中国科学院规划教材

中国科学院电子信息与通信系列规划教材

随机信号分析

常建平　李海林　编著

科学出版社
www.sciencep.com

中国科学院电子信息与通信系列规划教材

随机信号分析

常建平　李海林　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书主要阐述了概率论与随机信号的基础理论和分析方法。全书共分7章，包括概率论，随机信号的时域、频域分析，随机信号通过线性系统的分析，随机信号统计特征的实验研究方法，窄带随机信号，马尔可夫过程、独立增量过程及独立随机过程等内容。

本书强调对随机信号基本概念的理解，并要求掌握系统的分析方法，注重基本理论与实际系统，特别是与电子系统的联系。内容全面，叙述清楚，便于教学和自学。

本书可作为高等院校电子信息类专业的本科生教材，亦可供相关领域的科研和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

随机信号分析/常建平，李海林编著. —北京：科学出版社，2006
(中国科学院电子信息与通信系列规划教材)
ISBN 7-03-016413-X

Ⅰ. 随… Ⅱ. ①常…②李… Ⅲ. 随机信息-信号分析-高等学校-教材 Ⅳ. TN911.7

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第126453号

责任编辑：资丽芳/ 责任校对：李奕萱
责任印制：张克忠/ 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2006年6月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2006年6月第一次印刷 印张：18 1/2
印数：1—4 000 字数：345 000

定价：25.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉)

丛书序

信息技术的高速发展及其广泛应用，使信息技术成为当今国际竞争中最重要的战略技术。信息技术对经济建设、社会变革、国家安全乃至整个国家的发展起到关键性的作用，它是经济发展的“倍增器”和社会进步的“催化剂”，是体现综合国力的重要标志。在人类历史上，没有一种技术像信息技术这样引起社会如此广泛、深刻的变革。在20世纪末和21世纪前半叶，信息技术乃是社会发展最重要的技术驱动力，可以说，21世纪人类已经步入了信息时代。信息产业在世界范围内正在由先导产业逐步变为主导产业。从微观上看，表现为单位产品的价格构成中，能源和材料的消耗减少而信息技术和信息服务的比重上升；从宏观上看，表现为国民生产总值(GDP)中信息产业所占的比重增加。一个国家信息产业的发展水平将是衡量该国社会经济总体发展和现代化程度的重要标志之一。

目前，信息科学已成为世界各国最优先发展的科学之一。党的十六大提出了“加速发展信息产业，大力推进信息化，以信息化带动工业化”的发展战略，以及“优先发展信息产业，在经济和社会领域广泛应用信息技术”的基本国策，使我国信息产业得到了前所未有的重视，信息产业呈现出飞速发展的势头。信息产业的发展离不开信息化人才，信息化人才建设将是信息产业可持续发展的关键。然而，有关调查表明，我国国家信息化指数为38.46，而信息化人才资源指数仅为13.43。据权威机构预测，从2005年到2009年，中国信息行业将以18.5%的年复合增长率高速增长，中国信息市场将迎来又一个“黄金年代”。在信息化发展势头的带动下，我国信息化人才缺乏已经成为制约信息产业发展的重要因素。

为了适应新世纪信息学科尤其是电子信息与通信学科的长足发展，在规模上、素质上更好地满足我国信息产业和信息科学技术的发展需要，更好地实现电子信息与通信学科专业人才的培养目标，推进国内信息产业的发展，中国科学院教材建设专家委员会和科学出版社组织电子信息与通信领域的院士、专家、教学指导委员会成员、国家级教学名师及电子信息与通信学科院校的相关领导等组成编委会，共同组织编写这套《中国科学院电子信息与通信系列规划教材》。

