高等学校经济管理学科数学基础教材

高等数学（二）

线性代数、概率统计

姚孟臣　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.2，线性代数、概率统计/姚孟臣主编.
北京：高等教育出版社，2004.4
ISBN 7-04-013982-0

Ⅰ.高… Ⅱ.姚… Ⅲ.①高等数学—高等学校—
教材②线性代数—高等学校—教材③概率论—高等学校
—教材④数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第012774号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn

经　　销	新华书店北京发行所
印　　刷	河北省香河县印刷厂

开　　本	850×1168　1/32	版　　次	2004年4月第1版
印　　张	9.25	印　　次	2004年4月第1次印刷
字　　数	220 000	定　　价	11.90元

前　言

高等数学(包括微积分、线性代数、概率统计)是经济管理专业的一门基础课。根据高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革的总目标的要求,参照教育部有关自学考试的大纲,结合作者多年来为北京大学等院校讲授高等数学课程的实践,我们编写了这套教材。其中包括主教材《高等数学(一)微积分》、《高等数学(二)线性代数、概率统计》以及与之配套的《高等数学附册(习题分析与解答)》共三册。本书是主教材《高等数学(二)线性代数、概率统计》。

这套教材内容涵盖了教育部对经济管理专业《高等数学(一)》和《高等数学(二)》自学考试大纲的全部要求,并考虑到目前绝大多数综合大学和工程院校都设立了经济或管理学科的有关专业,但各校的不同专业方向对数学基础的要求有一定的差异。为此本书力图在学时不多的情况下,让读者了解或掌握高等数学中有关的重要概念、理论和方法以及它们的实际背景,从而建立正确的数学概念,学会使用数学的方法分析、描述、进而定量地解决经济管理学科中的一些实际问题。因此,教材的内容选取注意了科学性和系统性,广度和深度比较恰当,避免了大量的理论推导,更突出有关理论和方法的应用。

《高等数学(二)线性代数、概率统计》全书共分六章,内容包括:行列式、矩阵、线性方程组、随机事件及其概率、随机变量及其分布、数理统计初步。本书按章配备了适量的习题,供教师和学生选用。

本书可以作为一般院校经济管理各专业的数学基础课教材,

又可作为自学考试的高等数学(二)线性代数、概率统计课程的主教材使用。对于要求较高的文科类各专业,也可选用本书。

由于编者水平有限,加之时间比较仓促,书中难免有错误和疏漏之处,恳请广大读者批评指正。

编　者

2003年10月6日

于北京大学中关园

目　录

第一章 行 列 式

行列式是研究线性代数的一个重要工具，在线性方程组、矩阵中都需要用到行列式. 本章从二阶、三阶行列式出发，引出 n 阶行列式的概念，进而讨论 n 阶行列式的基本性质及其计算方法，最后介绍用 n 阶行列式解 n 元线性方程组的克拉默法则.

§1 行列式的定义

1.1 二阶、三阶行列式

二阶、三阶行列式是在研究二元、三元线性方程组的解时引出的一种数学符号.

对于二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

采用加减消元法，消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

同法消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

因此，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组(1.1)有惟一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为了便于记忆这个表达式，引进下面的记号.

定义 1.1 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为二阶行列式，它表示代数和

$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

其中 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$称为二阶行列式的元素，横排的称为行，纵排的称为列.

例如 $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\times4-(-1)\times3=11.$

根据定义，(1.2)式中两个分子可以分别记为

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

$$\boldsymbol{D}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

分母记为

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

称为方程组(1.1)的系数行列式.

于是，当 $\boldsymbol{D}\neq0$ 时，方程组(1.1)的惟一解可以表示为：

$$x_1 = \frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}}, \quad x_2 = \frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}}. \tag{1.3}$$

类似地，为了讨论三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.4}$$

的解，也可以由相应的三阶行列式简化表示.

定义 1.2 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 称为三阶行列式. 它表示代数和：

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \quad (1.5)$$

例 1 $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\times3\times(-2)+3\times1\times2+5\times1\times(-4)-5\times3\times2-2\times1\times1-3\times(-4)\times(-2) = -82.$$

对于三元线性方程组(1.4),令

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为方程组(1.4)的系数行列式,令

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{D}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{D}_2,\boldsymbol{D}_3$ 是把 $\boldsymbol{D}$ 中第 1,2,3 列分别换成常数项 b_1,b_2,b_3 得到的行列式.

