

弹性地基梁的三角级数解法

杨维加 著

TU348

3

弹性地基梁的三角级数解法

杨维加 著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

书中建立了一整套弹性地基梁计算的新方法——三角级数法。与传统的各种方法相比,三角级数法具有适用范围广、计算简便、精度较高的优点。该方法有效地解决了空间问题、有限深地基、邻近梁、变截面梁、边荷载作用等弹性地基梁计算的一系列难题。书中附有丰富的例题,并与传统方法的计算结果进行了比较。

本书可供水利、铁道、交通、建筑等部门的土建技术人员使用,还可供大专院校有关专业师生作教学参考书使用。

图书在版编目(CIP)数据

弹性地基梁的三角级数解法/杨维加著. —北京:中国水利水电出版社, 2005

ISBN 7-5084-2960-5

I. 弹... II. 杨... III. 弹性地基—梁—三角级数
—计算方法 IV. TU348.01

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 051819 号

书 名	弹性地基梁的三角级数解法
作 者	杨维加 著
出版 发行	中国水利水电出版社 (北京市三里河路 6 号 100044) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 63202266 (总机)、68331835 (营销中心)
经 售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	北京市地矿印刷厂
规 格	850mm × 1168mm 32 开本 6.375 印张 171 千字
版 次	2005 年 6 月第 1 版 2005 年 6 月第 1 次印刷
印 数	0001—1200 册
定 价	18.00 元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

序

弹性地基梁的计算是一个较为古典和实用的课题，近百年来，国内外许多学者已进行过大量的研究，针对不同类型的弹性地基梁，提出了相应的计算方法，并得到广泛应用。这些方法各有特色，但在使用中也各有制约条件。

我并不认识本书作者，但有幸先睹他的大作，颇有启发。首先，感到作者不满足于套用成法，勇于在这个领域进行有益的探索和研究，提出了一整套统一、简便、实用的计算方法，丰富了弹性地基梁的计算理论。在科技、工程领域中，“不满现状”、“开拓创新”、“锲而不舍”的研究精神是非常可贵的。

其次，作者采用的方法是合理的。从原则上说，弹性地基梁的解法都建立在梁与地基的变形相容条件上，计算中都要拟定两者间接触反力分布的数学表达式，其中含有一些待定系数，然后利用相容条件建立方程组解算。采用不同的反力表达式和不同的相容条件匹配方程式，就有了不同的解法，并会使计算工作量和成果精度有很大差异。以往人们常将接触反力以幂级数或离散的变量表示，本书则以三角级数表示，这样在计算中就可以利用三角级数在数学上的特性，简化工作。笔者在阅读这本书稿时，不禁想起四十年前的往事，那时笔者也

注意到这个问题，组织了一些同志探究，也取得初步成果。但接着就发生“文化大革命”，工作中断，已发表的成果也无人理睬，成为一件憾事。这个遗憾却在今天由作者独立地、十分完美地弥补了，笔者内心愉悦难以言表。这也说明只有在当今盛世，科技才能得到最充分地发展。

最后还有点想法，现在计算手段日新月异，许多十分复杂的结构都可以进行详细分析，这是件大好事。但有些同志认为一切都可以靠计算机和软件解决，对理论研究、计算方法的改进和实用图表的编制都不热心了，这是一种误解。有许多结构（像弹性地基梁）不必也不便上计算机，完全可以在纸上解决。而计算手段再进步，心算、笔算的本领却永远是需要和应加以锻炼的，正如有了宇宙飞船，两条腿仍不能放弃一样。所以，做一点必要的手算，研究一点有关的问题，编印一些实用的书籍图表，还是十分有益的。因此我很赞赏这本书的出版，并乐意为之编写序。

潘家铮

2005年3月26日



本书成稿于 10 年前。并在其后期间，不断进行了补充和完善。弹性地基梁计算虽然是一个较为古典的课题，已有了许多计算方法，可满足工程实际应用，但总体上看，各种方法差异较大，有的计算较为繁琐。工程技术人员面对实际问题时，首先要判别弹性地基梁的类型，然后再选择适当的计算方法；许多较为复杂的实际问题，即使选择了适当的计算方法，其计算过程依然是艰难而繁琐的。本书旨在为弹性地基梁提供一个通用、简便、实用且具有较高精度的计算方法。书中在建立基本方程时，其数学推导过程可能略显冗长，但其结果应用起来却简洁明快；不喜欢数学推导的读者大可省去过程而直接使用其结果。本书可作为弹性地基梁计算的教材和工具书使用。