本套教材主要面向全国范围内综合性院校电子信息工程、通信工程、信息工程等相关专业的本科生。本套教材的编委会成员具有国内电子信息与通信方面的较

高学术水平，他们负责对本套教材的编写大纲及内容进行审定，可使本套教材的质量得以保证。

本套教材主要有以下几方面的特点：

1．适应多层次的需要。依据最新专业规范，系列教材主要根据教育部最新公布的电子信息与通信学科相关专业的“学科专业规范”和“基础课程教学基本要求”进行教材内容的安排与设置。同时，根据各类型高校学生的实际需要，编写不同层次的教材。

2．结构体系完备。本套教材覆盖本科、研究生教学层次，各门课程的知识点之间相互衔接，以便完整掌握学科基本概念、基本理论，了解学科整体发展趋势。

3．作者水平较高。我们将邀请设有电子、通信国家重点学科的院校，以及国家级、省级教学名师或国家级、省级精品课程负责人编写教材。

4．借鉴国外优秀教材。编委会为每门课程推荐一本国外相关的经典原版教材，作为教师编写的参考书。

5．理论与实际相结合，加强实践教学。教材编写注重案例和实践环节，着力于学生实际动手能力的培养。

6．教材形式多样。本套教材除主教材外，还配套有辅导书、教师参考书、多媒体课件、习题库及网络课程等。

根据电子信息与通信学科专业发展的战略要求，我们将对本套系列教材不断更新，以保持教材的先进性和适用性。热忱欢迎全国同行以及关注电子信息与通信领域教育及教材建设的广大有识之士对我们的工作提出宝贵意见和建议。

北京交通大学校长 谈振辉

2005年10月

前　言

“随机信号分析”是电子信息类专业主要的专业基础课程之一。它是一门研究随机变化信号特点与规律的学科，广泛应用于雷达、通信、自动控制、随机振动、地震信号处理、图像信号处理、气象预报、生物电子等领域。近年来，随着现代通信、信息理论和计算机科学技术的飞速发展，随机信号处理已成为现代信号处理的重要理论基础和有效方法之一。

设置该课程的目的是使学生较全面地掌握随机信号的理论基础和分析方法，并将学到的理论与电子系统相联系，掌握随机信号通过电子系统的处理方法。学习一些有关现代信号处理理论的基础知识，培养学生具备适应未来新的交叉学科发展的综合创新能力。

本书在该课程原教材《概率论与随机信号分析》的基础上，参考了目前所有同类教材的长处，结合多年的教学经验，在内容上做了相应的加深与拓宽。并在编排结构上对原教材进行了改进，使教材的结构更加合理。为了使学习能理论联系实际，让学生掌握一些统计实验的研究方法，本书中还添加了随机信号统计特征的实验研究方法一章。

初学者往往会感到“随机信号分析”这门课程中所涉及的理论与方法不可靠、模糊、难懂。因此，在这里有必要对该课程的特点与学习方法做一介绍。

① 由于该课程讨论的对象是随机信号(数学模型——随机过程)，随机信号本身就是随机变化的、不确定的，只有它的统计规律才是确定的，因而，对随机信号而言，从描述方式、推演方式到分析方法都是在统计的意义上讨论与定义的。因此，必须学会用统计的观点来看所有随机的问题。

② 学习时必须注重物理概念的理解，因为该课程是电子信息类学科相关专业的一门专业基础课程，而不是一门数学课。课程中用到的许多数学理论是处理随机信号有关问题的数学工具。因此，学习时除了注意处理问题的方法外，更重要的是对一些数学推演的结果和结论的物理意义有深入的理解。对一些复杂的数学推演的中间步骤不要死记硬背，更不必深究其数学推导的严密性，而重在掌握分析问题的思路与方法。这也是课程名称为什么叫“随机信号分析”而不叫“随机过程分析”的原因，尽管在本书中“随机信号”与“随机过程”是同义词。

在本书的编写过程中，得到了南京航空航天大学精品课程立项建设的支持。此外，饶智坚、孔莹莹等研究生在文字录入工作中提供了帮助，南京航空航天大学金城学院谭静老师参加了书稿的校对工作，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，书中难免存在不少谬误和疏漏，恳请读者给予批评指正。

