高职高专教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

主　编◎郑　喜　付大庆
副主编◎苑士华　刘　清

石油工业出版社

高职高专教材

高等数学

郑 喜 付大庆 主 编
苑士华 刘 清 副主编

石油工业出版社

内 容 提 要

本教材内容浅显易懂，共十一章。第一章至第六章是一元函数微积分学，内容包括函数、极限、连续，导数，导数的应用，不定积分，定积分，定积分应用。第七章和第八章是应用数学，内容包括微分方程和无穷级数。第九章至第十一章是多元函数微积分学，内容包括向量和空间曲面，多元函数微分学，多元函数积分学。

本教材适合高职高专院校各专业学生使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/郑喜，付大庆主编.
北京：石油工业出版社，2006.9
高职高专教材
ISBN 7-5021-5663-1

Ⅰ. 高…
Ⅱ. ①郑… ②付…
Ⅲ. 高等数学-高等学校：技术学校-教材
Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 093520 号

出版发行：石油工业出版社
(北京安定门外安华里 2 区 1 号　100011)
网　址：www.petropub.cn
发行部：(010)64210392
经　销：全国新华书店
印　刷：石油工业出版社印刷厂

2006 年 9 月第 1 版　2006 年 9 月第 1 次印刷
787×1092 毫米　开本：1/16　印张：17
字数：430 千字　印数：1—4000 册

定价：24.50 元
(如出现印装质量问题，我社发行部负责调换)

前　言

进入21世纪以来，高等职业教育突飞猛进地发展壮大。以服务为宗旨，以就业为导向的高等职业教育，作为高等教育和职业教育的一种类型，越来越清晰地表现出自身独有的特性。为满足深化高等职业教育教学改革，培养具有高素质、创新能力和实践能力的应用型、技能型人才的需要，我们编写了这本教材。在编写过程中，我们力争做到在吸取其他教材的先进思想、方法和经验的同时，突出高职教育的特点，编写出符合高等职业教学的教材。

本教材具有如下特点：

1. 以必须够用为原则，对各章节优化组合，使内容在紧密联系专业培养目标的同时，连贯紧凑。

2. 重点突出，难点简化，语言通俗易懂，由浅入深，循序渐进。

3. 突出理论联系实际，在例题和习题的选配上，尽量与学生所学的专业匹配，巩固学生所学的数学知识，并应用数学知识和手段解决专业课上遇到的问题。

4. 各章节均配有针对性的习题，以加强学生对概念、定理、公式的记忆，培养学生分析问题、解决问题的能力。

教材内容第一章、第二章和第三章由付大庆编写；第四章、第五章由苑士华编写；第六章、第七章由刘清编写；第八章、第九章和第十章由郑喜编写；第十一章由远近编写。全书由郑喜、付大庆任主编并统稿，苑士华、刘清任副主编，张俊寿和赵忠奎任主审。

各章所配的习题，第一章、第二章由付大庆编写；第三章、第四章由苑士华编写；第五章、第六章由张俊寿编写；第七章、第十一章由远近编写；第八章由臧丽英编写；第九章、第十章由赵丹编写。