承蒙潘家铮院士在百忙中对本书进行了审阅，给予了肯定，并编写序言，在此致以衷心的感谢！同时衷心感谢中国水利水电出版社的编辑们对本书的出版所付出的努力，也衷心感谢对本书的出版给予大力关心和支持的四川乐山市水利电力建筑勘察设计研究院冯纯富院长。

著者

2005 年 3 月

目 录

序 前言

第1章 概论.....	1
1.1 弹性地基梁的分类	1
1.2 弹性地基梁的计算方法综述	4
1.3 本书所采用的计算方法.....	14
第2章 半无限地基梁——平面问题	19
2.1 基本公式.....	19
2.2 等截面梁——对称荷载计算.....	26
2.3 等截面梁——反对称荷载计算.....	51
2.4 几个问题的讨论.....	72
2.5 变截面梁计算.....	75
第3章 半无限地基梁——空间问题	95
3.1 空间问题的简化.....	95
3.2 等截面梁——对称荷载计算.....	98
3.3 等截面梁——反对称荷载计算	108
3.4 边荷载计算	115
3.5 变截面梁计算	119
第4章 有限深地基梁.....	123
4.1 法向压力作用下的沉陷计算	123
4.2 对称基函数计算	125
4.3 反对称基函数计算	135
4.4 边荷自由项计算	140

第5章 弹性地基梁的两个特殊问题.....	156
5.1 弹性地基上的邻近梁计算	156
5.2 弹性地基上的铰接梁计算	163
第6章 温开尔地基梁.....	175
6.1 经典方法	175
6.2 三角级数法	183
参考文献.....	193

第 1 章

概 论

1.1 弹性地基梁的分类

基础梁是工程中广泛采用的基本受力构件之一。基础梁承受上部荷载，并通过梁与地基面的接触，将荷载扩散到地基中去，以减小直接由荷载在地基上产生的压力强度。基础梁还可将上部建筑联系起来，构成框架结构，增强建筑物的整体刚度和稳定性。当地基可视为弹性材料时，这就是弹性地基梁。本书后面所说的地基，均是指弹性地基，所说的地基梁，均是指弹性地基梁。在水工结构、铁道、交通工程和工业、民用建筑中，设置基础梁的例子很多。如水闸底板、挡土墙、各种条型基础、地下涵洞，一些建筑物的底板、侧墙等，都可视为基础梁来计算。图 1-1 (a) 是水闸结构示意图，图 1-1 (b) 是其底板的计算简图。

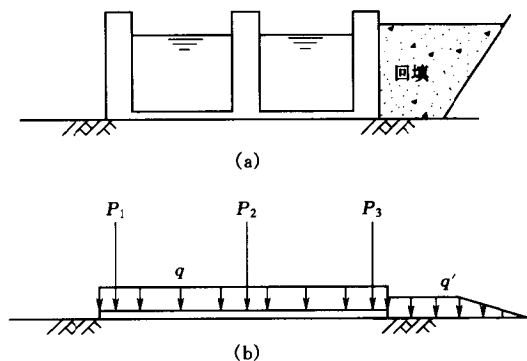


图 1-1

(a) 水闸；(b) 计算简图

基础梁总是要设置在地基上的。地基的特性，决定了地基的计算模型和计算方法。因此，弹性地基梁的分类，首先应从地基着手。

一、按地基的压缩层厚度分

如图1-2所示，设基础梁长为 $2l$ ，地基压缩层厚度为 H ，则比值 H/l 是划分地基特性的重要指标。根据这一指标，地基可划分为下列三种类型：

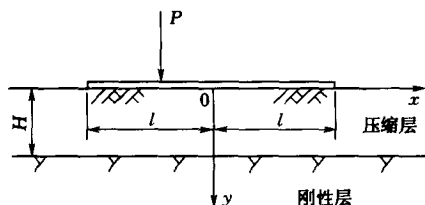


图 1-2

- (1) 温开尔地基： $H/l \leq 0.5$ ；
- (2) 半无限体地基： $H/l > 0.5$ ；
- (3) 有限深地基： $0.5 < H/l \leq 5$ 。

二、按地基的空间性质，可分为平面问题和空间问题

1. 平面问题

平面问题又可分为平面应力问题和平面变形问题。如图1-3所示，放置于一片狭长地基上的梁，荷载作用在地基和梁所在的平面内，是属于平面应力问题；如图1-4所示的结构，由于长度很大，荷载沿长度的分布基本不变，则结构的中央部分可视为平面变形状态，在实际计算中，通常截取单位宽度的一条结构及地基作为研究