用加减消元法可以验证:当系数行列式 $\boldsymbol{D}\neq 0$ 时,方程组(1.4)有惟一解

$$x_1 = \frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}}, \quad x_2 = \frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}}, \quad x_3 = \frac{\boldsymbol{D}_3}{\boldsymbol{D}}.$$

例 2 解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases}$$

解 这里

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 11 \neq 0,$$

故方程组有惟一解.

又

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 33, \quad \boldsymbol{D}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 11,$$

$$\boldsymbol{D}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & -5 \end{vmatrix} = -22.$$

因此,方程组的解为

$$x_1 = \frac{33}{11} = 3, \quad x_2 = \frac{11}{11} = 1, \quad x_3 = \frac{-22}{11} = -2.$$

为了把二阶、三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式,需要先介绍下面的预备知识.

1.2 排列与逆序

定义 1.3 由自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的一个有序数组,称为一个 n **级排列**.

例如 1234 和 2134 都是四级排列;25413 和 23415 都是五级排列.

由 $1,2,\cdots,n$ 组成的 n 级排列的总数为 $n!$. 所有这些排列中

只有一个排列 $123\cdots n$ 是按自然顺序排列的，称之为自然序排列.

定义 1.4 在一个 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，如果有较大的数 j_t 排在较小的数 j_s 的前面，则 j_tj_s 构成一个**逆序**. 一个 n 级排列中逆序的总数，称为该排列的**逆序数**，记作 $N(j_1j_2\cdots j_n)$.

逆序数是奇数的排列称为**奇排列**，是偶数的排列称为**偶排列**.

例如，在排列 25413 中，2 后面有 1 个数字比 2 小，5 后面有 3 个数字比 5 小，4 后面有 2 个数字比 4 小，故

$$N(25413)=1+3+2=6,$$

同法可求得 $$N(23415)=3.$$

排列 25413 是偶排列，排列 23415 是奇排列. 因 $N(12\cdots n)=0$，故自然序排列是偶排列.

例 3 写出由 1,2,3 这三个数码构成的所有三级排列，并确定它们的奇偶性.

解 由 1,2,3 这三个数码构成的三级排列共有 $3!=6$ 个，其排列情况如下：

排　列	逆序数	排列的奇偶数
123	0	偶排列
132	1	奇排列
213	1	奇排列
231	2	偶排列
312	2	偶排列
321	3	奇排列

其中偶排列有 3 个：123,231,312.

奇排列有 3 个：132,213,321.

例 4 求 n 级排列 $n(n-1)\cdots321$ 的逆序数.

解 因为在这个排列中，n 后面比它小的数有 $n-1$ 个，$(n-1)$ 后面比它小的数有 $n-2$ 个，…，3 后面比它小的数有 2 个，2 后面比它小的数有 1 个. 因此

$$N(n(n-1)\cdots 321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$$
$$=\frac{n(n-1)}{2}.$$

1.3 n 阶行列式的定义

观察三阶行式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

从中可以发现：

(1) 它的每一项都是不同行、不同列的三个元素的乘积，每一项除符号外可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，$j_1j_2j_3$ 为三级排列；

(3) 当 $j_1j_2j_3$ 取遍了三级排列(共 6 个)时，就得到三阶行列式的所有项(每项冠以的符号除外)共 $3!=6$ 个项；

(3) 每一项的符号是：当这一项中元素的行标按自然顺序排列时，如果对应的列标构成的排列为偶排列时冠以"+"号，为奇排列时冠以"−"号.

综上所述，作为三阶行列式的展开式中的一般项可以表示为

$$(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

因而，三阶行列式可简写成：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中"$\sum$"表示对所有的三级排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

根据三阶行列式的内在规律，我们给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.5 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列，构成的记号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 **n 阶行列式**. 它表示一个数值. 此数值是所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积的代数和. 各项的符号是：当这一项的行标按自然顺序排列后，如果对应的列标构成的 n 级排列是偶排列则冠以正号，是奇排列则冠以负号. 其一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

当 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍所有的 n 级排列时，得到代数和中的所有项，共有 $n!$ 个项.

n 阶行列式可简记为 $\boldsymbol{D}=|a_{ij}|$，用"$\sum$"表示对 $j_1j_2\cdots j_n$ 所有的 n 级排列求和，则 n 阶行列式可简写成

$$\boldsymbol{D}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \tag{1.6}$$

由上述定义可知：当 $n=2$ 时即二阶行列式，当 $n=3$ 时即三阶行列式. 一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

例 5 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

这种**主对角线**(从左上到右下的对角线)下方的元素全为零的行列式称为**上三角形行列式**.