由于编者水平有限，书中难免存在不足之处，恳请专家和广大读者批评指正，以便及时修订，使其日臻完善。

编者

2006年7月

目　　录

第一章　极限与连续……………………………………………………………………（1）
第一节　函数及函数的极限……………………………………………………………（1）
第二节　极限的运算和重要极限………………………………………………………（7）
第三节　无穷小与无穷大 ……………………………………………………………（11）
第四节　函数的连续性 ………………………………………………………………（15）
第二章　导数与微分 ……………………………………………………………………（21）
第一节　导数的概念 …………………………………………………………………（21）
第二节　函数的求导法则 ……………………………………………………………（26）
第三节　函数的微分及其应用 ………………………………………………………（29）
第四节　隐函数及参数方程确定的函数的导数 ……………………………………（34）
第五节　高阶导数 ……………………………………………………………………（37）
第三章　导数的应用 ……………………………………………………………………（41）
第一节　中值定理和洛必达法则 ……………………………………………………（41）
第二节　函数的单调性及极值 ………………………………………………………（48）
第三节　函数的最大值与最小值 ……………………………………………………（53）
第四节　曲线的凹凸与拐点 …………………………………………………………（56）
第五节　函数图形描绘及弧微分 ……………………………………………………（59）
第四章　不定积分 ………………………………………………………………………（63）
第一节　不定积分的概念与性质 ……………………………………………………（63）
第二节　第一类换元积分法 …………………………………………………………（68）
第三节　第二类换元积分法 …………………………………………………………（73）
第四节　分部积分法 …………………………………………………………………（78）
第五章　定积分 …………………………………………………………………………（82）
第一节　定积分的概念与性质 ………………………………………………………（82）
第二节　牛顿—莱布尼兹公式 ………………………………………………………（87）
第三节　定积分的换元法与分部积分法 ……………………………………………（91）
第四节　广义积分 ……………………………………………………………………（96）
第六章　定积分的应用…………………………………………………………………（100）
第一节　平面图形的面积……………………………………………………………（100）
第二节　旋转体的体积………………………………………………………………（106）
第三节　定积分在物理方面的应用…………………………………………………（110）
第四节　函数的平均值………………………………………………………………（113）
第七章　常微分方程……………………………………………………………………（115）
第一节　微分方程的基本概念………………………………………………………（115）

第二节　一阶微分方程……………………………………………………………………（117）
第三节　一阶微分方程应用举例………………………………………………………（121）
第四节　二阶常系数线性齐次微分方程的解法………………………………………（124）
第五节　二阶常系数线性非齐次微分方程的解法……………………………………（127）
第八章　无穷级数………………………………………………………………………（132）
第一节　数项级数的概念与性质………………………………………………………（132）
第二节　正项级数的审敛法……………………………………………………………（135）
第三节　任意项级数……………………………………………………………………（139）
第四节　幂级数…………………………………………………………………………（142）
第五节　函数的幂级数展开……………………………………………………………（146）
第六节　傅里叶级数……………………………………………………………………（151）
第七节　奇、偶函数的傅里叶级数 ……………………………………………………（156）
第八节　定义在[0,π]区间上的函数的傅里叶级数 …………………………………（159）
第九章　向量及空间曲面………………………………………………………………（164）
第一节　行列式的计算和空间直角坐标系……………………………………………（164）
第二节　向量的坐标表示………………………………………………………………（168）
第三节　向量的数量积与向量积………………………………………………………（171）
第四节　空间平面及其方程……………………………………………………………（176）
第五节　空间直线及其方程……………………………………………………………（179）
第六节　常见的曲面方程………………………………………………………………（183）
第十章　多元函数微分学………………………………………………………………（190）
第一节　多元函数的概念、极限与连续 ………………………………………………（190）
第二节　多元函数的偏导数……………………………………………………………（194）
第三节　全微分…………………………………………………………………………（199）
第四节　多元复合函数及隐函数的微分法……………………………………………（202）
第五节　偏导数的应用…………………………………………………………………（209）
第十一章　多元函数积分学……………………………………………………………（218）
第一节　二重积分的概念及性质………………………………………………………（218）
第二节　二重积分的计算法……………………………………………………………（221）
第三节　二重积分的应用………………………………………………………………（231）
第四节　三重积分的概念及计算………………………………………………………（235）
第五节　曲线积分………………………………………………………………………（243）
第六节　格林公式………………………………………………………………………（251）
第七节　曲面积分………………………………………………………………………（257）
参考文献…………………………………………………………………………………（264）

第一章　极限与连续

第一节　函数及函数的极限

一、函数概念

1. 函数的定义

定义：设D是一个实数集，如果对属于D的每一个数x，按照某个对应关系f，都有唯一确定的数值y和它对应，则y就叫做定义在数集D上的函数，记作$y=f(x)$，x叫做自变量，数集D叫做函数的定义域，当x取遍D中的一切实数时，与它对应的函数值的集合M叫做函数的值域。