编著者

2005 年 8 月

目　　录

第一章　概　率　论

1.1　概率空间

1.1.1　概率的定义

1. 随机事件

自然界和社会上发生的现象多种多样，可以分成确定性现象和随机现象两类。上抛的石子必然会下落，异性电荷必然相互吸引等这类，在一定条件下必然发生或必然不发生的现象，称之为确定性现象。而随机现象是指在相同的条件下进行重复试验，其结果可能有许多种，在试验之前无法预知，呈现一种偶然性的现象。例如，某城市每天人口的出生率，某工厂每天产品的合格率股市行情等。

如何描述随机现象呢？人们发现，许多随机现象虽然在个别试验中呈现不确定性，但在大量重复试验中却呈现出某种规律性。例如，投掷硬币时正面出现的概率趋于 1/2；投掷骰子时其任一面出现的概率趋于 1/6。“概率论”就是描述与研究随机现象规律性的数学工具，它研究大量随机现象内在的统计规律、建立随机现象的物理模型、预测随机现象将要产生的结果。

（1）随机试验

为建立随机现象的物理模型，首先引入随机试验的概念。下面是一些常见的随机现象：

E_1：抛一枚硬币，观察正、反两面出现的次数

E_2：将一枚硬币连抛两次，观察正、反面出现的次数

E_3：抛一颗骰子，观察出现的点数

E_4：记录某电话交换台一分钟内接到的呼叫次数

E_5：在一批灯泡中任意抽取一只测试它的寿命

抽取这些现象的同一特征，就得到概率论中随机试验的概念：

① 试验在相同的条件下可重复进行。

② 每次试验的可能结果不止一个，并能事先明确试验将会出现的所有可能结果。

③ 每次试验前不能确定哪个结果会出现。

具有以上三个特征的试验称为随机试验，用 E 表示。

随机试验 E_1 有{正，反}两种可能结果；随机试验 E_3 有{1，2，3，4，5，6}六种可

能结果。把随机试验 E 每个可能出现的结果称为样本点，一般用 ζ 或带有下标的 ζ_k 表示。而随机试验 E 中所有可能出现的结果，即全体样本点的集合称为样本空间，一般用 Ω 表示。从随机试验 E_1 和 E_3 可见，不同的随机试验其样本空间也不同。

样本空间 Ω 可以分为：

有限样本空间：有限个样本点构成的样本空间。如随机试验 E_1 的样本空间 $\Omega=\{正，反\}$；随机试验 E_3 的样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$。

可列样本空间：有无穷多个样本点构成的样本空间，但这些样本点可以依照某种次序排列出来，其样本点数为"可列"个。如随机试验 E_4 的样本空间 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$。

无穷样本空间：有无穷多个样本点构成的样本空间，但这些样本点不是一个可列集而是充满一个区间。如随机试验 E_5 的样本空间 $\Omega=\{$时间轴$(0,T)$上的所有点$\}$，这里灯泡寿命是连续的。

(2) 随机事件

随机试验中，可能出现的结果称之为随机事件，简称为事件。一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示。它是样本空间 Ω 中的若干个样本点组成的集合，即是样本空间 Ω 的子集。只要代表随机事件的集合中有一个样本点发生，就称此随机事件发生了。

例 1.1 随机试验 E_3：抛一颗骰子，观察出现的点数。其样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，其中每个试验结果 1，2，3，4，5，6 为样本点。样本空间 Ω 存在很多子集，如 $A=\{3\}$，$B=\{1,3,5\}$，$C=\{4,5,6\}$，$D=\{1,2,3,4,5,6\}$，$E=\varnothing$ 等。每个子集都表示一个随机事件：A 表示"投掷结果为 3"的事件；B 表示"投掷结果为奇数"的事件；C 表示"投掷结果为大点"的事件；D 表示必然事件；E 表示不可能事件。若某次投掷的结果为 5，可以说事件 A 没发生，也可以说事件 C 发生了，或说事件 E 没发生等等。