解 据定义，得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2j_3j_4)} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}.$$

这个行列式有不少元素是 0，从而有很多项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 都等于零，我们只要把可能不为零的项找出来再相加就可以了. 先从零最多的第 4 行开始考虑，当 $j_4=1,2$ 或 3 时，$a_{4j_4}=0$，从而相应的项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 都等于零，于是只有 $j_4=4$ 这样的项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{44}$ 可能不为零；在这种项里，j_3 不能取 4(因为要求元素取自不同列)，又 $j_3=1$ 或 2 时，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{44}$ 等于零，因此，只有 $j_3=3$ 这样的项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{33}a_{44}$ 可能不为零；同理可知，j_2 只能取 2，j_1 也只能取 1，所以只有一项 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 可能不为零，其余所有的项都等于零，这项的列标所成排列 1 2 3 4 是偶排列，因此这项前面带正号. 所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

上式说明：4 阶上三角形行列式的值等于它的主对角线上元素的乘积. 显然上述分析过程对于 n 阶上三角形行列式也完全适用，因此有上三角形行列式的值等于它的主对角线上元素的乘积. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

由此看出，上三角形行列式是很容易计算的，因此在计算一个行列式时，常常把它化成上三角形行列式，这在下一节将详细讨论.

同理，可得**下三角形行列式**（主对角线上方的元素全为 0）

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，有**对角形行列式**（主对角线外的元素全为 0）

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

即上（下）三角形行列式（统称**三角形行列式**）、对角形行列式都等于主对角线上元素的乘积.

例 6 计算 n 阶行列式：

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-2} & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（次对角线上方的元素全为 0）.

解 与例 2 类似，此行列式只有次对角线上的元素的乘积 $a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$ 构成的这一项可能不为 0，其列标排列的逆序数

$$N(n\ n-1\cdots 321)=\frac{1}{2}n(n-1),$$

$$\boldsymbol{D}=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}.$$

由行列式的定义易知：一个行列式若有一行（列）的元素全为 0，则此行列式为 0.

§2 行列式的基本性质

为了简化行列式的计算，需要学习行列式的一些基本性质. 为简便起见，我们略去了部分性质的理论证明.

将行列式 $\boldsymbol{D}$ 的行与列互换，得到的行列式，称为 $\boldsymbol{D}$ 的转置行列式，记为 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{D}'$. 即

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \text{则} \quad \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1 行列式 $\boldsymbol{D}$ 与其转置行列式 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$ 相等.

例如

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}=10, \quad \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}=10.$$

这一性质表明，在行列式 $\boldsymbol{D}$ 中，行与列所处的地位是相同的，因此，凡是对行成立的性质，对于列也同样成立，反之亦然.

性质 2 交换行列式的两行(列)，行列式的值变号.

例如

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}=10,$$

交换 $\boldsymbol{D}$ 的 1,3 行得：

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix}=-10.$$

即 $\boldsymbol{D}_1=-\boldsymbol{D}$， 或 $\boldsymbol{D}=-\boldsymbol{D}_1$.

推论 如果行列式有两行(列)的对应元素相同,则行列式等于零.

因为把行列式 D 中相同的两行(列)互换,其结果仍是 D,但由性质 2 可知其结果应为 $-D$,因而有 $D=-D$,即 $2D=0$,所以 $D=0$.

性质 3 用数 k 乘行列式的一行(列),其结果等于用数 k 乘以原行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例如 $D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}=10$,用 2 乘以 D 的第一行,得

$$\begin{vmatrix} 2\times 2 & -4\times 2 & 2\times 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 20 = 2D.$$

推论 1 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式外面.

例如

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

推论 2 如果行列式有两行(列)的对应元素成比例,则行列式等于零.

因为把成比例的两行(列)元素中的一行(列)提出某个公因子,可使这两行(列)完全相同,由性质 2 之推论可知,该行列式必