2. 函数的定义域

函数的定义域可由函数表达式本身来确定，即确保运算有意义。

(1)在分式中，分母不能为零；

(2)在根式中，负数不能开偶次方根；

(3)在对数式中，真数不能为零和负数；

(4)在反三角函数式中，要符合反三角函数的定义域；

(5)如果函数表达式中含有分式、根式、对数式或反三角函数式，则应取各部分定义域的交集。

例1　求下列函数的定义域。

(1)$y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$

解　$4-x^2\neq 0$　$x+2\geqslant 0$

$x\neq\pm 2$　　$x\geqslant -2$

所以函数的定义域为：$(-2,2)\cup(2,+\infty)$。

(2)$y=\lg\dfrac{x}{x-1}$

解　$\dfrac{x}{x-1}>0$

$$\begin{cases}x>0\\x-1>0\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x<0\\x-1<0\end{cases}$$

得　$x>1$ 或 $x<0$

所以函数的定义域为：$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$。

(3)$y=\arcsin\dfrac{x+1}{3}$

解　$-1\leqslant\dfrac{x+1}{3}\leqslant 1$

$$-4\leqslant x\leqslant 2$$

所以函数的定义域为$[-4,2]$。

两个函数只有它们的定义域和对应关系完全相同时，这两个函数才被认为是相同的。例如：$y=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $y=1$ 定义域和对应关系都相同，所以它们是相同的函数。

又如，$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$与 $y=x+1$ 定义域不同，所以它们是不同的函数。

3．反函数

定义：设有函数 $y=f(x)$，其定义域是 D，值域为 M。如果对于 M 中的每一个 y 值($y\in M$)，都可以从关系式 $y=f(x)$确定唯一的 x 值($x\in D$)与之对应，则将所确定的以 y 为自变量的函数$x=\phi(y)$或 $x=f^{-1}(y)$叫做 $y=f(x)$的反函数，它的定义域为M，值域为 D。习惯上，函数的自变量都用 x 表示，所以反函数也表示成 $y=f^{-1}(x)$，函数 $y=f(x)$与它反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像关于 $y=x$ 对称。

4．函数的几种特性

(1)函数的奇偶性。

定义：如果函数 $f(x)$的定义域关于原点对称，且对任意 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$叫做奇函数；如果 $f(x)$的定义域关于原点对称，且对任意 x，都有 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$叫做偶函数。如果 $f(x)$既非奇函数又非偶函数，则 $f(x)$叫做非奇非偶函数。

例如：$f(x)=x^3$，$f(x)=\sin x$ 是奇函数；$f(x)=x^2$，$f(x)=\cos x$ 是偶函数；$f(x)=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数。

奇函数的图像关于原点对称；偶函数的图像关于 y 轴对称。不论是奇函数还是偶函数，它们的定义域必须关于原点对称。

例 2　判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$的奇偶性。

解　
$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln[-x+\sqrt{(-x)^2+1}]\\&=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})\\&=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\\&=\ln(x+\sqrt{x^2+1})^{-1}\\&=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)\end{aligned}$$

所以 $f(x)$为奇函数。

(2)函数的单调性。

定义：如果函数 $f(x)$在区间(a,b)内随着的 x 增大而增大，即对于(a,b)内任意两点 x_1及 x_2，当 $x_1<x_2$时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则函数 $f(x)$叫做在区间(a,b)内是单调增加函数，区间(a,b)叫做 $f(x)$的单调增加区间。

如果函数 $f(x)$在区间(a,b)内随着 x 的增大而减小，即对于(a,b)内任意两点 x_1及 x_2，当 $x_1<x_2$时有 $f(x_1)>f(x_2)$，则 $f(x)$叫做在区间(a,b)内是单调减少函数，区间(a,b)叫做$f(x)$的单调减少区间。单调增加和单调减少的函数都叫做单调函数。