说明：

① 类似 A 的随机事件，它仅由一个样本点构成，是随机试验中最简单的随机事件，一般称之为基本事件。显然，所有基本事件的集合构成样本空间。

② 类似 $D(D=\Omega)$ 的随机事件，它由所有的样本点构成，一般称之为必然事件，表示在每次试验中，其必然发生。

③ 同理，空集 $E=\varnothing$ 也可以看作是一个事件。由于每次试验中发生的样本点均不在其中，所以事件 $\varnothing$ 永不发生，故称之为不可能事件。

(3) 随机事件的关系与运算

由于组成事件的样本点的集合是其样本空间的子集，因此事件间的关系及运算与集合论中集合的关系及运算是相似的。

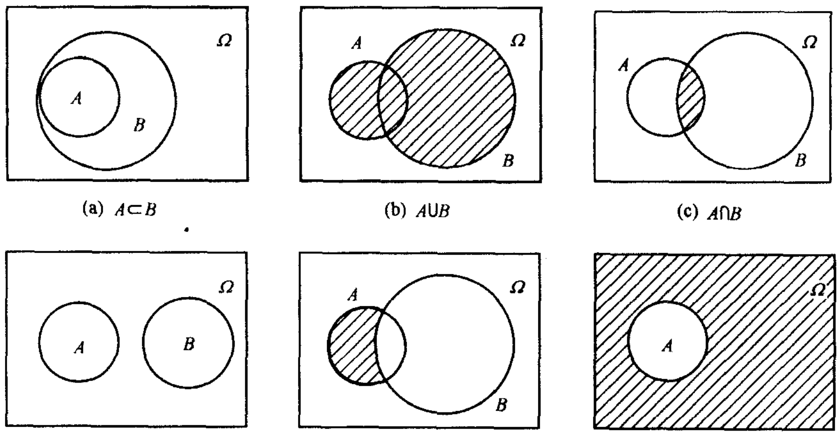
1) 事件的包含与相等

如果事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生，则称事件 B 包含事件 A，记作 $B\supset A$。即属于 A 的每一个样本点均属于 B，如图 1.1(a)所示。

如果有 $B\supset A$ 且 $A\supset B$，即属于 A 的每一个样本点均属于 B，且属于 B 的每一个样本点又均属于 A，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $B=A$。

2）事件的和

"A 事件与 B 事件中只要有一个发生且发生"的事件，称为 A 与 B 的和事件，记作 $A\cup B$。该事件中的任一样本点至少是属于 A 或 B 中的一个，如图 1.1(b)中阴影部分所示。



(a) $A\subset B$　(b) $A\cup B$　(c) $A\cap B$

(d) A, B 互不相容　(e) $A-B$　(f) $\overline{A}$

图 1.1　随机事件的关系和运算

3）事件的积与互不相容

"只有 A 事件与 B 事件同时发生才发生"的事件，称为 A 与 B 的积事件，记作 $A\cap B$ 或 AB。该事件中的任一个样本点既属于 A 也属于 B，如图 1.1(c)中阴影部分所示。

若 $A\cap B=\varnothing$，表示事件 A 与事件 B 不可能同时发生，则称 A 与 B 互不相容（互不相交）。属于 A 的样本点必不属于 B，如图 1.1(d)所示。

4）事件的差与逆

"事件 A 发生而事件 B 不发生"的事件，称为事件 A 与事件 B 的差事件，记作 $A-B$。该事件中的样本点仅仅属于 A，如图 1.1(e)中阴影部分所示。

"事件 A 不发生"的事件，称为事件 A 的逆事件，记作 $\overline{A}$。它由样本空间 Ω 中所有不属于 A 的样本点的集合构成，如图 1.1(f)中阴影部分所示。可见，$\overline{A}$ 是 A 的对立事件，因此有 $A\cup\overline{A}=\Omega$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$。常称 $\overline{A}$ 为 A 的逆。

