{ 或}$$

$$\frac{a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n}{n-m} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad (1 \leq m < n)$$

点评 本题考查学生将实际问题转化为数学问题即数学建模的能力, 本题较新颖, 也能很好地考查一个学生的数学素养.

三年模拟

一、选择题

1. ('06 青岛高中联考, 3) 若 $a < b < 0$, 则下列不等式不成立的是 ()

A. $ab > b^2$

B. $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{a}$

C. $|a| > |b|$

D. $a^4 > b^4$

2. ('06 湖北 3 月摸底, 4) 下列命题正确的是 ()

A. $a^2 > b^2 \Rightarrow a > b$

B. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Rightarrow a < b$

C. $ac > bc \Rightarrow a > b$

D. $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Rightarrow a < b$

3. ('04 山东济南四校联考) 给出三个条件: ① $ac^2 > bc^2$; ② $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$; ③ $a^2 > b^2$. 其中能分别成为 $a > b$ 的充分条件的个数为 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

4. ('05 天津高三大联考) 已知: $0 < x < y < a < 1$, 则有 ()

A. $\log_a(xy) < 0$

B. $0 < \log_a(xy) < 1$

C. $1 < \log_a(xy) < 2$

D. $\log_a(xy) > 2$

5. ('04 合肥第二次抽样, 5) 设 $0 < a < b$ 且 $a + b = 1$, 则四个数 $\frac{1}{2}, a, 2a, a^2 + b^2$ 中最小的数是 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. a

C. $2ab$

D. $a^2 + b^2$

6. ('04 东城四月, 7) 已知函数 $f(x) = x + x^3, x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}, x_1 + x_2 < 0, x_2 + x_3 < 0, x_3 + x_1 < 0$, 那么 $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$ 的值 ()

A. 一定大于 0

B. 一定小于 0

C. 等于 0

D. 正负都有可能

7. ('05 湖南师大附中) 设 $a > b > c > 0$, 则下列不等式成立的是 ()

A. $|b-a| \geq 1$

B. $2^a < 2^b$

C. $\lg \frac{a}{b} < 0$

D. $0 < \frac{b}{a} < 1$

8. ('05 山东潍坊联考, 8) 给定命题 ① $a > b$ 且 $ab < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$; ② $\sqrt{a} > \sqrt{b} \Leftrightarrow a > b$; ③ $|a| < |b| \Leftrightarrow -b < a < b$; ④ $ac^2 > bc^2 \Rightarrow a > b$. 其中真命题的个数是 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

9. ('06 北京崇文区期末, 6) $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 2 < y < 3 \end{cases}$ 是 $\begin{cases} 2 < x+y < 4 \\ 0 < x \cdot y < 3 \end{cases}$ 的 ()

A. 充分必要条件

B. 充分而不必要条件

高中数学智力背景

动物中的数学“天才” (2) 蜘蛛结的“八卦”形网, 是既复杂又美丽的八角形几何图案, 人们即使用直尺和圆规也很难画出像蜘蛛网那样匀称的图案. 冬天, 猫睡觉时总是把身体抱成一个球形, 这其间也有数学, 因为球形使身体的表面积最小, 从而散发的热量也最少. 真正的数学“天才”是珊瑚虫. 珊瑚虫在自己的身上记下“日历”, 它们每年在自己的体壁上“刻画”出 365 条斑纹, 显然是一天“画”一条. 奇怪的是, 古生物学家发现 3 亿 5 千万年前的珊瑚虫每年“画”出 400 幅“水彩画”. 天文学家告诉我们, 当时地球一天仅 21.9 小时, 一年不是 365 天, 而是 400 天.

- C. 必要而不充分条件 D. 既不充分也不必要条件
10. ('06 东城区目标检测) 已知 $a < 0, b < -1$, 则下列不等式成立的是 ()
- A. $a > \frac{a}{b} > \frac{a}{b^2}$ B. $\frac{a}{b^2} > \frac{a}{b} > a$
- C. $\frac{a}{b} > \frac{a}{b^2} > a$ D. $\frac{a}{b} > a > \frac{a}{b^2}$
11. ('06 襄樊调研, 3) 已知 a, b, c 满足 $c < b < a$, 且 $ac < 0$, 则下列选项中不一定成立的是 ()
- A. $ab > ac$ B. $c(b-a) > 0$
- C. $cb^2 < ca^2$ D. $ac(a-c) < 0$
12. ('06 北京西城抽样, 文 4) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $a > b$ ”是“ $a > |b|$ ”的 ()
- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

二、填空题

13. ('05 湖北八校第二次联考, 13) 若 a, b, c, d 均为实数, 使不等式 $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} > 0$ 和 $ad < bc$ 都成立的一组值 (a, b, c, d) 是 _____ (只要写出适合条件的一组值即可).
14. ('05 汕头模拟, 14) 以下四个不等式① $a < 0 < b$, ② $b < a < 0$, ③ $b < 0 < a$, ④ $0 < b < a$, 其中使 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 成立的充分条件有 _____.

15. ('05 郑州预测, 文 13) 已知 $a > b > c$, 且 $a + b + c = 0$, 则 $b^2 - 4ac$ 与 0 的大小关系为 _____.

16. ('06 成都检测, 文 15) 若角 α, β 满足 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, 则 $2\alpha - \beta$ 的取值范围是 _____.

三、解答题

17. ('05 山东聊城联考, 18) 已知 $0 < x < 1, a > 0$ 且 $a \neq 1$, 试比较 $|\log_a(1+x)|$ 与 $|\log_a(1-x)|$ 的大小.

18. ('04 云南二检, 18) 设 $a+b > 0, n$ 为偶数, 比较 $\frac{b^{n-1}}{a^n} + \frac{a^{n-1}}{b^n}$ 与 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的大小.

高中数学智力背景

麦比乌斯带 每一张纸均有两个面和封闭曲线状的棱(edge), 如果有一张纸它有一条棱而且只有一个面, 使得一只蚂蚁能够不越过棱就可从纸上的任何一点到达其他任何一点, 这有可能吗? 事实上是可能的, 只要把一条纸带半扭转, 再把两头贴上就行了. 这是德国数学家麦比乌斯在 1858 年发现的, 自此以后那种带就以他的名字命名, 称为麦比乌斯带. 有了这种玩具使得一支数学的分支拓扑学得以蓬勃发展.