例 3　证明 $f(x)=\dfrac{1}{x}$是在区间$(0,1)$内的单调减少函数。

解　在$(0,1)$内任取 x_1及 x_2，且 $x_1<x_2$

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}>0$$

$$f(x_1)>f(x_2)$$

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 是单调减少函数。

(3)函数的有界性。

定义：设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在一个正数 M，使得对于区间 (a,b) 内的一切 x 值，对应的函数值 $f(x)$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则 $f(x)$ 叫做在区间 (a,b) 内有界；如果这样的正数 M 不存在，则 $f(x)$ 叫做在区间 (a,b) 内无界。

例如：$f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，而 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内是无界的。

(4)函数的周期性。

定义：对于函数 $f(x)$，如果存在一个正数 L，使得对于定义域内的一切 x，等式 $f(x+L)=f(x)$ 都成立，则 $f(x)$ 叫做周期函数，L 叫做这个函数的周期。

显然，如果函数 $f(x)$ 以 L 为周期，则 $2L,3L,\cdots,nL$ 也是它的周期，通常最小正数 L 称为周期函数的最小正周期。

例如：函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数。

二、基本初等函数

幂函数 $y=x^a$(a 为实数)，指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$，对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$，三角函数、反三角函数统称为基本初等函数。

三、复合函数

定义：设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\phi(x)$，其定义域为数集 **A**，如果在数集 **A** 上对于 x 的每一个值所对应的 u 值，都能使函数 $y=f(u)$ 有定义，则 y 就是 x 的函数，这个函数叫做函数 $y=f(u)$ 与 $u=\phi(x)$ 复合而成的函数，称为复合函数。记作 $y=f[\phi(x)]$，其中 u 称为中间变量。

例 4　指出下列函数的复合过程和定义域。

(1) $y=\sqrt{1+x^2}$　　(2) $y=\arcsin(\ln x)$

解　(1) $y=\sqrt{u}$，$u=1+x^2$；(2) $y=\arcsin u$，$u=\ln x$。

定义域：(1) $-\infty<x<+\infty$；(2) $\frac{1}{e}\leqslant x\leqslant e$。

注意：不是任何的两个函数都能复合成一个复合函数。例如：$y=\arcsin u$ 及 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数。因为 $y=\arcsin(2+x^2)$ 没有定义。

四、函数的极限

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

例如：当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的变化趋势。由函数的图像(见图 1-1)可知：当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)\to0$。

定义 1：如果当 x 的绝对值无限增大时($x\to\infty$)，函数无限接近于一个确定的常数 A，则 A 就称做 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限。记作：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或当 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to A$。在极限的定义中，自变量的绝对值无限增大是指 x 既取正值无限增大，同时也取负值无限增大，但有时我们

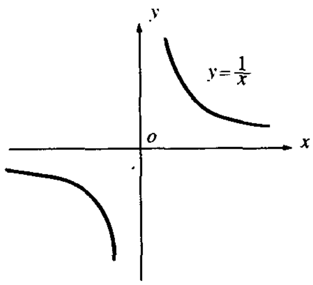

图 1 - 1

只考虑一种情形。

定义 2:如果当 $x\to+\infty$时(或当 $x\to-\infty$时),函数 $f(x)$无限接近于一个确定的常数 A,则 A 就叫做 $f(x)$当 $x\to+\infty$时(或当 $x\to-\infty$时)的极限。记作:$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} f(x)=A$ 或当 $x\to+\infty$时,$f(x)\to A$[或当 $x\to-\infty$时,$f(x)\to A$]。

例如:$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ 及 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$,$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$,$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$

而$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在。

例 5　求 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}$。

解　$\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$　$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$　而$\lim\limits_{x\to\infty}e^{x}$ 不存在

例 6　讨论当 $x\to\infty$时函数 $y=\text{arccot}x$ 的极限。

解　$\lim\limits_{x\to-\infty}\text{arccot}x=\pi$　$\lim\limits_{x\to+\infty}\text{arccot}x=0$

所以$\lim\limits_{x\to\infty}\text{arccot}x$ 不存在。

2. 当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$的极限

考察当 $x\to3$ 时函数 $f(x)=\frac{x}{3}+1$ 的变化趋势。

定义 3:如果当 x 无限接近于定值 x_0 时,即 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$无限接近于一个确定的常数 A,则 A 就称为 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限。记作:$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或当 $x\to x_0$ 时,$f(x)\to A$。