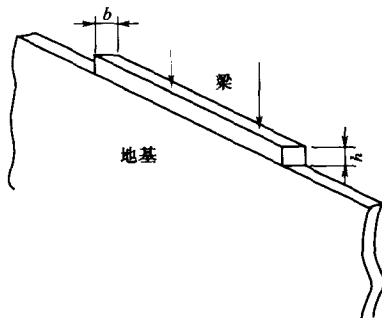


图 1-3 平面应力问题

对象，这就是所谓的弹性地基上的截条梁计算。

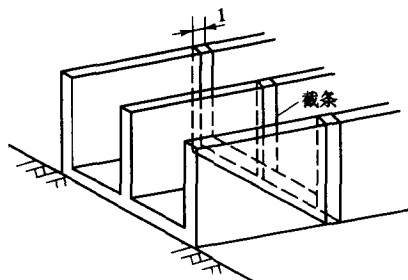


图 1-4 平面变形问题

从弹性理论知道，两类平面问题是通过弹性常数的变换而相互转换的。设梁和地基的弹性模量分别为 E 、 E_0 ，泊松比分别为 ν 、 ν_0 ，弹性模量作如下变换：

$$\left. \begin{aligned} E^* &= E / (1 - \nu^2) \\ E_0^* &= E_0 / (1 - \nu_0^2) \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

就将平面应力问题转换为平面变形问题了。

平面应力问题虽然在实际中并不常见，多数问题都是属于平面变形问题，但是为了简化书写起见，本书中所述的平面问题，均是指平面应力问题。对于平面变形问题，只要在平面应力问题的公式中，令梁宽 $b=1$ ，以 E^* 、 E_0^* 替换 E 、 E_0 就行了。

2. 空间问题

如图 1-5 所示，当一条梁置于无限大地基平面上时，地基处于空间应力状态，基础梁的计算就是属于空间问题。任何单独置于地基上的条形基础，都是属于空间问题的。

除温开尔地基外，我们把地基视为均质、连续的弹性体。对于岩基和混凝土地基，这是足够精确的。对于土质地基，情况有所不同。首先，土壤不是严格的弹性体，它在受压后有一部分永久变形；其次，土壤不是各向同性的，它几乎不能承受拉力。但实际的基础梁都是传递压力的，地基通常是处在受压状态。因

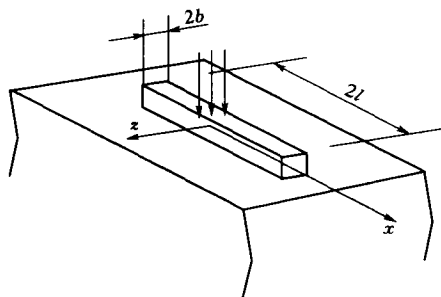


图 1-5 空间问题

此，只要通过试验，求出土壤的压缩模量 E^* ，用来代替弹性模量，就仍可采用连续弹性体的理论来计算基础梁。确定土壤压缩模量的方法，可参阅有关文献。

土壤所受的压力超过一定数值，就会产生流动而进入塑性状态，弹性计算方法便失去意义。但基础设计中，总是要对基础压力有所限制，防止在大范围内的地基进入塑性状态。这正是基础设计的任务之一。

三、按梁本身来分，可分为等截面梁和变截面梁

必须指出，本书中所指的截面，是指截面的抗弯刚度 EI ，其中 I 为截面的惯性矩。若按严格的称呼，应是等抗弯刚度梁和变抗弯刚度梁，但为了与习惯上的称呼一致，仍称为等截面梁和变截面梁。但必须与材料力学中的概念相区别，前者具有更为广泛的含义。

四、按荷载作用方式，可分为梁荷载梁和边荷载梁

梁荷载是直接作用于梁上的荷载，如图 1-1 (b) 中的 q 、 P_1 、 P_2 、 P_3 ；边荷载是指作用于梁两端延长线上的荷载，如图 1-1 (b) 中的 q' 。

1.2 弹性地基梁的计算方法综述

弹性地基梁的计算是一个经典而又富有生命力的课题，在工

程中具有重要意义。弹性地基梁计算的关键，就是要确定梁下地基反力分布函数 $p(x)$ ，如图 1-6 (a) 所示。这一步是很困难的。一旦反力 $p(x)$ 确定，就可以按照材料力学的方法，计算梁的内力和变形。人们最先假定地基反力是线性分布的，如图 1-6 (b) 所示，这样，根据静力平衡条件就可以确定反力的值。这种方法完全置地基的特性不顾，其结果基本不能反映梁和地基的实际工作状态，误差是难免的。但由于其计算简便，直到现在，在一些不重要的基础梁设计中，还常常采用这个方法。