同理，在图 1.1(e)中，由逆的定义可得：$A-B=A\cap\overline{B}=A\overline{B}$。

2. **概率的定义**

人们在大量实践中发现，尽管随机事件的发生与否是偶然的、变化的，但每一个随机事件发生的"可能性大小"却是固定不变的。对于不同的随机事件而言，其发

生的可能性大小是不同的。比如人们通过大量试验发现：在"抛硬币"试验中，"正面"出现的可能性是 1/2；在"掷骰子"试验中，"1 点"出现的可能性是 1/6。由于每一个随机事件发生的可能性大小都是其内在规律的体现，是固定不变的，因此可以用一个确定的数值来表示。人们将这个用来表示随机事件发生的可能性大小的数值称为"概率"。在概率论发展史上，人们曾针对不同的问题，从不同的角度给出了定义概率和计算概率的各种方法。

(1) 概率的古典定义

定义：如果某一随机试验 E 的全部可能结果（样本空间 Ω 中所有样本点的个数）只有有限个，且每个结果的发生是等可能的，则 E 中任意随机事件 A 发生的概率 $P(A)$ 可由下式计算：

$$P(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 包含的样本点的个数}}{\text{样本空间 } \Omega \text{ 中所有样本点的个数}} \tag{1-1}$$

概率的古典定义具有以下性质：

1° 非负性：$P(A)\geqslant 0, \forall\ A\in F$（事件域）。

2° 规范性：$P(\Omega)=1$。

3° 有限可加性：若 $A_i(i=1,2,\cdots,n)\in F$，且两两互不相容时，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{1-2}$$

即：和事件 $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$ 的概率等于所有事件概率的和 $\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$。

在前几个世纪中，概率论都是建立在古典定义基础上的，它具有局限性。古典定义假设随机试验 E 所有结果的发生具有等可能性，并且它只能用于在有限样本点的样本空间情况下的讨论。在古典定义基础上，人们把概率推广到含有无限多个结果的样本空间情况，导出了几何概率。将某一随机试验 E（含有无限多个样本点）的样本空间，用 m 维空间中的一个有界区域 Ω 表示，区域 Ω 的大小用度量 $L(\Omega)$ 表示。此度量 $L(\Omega)$ 可以表示一维区间的长度、二维区域的面积、三维空间的体积等。

(2) 概率的几何定义

定义：若将含有无限多个结果的随机试验 E 等效为向区域 Ω（样本空间）"均匀"地投掷随机点，事件 $A\in\Omega$ 则为区域 Ω 中任一可能出现的子区域，那么随机点落入 A 区域的概率被定义为事件 A 的概率 $P(A)$

$$P(A)=\frac{\text{区域 } A \text{ 的度量 } L(A)}{\text{区域 } \Omega \text{ 的度量 } L(\Omega)} \tag{1-3}$$

概率的几何定义有非负性、规范性。同时还具有可列可加性：若 $A_i(i=1,2,\cdots,n)\in F$，且两两互不相容时有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{1-4}$$

概率的几何定义也有局限性：由于概率的几何定义中随机试验等效为向区域 Ω（样本空间）"均匀"地投掷随机点，意味着 Ω 中所有样本点发生的可能性是相等的，所以几何定义仍离不开等可能性的假设。人们抛开等可能性的假设，提出了概率的统计定义，即用事件频率的极限来定义概率。

（3）概率的统计定义

若随机事件 A 在 n 次重复试验中出现 n_A 次，则比值 $f_n(A)=n_A/n$ 称作事件 A 在这 n 次试验中出现的频率。

定义：在随机试验 E 的 n 次重复试验中，事件 A 发生的概率 $P(A)$ 可由事件 A 发生的频率的极限来计算，即

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}f_n(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n} \tag{1-5}$$