例 7　观察$\lim\limits_{x\to0}\sin x$,$\lim\limits_{x\to0}\cos x$。

解　由正弦和余弦函数的图形可知:$\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$,$\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$

例 8　考察极限$\lim\limits_{x\to x_0}C$(C 为常数)和$\lim\limits_{x\to x_0}x$。

解　由常函数 $y=C$ 的图形和 $y=x$ 的图形可知:$\lim\limits_{x\to x_0}C=C$,$\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$

3. 当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$的左极限与右极限

定义 4:如果当 $x\to x_0^-$ 时,函数 $f(x)$无限接近于一个确定的常数 A,则 A 就称为 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的左极限。记作:$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$,或当 $x\to x_0^-$ 时,$f(x)\to A$。如果当 $x\to x_0^+$ 时,函数 $f(x)$无限接近于一个确定的常数 A,则 A 就称为 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的右极限。记作:$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$,或当 $x\to x_0^+$ 时,$f(x)\to A$。

函数的左、右极限也可记作:$f(x_0-0)=A$;$f(x_0+0)=A$。一般地,如果当 $x\to x_0$ 时,函数的左极限与右极限各自存在并相等,即$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$,则函数的极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$也一定存在,且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$;反之,如果当 $x\to x_0$ 时,函数的极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在且等于 A,则$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$。

例 9　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ x+1 & x>0\end{cases}$ 当 $x\to0$ 时的极限。

解 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$

左、右极限都存在，但不相等，所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在。

例 10　讨论函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$当 $x\to -1$ 时的极限。

解 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}(x-1)=-2$

定理：（保号性定理）如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则一定存在 x_0 的某无心邻域，在这个邻域内 $f(x)>0$[或 $f(x)<0$]；反之，如果 $f(x)>0$[或 $f(x)<0$]，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）。

4. 数列 $x_n=f(n)$的极限

数列的极限可看作是自变量取自然数的函数 $f(n)$。

定义：如果当 n 无限增大时，数列 x_n 无限接近于一个确定的常数 A，则 A 就称为数列 x_n 的极限。记作：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 或 $n\to\infty$，$x_n\to A$。

例 11　观察下列数列的变化趋势（见图 1-2），写出它们的极限：

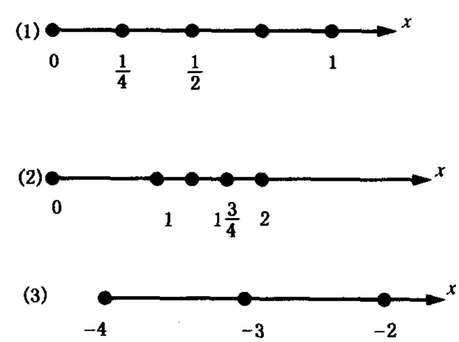

图 1-2

(1)$x_n=\dfrac{1}{n}$　　　　(2)$x_n=2-\dfrac{1}{n^2}$

(3)$x_n=(-1)^n\dfrac{1}{3^n}$　　　　(4)$x_n=-3$

解 (1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$　　　　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{n^2}\right)=2$

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{3^n}=0$　　　　(4)$\lim\limits_{n\to\infty}(-3)=-3$

必须注意：不是任何数列都有极限。例如 $x_n=2^n$ 就不存在极限。

例 12　求下列数列的极限：

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(4-\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)$　　　　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-n+1}{1+n^2}$

解 (1)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(4-\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)=4$

$$(2)\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+1}{1+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}+1}=3$$

当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$的极限的精确定义（$\varepsilon-\delta$ 定义）：

对于预先给定的任意正数 ε，总存在正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称常数 A 为 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限。

5. 无穷递缩等比数列的求和公式

例如：求等比数列$\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$，前 n 项的和 S_n，并求当 $n\to\infty$时 S_n 的极限。

解　$S_n=\dfrac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\dfrac{1}{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1-0=1$$