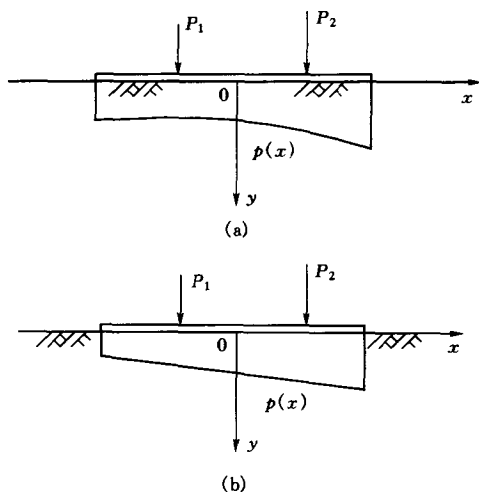


图 1-6

(a) 地基反力；(b) 反力线性假定

弹性地基梁比较合理、实用的计算方法，是近百年来经过无数学者的精心研究后才逐步发展、完善起来的。这些方法可以分为两大类：第一类将地基视为温开尔地基，采用温开尔假定来计算；第二类将地基视为均质、连续弹性体，采用弹性理论的方法来计算。今天已可根据不同的条件，选择适当的方法来进行基础梁的计算。回顾一下弹性地基梁的各种计算理论和方法，对于学

习本书的方法是有利的。

一、温开尔地基梁

1801年，俄罗斯学者首先提出了一个较为进步的假定：单位长度上的基础梁地基反力 p 与地基沉陷成正比。1867年，捷克学者温开尔进一步将这个假定推广为：地基单位面积上所受的压强 p 与地基沉陷 y 成正比，用公式表示为：

$$p = k_0 y \quad (1-2)$$

式中： p 为地基所受压力或地基反力 (kPa)； y 为沉陷 (m)； k_0 为地基的弹性抗力系数 (kN/m^3)。这就是著名的温开尔假定，具有这种性质的地基，称为温开尔地基。

根据温开尔假定，可导出梁的平衡微分方程如下：

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) + ky = q(x) \quad (1-3)$$

对于等截面梁，式(1-3)简化为：

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + ky = q(x) \quad (1-4)$$

式中： EI 为梁的抗弯刚度； $q(x)$ 为梁上的荷载集度（如图1-7所示）； $k = k_0 b$ (b 为梁底宽) 为单位长度上地基的弹性抗力系数 (kN/m^2)。从微分方程出发，考虑梁的边界条件后，即可求出梁的变形和内力。

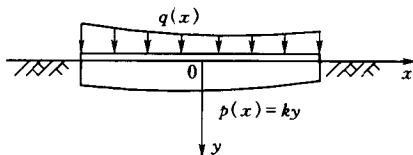


图 1-7 温开尔地基梁

温开尔地基梁经过许多学者的研究，特别是克雷洛夫提出初参数法后，已经发展成为一个较为完善的理论，能够解决各种复杂的问题。这一理论在水工、铁道、建筑等领域得到了广泛应用。但是，这一理论在求解复杂荷载作用时，计算较为繁琐，变

截面梁的计算也是一个大难题。

温开尔地基并不是一个完美的地基模型。首先，温开尔假定忽略了地基的连续性，实际上将地基视为无穷多个独立工作的弹簧系统，如图 1-8 (a) 所示，地基的沉降只在荷载作用处发生，如图 1-8 (b) 所示。其次，按温开尔假定，地基的弹性抗力系数 k_0 为一常数，而实际上在同样的压力作用下，地基的沉降还与受压面积有关，不可能通过试验求出一个适当的 k_0 值。例如基础梁边荷载作用，按照温开尔假定，将不会对梁产生任何反应。只有在坚硬基础上的薄层压缩层情况下，温开尔假定才接近实际。大量计算表明：当 $H/l < 0.5$ 时，按温开尔假定计算的结果，才是可以接受的。

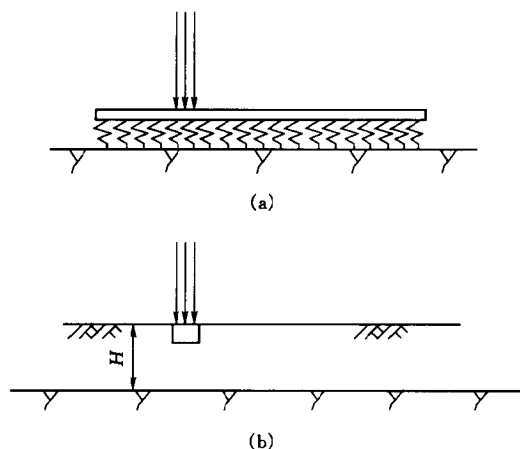


图 1-8 温开尔地基梁

二、弹性理论的方法

温开尔假定的缺点，1919 年首先为普罗克斯所指出，并建议将地基视为半无限均质、连续弹性体，应用弹性力学的方法，考虑梁和地基的接触条件来计算基础梁。如图 1-9 所示的等截梁，在荷载 $q(x)$ 作用下，地基反力为 $p(x)$ ，则梁的挠曲微分方程是：