概率的统计定义也具有非负性、规范性和可列可加性。它的局限性为：频率具有随机性。当 n 有限时，这组 n 次试验的频率与下组 n 次试验的频率可能完全不同，但概率却是固定的。频率只有在 $n\to\infty$ 时才趋于概率。在实际应用中，虽然随机试验的重复次数 n 可以很大，但总是有限数，无法找到频率的极限，所以频率的极限也只能作为一种假说来接受。

上述几种概率的定义和计算方法都有一定的适用范围，以及理论和应用的局限性。但人们发现，尽管它们定义概率的方式不同，但得出的概率基本性质是相同的。于是，从这三种定义的共同性质出发，人们给概率赋予一个新的数学定义，即概率的公理化定义。这个定义只指明概率应具有的基本性质，不具体规定概率的计算方法。这样既包括了前面三种特殊情况，又具有更广泛的一般性。在叙述概率的公理化定义之前，先介绍事件域 F 的概念。

事件域 F 是由样本空间 Ω 中的某些子集构成的非空集类。集类是指以集为元素的集合。所以事件域 F 中的元素就是 Ω 中的某个子集，即随机试验 E 中的随机事件。

（4）概率的公理化定义

定义：若定义在事件域 F 上的一个集合函数 P 满足下列三个条件：

1° 非负性：$P(A)\geqslant 0,\forall\ A\in F$。

2° 规范性：$P(\Omega)=1$。

3° 完全可加性：若 $A_i(i=1,2,\cdots)\in F$，且两两互不相容时，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i) \tag{1-6}$$

则称 P 为概率。样本空间 Ω、事件域 F 和概率 P 构成的总体 (Ω,F,P) 称为随机试验 E 的概率空间。

在公理化定义中，概率是针对随机事件定义的。事件域 F 中的每个元素 A 都有一个实数 $P(A)$ 与之对应，这种从集合到实数的映射（记为 P）称为"集合函数"。

因此，公理化定义中，概率是定义在事件域 F 上的集合函数。

尽管对于每一个随机试验 E，都可以建立一个概率空间(Ω,F,P)与之对应，但概率的正规定义要涉及一个样本空间的详细说明。样本空间 Ω 的选定，事件域 F 的构造，概率 P 的规定，不仅要根据具体情况而定，而且有时很难确定。这些不是本书主要的讨论内容，所以本书所涉及的“概率空间(Ω,F,P)”均为预先给定的。

3. 概率的性质

给定概率空间(Ω,F,P)，从概率公理化定义的三个条件中，可推出概率的一些重要性质。

1° 不可能事件的概率为 0，即 $P(\varnothing)=0$。

2° 有限可加性：若 $A_i(i=1,2,\cdots)\in F$，且两两互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i) \tag{1-7}$$

3° 逆事件的概率

$$P(\overline{A})=1-P(A) \tag{1-8}$$

4° 单调性：若 $B\subset A$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B) \quad 且 \quad P(B)\leqslant P(A) \tag{1-9}$$

5° 加法公式

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1-10}$$

次可加性

$$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B) \tag{1-11}$$

一般的有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(A_i) \tag{1-12}$$

1.1.2 条件概率

1. 条件概率的定义

前面已经给出了概率的公理化定义，而实际应用中，除了考虑某个事件 A 的概率 $P(A)$外，还要考虑在“事件 B 已发生”这个条件下，事件 A 发生的概率。一般来说，后者与前者不一定相同。为了区别起见，把后者叫作条件概率，记为 $P(A|B)$。读做：B 条件下，A 发生的条件概率。下面导出条件概率的公式。

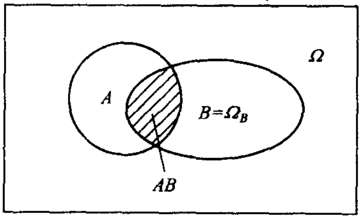


图 1.2 事件的条件概率

如图 1.2 所示，样本空间 Ω 中所有的样本