定义：等比数列 $a_1,a_1q,a_1q^2,\cdots,a_1q^{n-1},\cdots$，当 $|q|<1$ 时，称为无穷递缩等比数列。

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q},\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}\quad(|q|<1)$$

这个公式称为无穷递缩等比数列的求和公式。

例 13　将下列循环小数化为分数：

(1)$0.\dot{3}$　　(2)$0.3\dot{4}\dot{5}$

解　(1)$0.\dot{3}=0.333\cdots=0.3+0.03+0.003+\cdots$

$$=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{3}$$

(2)$0.3\dot{4}\dot{5}=0.3454545\cdots$

$$=0.3+0.045+0.00045+\cdots$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{45}{1000}+\frac{45}{100000}+\cdots$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{\frac{45}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{3}{10}+\frac{45}{990}=\frac{19}{55}$$

习题 1—1

一、指出下面几组函数中哪些是同一函数。

1. $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+3}$ 与 $g(x)=x-1$

2. $f(x)=\lg x^5$ 与 $g(x)=5\lg x$

3. $f(x)=\lg x^6$ 与 $g(x)=6\lg x$

4. $f(x)=(1-\sin^2x)^{\frac{1}{2}}$ 与 $g(x)=\cos x$

二、求下列函数的定义域。

1. $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$

2. $y=\sqrt{3-x}-\arcsin\dfrac{1}{x}$

3. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

4. $y=\sqrt{3-x^2}$

三、判断下列函数的奇偶性。

1. $f(x)=x\sin x$

2. $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$

3. $f(x)=a^x-a^{-x}$

4. $f(x)=\sin x+\cos x$

四、计算下列函数值。

1. $f(x)=\sqrt{x}$，计算$\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

2. $f(x)=\dfrac{1}{x}$，计算$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

五、求下列函数的反函数。

1. $y=e^{x-1}$

2. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$

3. $y=\arcsin\dfrac{1-x}{2}$

六、已知 $f(x)$是二次多项式，$f(x+1)-f(x)=8x+3$，且 $f(0)=0$，求 $f(x)$表达式。

七、设 $f(\sin x)=\cos 2x+1$，求 $f(\cos x)$。

八、指出下列各题中复合函数的复合过程。

1. $y=e^{2x-1}$

2. $y=\cos x^2$

3. $y=\sin^9 x$

4. $y=(2x-3)^{\frac{3}{2}}$

5. $y=\arcsin(5x+8)$

6. $y=a^{1-x}$

九、在半径为 r 的球内嵌入一个内接圆柱，试将圆柱的体积 V 表示为其高 h 的函数。

十、设火车从甲站出发，以 0.5km/min^2 的匀加速度前进，经过 2min 后开始匀速行驶，再经过 7min 后以 0.5km/min^2 匀减速到达乙站，试将火车在这一段行驶的路程 S 表示为时间 t 的函数，并作出其图形。

十一、观察如下数列的变化趋势写出它们的极限。

1. $x_n=\dfrac{1}{2^n}$

2. $x_n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

3. $x_n=\dfrac{n-1}{n+1}$

4. $x_n=n(-1)^n$

十二、将下面循环小数化成分数。

1. $0.\dot{2}$

2. $0.5\dot{4}\dot{6}$

第二节　极限的运算和重要极限

一、极限的四则运算法则

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$ 则：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$。

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}Cf(x)=C\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=CA$。

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=AB$。

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq0)$。

上述法则可推广到 $x\to\infty$的情形。

例 1 求$\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{3}x+1\right)$。

解 $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{3}x+1\right)=\frac{1}{3}\times 3+1=2$

例 2 求$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+5}{x^2+7}$。

解 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+5}{x^2+7}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+5)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+7)}=\frac{1-2\times 1+5}{1+7}=\frac{1}{2}$

例 3 求$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$。

解 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{6}$

例 4 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(2-\frac{1}{x^2}\right)\right]$。

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(2-\frac{1}{x^2}\right)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x^2}\right)=1\times 2=2$