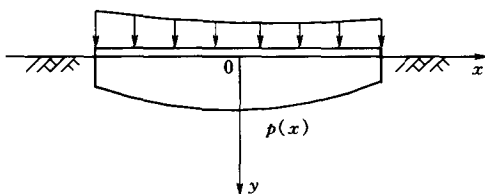


图 1-9

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x) - p(x) \quad (1-5)$$

考虑梁和地基的接触条件，有：

$$v(x) = y(x) \quad (1-6)$$

式中： $y(x)$ 为梁的挠度，由式(1-5)确定； $v(x)$ 为地基在梁底压力（即地基反力） $p(x)$ 作用下产生的沉陷，可通过对弹性理论中半无限体表面在集中荷载作用下的基本解积分而得。如果能求出一个反力函数 $p(x)$ ，使它既满足接触条件[式(1-6)]，同时又满足静力平衡条件和边界条件，那么这个反力就是实际的地基反力，或理论解。但是由于数学上的困难，只有在极个别的情况下（完全刚性梁和集中荷载作用下的长梁），才得到了理论解答。因此，人们转而寻求近似解答。而一些实用的近似方法，是从20世纪30年代以后，经过许多国内外学者的努力，才逐步发展起来的。这些方法又可分为两类：半解析方法和数值方法。

1. 半解析方法

半解析方法通常采用幂级数法，即将地基反力用 N 次幂多项式来表示：

$$p(x) = \sum_{i=0}^N a_i x^i \quad (1-7)$$

然后，根据静力平衡条件和接触条件来确定式中的系数 a_i 。

(1) 佛罗林—西姆武利迪方法。式(1-7)中共有 $N+1$ 个待定系数，佛罗林提出，取 $N-1$ 个点满足接触条件[式(1-6)]，

加上两个平衡条件,可建立 $N+1$ 个方程,即可确定 $N+1$ 个系数 a_i 。像这样选择若干个点满足某一条件来建立方程组的方法,在数学上称为配点法,但其计算工作量随 N 的增大而急剧增加。实际计算中, N 常取到 3 为止,称为简单幂级数法。据此,西姆武利迪利用梁和地基中点的接触条件,导出许多简单实用的计算公式。中国潘家铮以较为简捷的方法重新推导了这些公式^[4]。

对于简单幂级数法,常常以其他条件来替代接触条件 [式 (1-6)]。如线余面积相等条件,管冰根据这一条件,推导了解系数 a_i 的通用方程组^[8]。简单幂级数法所取的项数较少,精度受到限制,但由于其计算较为简便,许多情况下其计算结果接近于其他更为精确的解答,因此至今设计者仍乐于采用。

(2) 最小二乘法和混合法。最小二乘法不是采用配点的方法来建立方程,而是通过调整系数 a_i 的值,使 y 和 v 之差的平方的积分取最小值,这样建立一组方程,加上平衡条件,即可确定各 a_i 值。这种方法具有较好的效果,可用较少的项数而得到较满意的结果。但计算工作量较大,一般不常采用。

混合法是综合了上述几种方法,采用混合条件来建立若干方程,加上平衡条件,来求解系数 a_i ,在同样的项数下,以最少的工作量,获得较满意的结果。这种方法适合于所取项数较多的情况,具体计算也较为繁琐。

(3) 郭尔布诺夫—泊沙道夫方法 (以下简称郭氏法)。郭氏法采用折算坐标 $\xi = x/l$,将地基反力表示为 ξ 的 10 次幂多项式:

$$p(\xi) = \sum_{i=0}^{10} a_i \xi^i \quad (1-8)$$

分别求出 $v(\xi)$ 、 $y(\xi)$ 表达式,代入接触条件 [式 (1-6)] 中,方程两边自然含有各系数 a_i ,然后令 ξ 的同次幂的系数相等,可得到一组方程,加上平衡条件,从而确定各系数 a_i 。像这样通过令方程两边同次幂系数相等来建立方程的方法,在数学上称为比较系数法。

郭氏法由于取用了较多的项数来表示地基反力,因而具有较高