例 5 求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$。

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}=\frac{3}{7}$

例 6 求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}$。

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}=0$

例 7 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$。

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$

例 8 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{4^n+1}$。

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{4^n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^{2n}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{2n}}}{1+\frac{1}{2^{2n}}}=0$

一般地，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0} & n=m\\ 0 & n<m\\ \infty & n>m\end{cases}$

二、两个重要极限

定理 1:(两边夹定理)设 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$ 且 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(当 $x\to\infty$ 时也成立)。

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

证明　在半径为 R 的圆中,作圆心角为 x 的角,则 $\triangle OAB$ 的面积 $<$ 扇形 OAB 的面积 $<\triangle OBD$ 的面积(见图 1-3)。

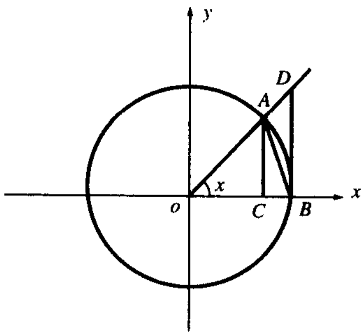

图 1-3

$$\frac{1}{2}OB\cdot AC<\frac{1}{2}OA\cdot\widehat{AB}<\frac{1}{2}OB\cdot BD$$

$$\frac{1}{2}R^2\sin x<\frac{1}{2}R^2x<\frac{1}{2}R^2\tan x$$

$$\sin x<x<\tan x\qquad \sin x>0$$

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$$

因为
$$\lim_{x\to 0}1=1\qquad \lim_{x\to 0}\cos x=1$$

所以
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

例 9　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$。

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x\cos x}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\cos x=2\times 1\times 1=2$

或者

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2$$

一般地,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{nx}=\dfrac{m}{n}$。

例 10　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$。

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$

例 11　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$。

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\times 1=\dfrac{1}{2}$

例 12　求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\dfrac{\pi}{2}-x}$。

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\dfrac{\pi}{2}-x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{\dfrac{\pi}{2}-x}=1$

定理 2:(极限存在定理)单调有界数列必有极限。

2. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

可以证明数列 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 是单调增加且有界数列,因此极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 存在,设为 e,所以极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$。

e 是个无理数,它的值是:e=2.718281828459045…

在极限式中,设 $z=\dfrac{1}{x}$,则 $x\to\infty$ 时,$z\to 0$,于是,极限式又可写成 $\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=\mathrm{e}$。

例 13 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$。

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2=\mathrm{e}^2$

例 14 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$。

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\left(-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

例 15 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}$。

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\frac{1}{\tan x}}=\mathrm{e}$

例 16 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+\frac{3}{2}}$。

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+\frac{3}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-2}{2x+1}\right)^{x+\frac{3}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-2}{2x+1}\right)^{-\frac{2x+1}{2}}\right]^{-1}\left(1+\dfrac{-2}{2x+1}\right)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

习题 1—2

一、计算下列极限。

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^2-a^2}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3+n}$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x+3)^{50}}{(2x-1)^{30}(x+1)^{20}}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$

8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{x+5}-2}{\sqrt{x+1}-2}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{(x+p)(x+q)}-x\right]$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}$

12. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

13. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^3+x}(3+\cos x)$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$

二、求 k 的值，使$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+k}{x-3}=4$。

三、若$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，求 a,b 的值。

四、若$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a,b 的值。

五、求下列极限。

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan 3x}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\tan 5x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$（$x$ 为不等于零的常数）

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$

8. $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}\sin\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

10. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$

六、求下列极限。

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2-x}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}n[\ln(n+2)-\ln n]$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x+2}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-2x}{3-x}\right)^{x+2}$

第三节　无穷小与无穷大

一、无穷小

1. 无穷小的定义

定义：如果当 $x\to x_0$ 时或 $x\to\infty$时，函数的极限为零，则函数称为当 $x\to x_0$ 时或 $x\to\infty$时的无穷小量，简称无穷小，记作 $\alpha=\alpha(x)$。

应该注意：一个函数是无穷小，必须指明自变量的变化趋势；不要把一个很小的常数说成