配全日制普通高级中学教科书使用

QIANTIWANG
JIEFADADIAN

千题王

解法大典

知识方法　分类全解

知识同步分类
方法要点剖析
诠释解题规律

高一数学

延边人民出版社

金牌丛书 延边达标王系列

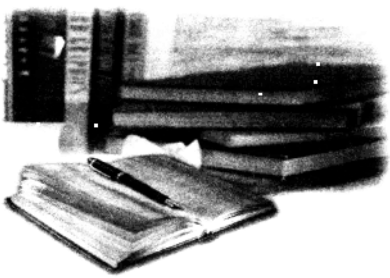
配全日制普通高级中学教科书使用

解法大典

知识方法 分类全解

主　编　何成立

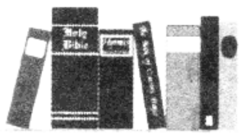
编　著　林华春　魏　海　何成立



高一数学

延边人民出版社

责任编辑： 许正勋
责任校对： 袁明红



解法大典

高一数学

主编：何成立

出　版　延边人民出版社　（吉林省延吉市友谊路363号，**http://www.ybcbs.com**）
发　行　延边人民出版社
印　刷　武汉市新华印务有限公司

890×1240 毫米　32 开　印张 25.25　字数 560 千字
2005年8月第1版　2005年8月第1次印刷

ISBN 7-80698-536-0 / G · 393
全套定价：30.00元（本册10.00元）

千锤百炼　解法大典

“学好数理化，走遍天下都不怕。”数理化一直是中学生学习中的难点，为了很好地解决“数理化难学”的问题，我们特邀国内多所名牌中学特级教师、教学专家，精心编写了大型系列丛书《解法大典》。

新题　科学　精细

数理化具有很强的逻辑性、系统性，梳理知识尤为重要。作者将各学科基础知识、基本题型、基本方法按现行教材的章节顺序和最新《教学大纲》、《考试说明》、《课程标准》的精神进行了科学的概括、提炼、分类研究，既注重知识的系统性和完整性，又考虑到各类问题的特殊性和相对独立性，设计专题研究，专题解析。

精练　典型　实用

编者吸取百家之精华，知识提炼、例题选取改变目前某些教辅选题的随意性、杂乱性、重复性、跳跃性等问题，力求学科知识的系统性、典型性、针对性、技巧性、新颖性；并选入了一定数量与生产、生活、科技相结合的研究性例题；所选例题精练、典型，涵盖了高中（初中）阶段必须掌握的所有知识内容和基本方法。

引领思路 探求方法 点拨技巧

《解法大典》具有《题典》的所有功能，但它不同于一般的《题典》，《解法大典》除了对知识内容、典型例题进行精细的分类外，还有系统的方法指导；各类经典例题都有【解法指导】、【解法概要】或【解法总结】等，且编写形式灵活，其目的是为了使学生在系统地掌握基础知识的同时，创造性地领悟各类题型的分析方法与解题技巧，达到触类旁通、举一反三的学习效果。

本套书是我们挖掘近百位中学教学专家几十年来的教学成果与积累，倾情奉献给广大读者的最经典、最新颖、最实用的数理化学法、解法指导书，书中内容曾在全国各地重点中学交流试用，反响强烈，深受师生喜爱。我们坚信这套书的出版，定能受到广大中学师生的加倍青睐。

《解法大典编》写组

目录 MULU

高一数学

第 1 章 集合与简易逻辑

知识结构网络图

- 集合与简易逻辑
  - 集合
    - 集合的概念
    - 集合与集合间的关系
    - 集合与集合间的运算关系 → 文氏图法、数形结合。
  - 含绝对值不等式的解法 → 公式法、几何法、零点法、平方法
  - 一元二次不等式的解法
    - 一元二次不等式解法 → 公式法、同解法、分类讨论法、移项法、数形结合
    - 二次函数的区间最值 → 定区间与定轴、定区间与动轴、动区间与定轴、动区间与动轴
    - 一元二次方程根的分布 → 图像法
    - 二次函数与绝对值不等式 → 1.分类讨论法 2.公式法 3.特值法 4.恒等式法 5.反证法
  - 简易逻辑
    - 简易逻辑 → 1.真值表法 2.反证法 3.等价法 4.举反例法
    - 充要条件

§1.1 集　合

(一)集合的概念

解法概要

内容：

一、集合的有关概念

1. 集合的概念与特征

集合是数学中最原始的概念之一，我们不能用其他更基本的概念来给它下定义，所以，也把它叫做不定义的概念或原始概念，一般只加以描述说明.

集合中的元素具有三个特性：

(1)确定性：任何一个对象都能被确切地判断是集合中的元素或不是集合中的元素.

(2)互异性：同一集合中不应重复出现同一元素.

(3)无序性：用列举法表示的集合中的元素与顺序无关，但在表示某些无限集时，书写时应显示其规律并用省略号代表其余的元素.

2. 集合的分类

(1)有限集：集合中元素的个数是有限的.

(2)无限集：集合中元素的个数是无限的.

(3)空集：集合中没有任何元素.

空集是一个特殊的集合，虽然它不含有元素，但不要把空集 $\varnothing$ 与数 0、集合 $\{0\}$ 相混淆，数 0 不是集合，而集合 $\{0\}$ 是含有一个元素 0 的集合.

3. 集合的表示方法

(1)列举法：把给定集合中的元素不重不漏、不计次序地一一列举出来，放在集合符号“{　}”内.

(2)描述法：其表示集合的形式为 $\{x \mid P\}$，竖线前面的 x 是此集合的代表元素，竖线后面的 P 指出元素 x 所具有的公共属性.

两种表示集合的方法各有优点，选用哪种方法，要视具体情况而定.

4. 常用的数集符号表示

N——自然数

Z——整数集；

Q——有理数集；

R——实数集；

N^*(或 N_+)——正整数集.

5. 元素与集合的关系

元素与集合的关系有属于($\in$)或不属于($\notin$)两种，且只有这两种关系. 元素与集合的关系可形象地比喻为“个体与集体”的关系.

二、集合中表示关系的概念分两类：

1. 表示元素和集合之间的关系，有属于“$\in$”和不属于“$\notin$”两种情形.

2. 表示集合与集合之间的关系

(1)包含关系

①子集：如果 $a\in A\Rightarrow a\in B$，则集合 A 是集合 B 的子集，记为 $A\subseteq B$，或 $B\supseteq A$，显然 $A\subseteq A$，$\varnothing\subseteq A$

②全集：如果集合 S 含有我们所研究的各个集合的全部元素，这个集合就可以看作一个全集. 全集通常用 U 表示.

(2)相等关系

对于两个集合 A、B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，那么集合 A、B 相等，记作 $A=B$.

(3)真子集关系：对于两个集合 A 与 B，若 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$，则集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$.

(4)不包含关系：用 $\not\subseteq$ 表示.

三、空集

1. 空集 $\varnothing$ 是指不含任何元素的集合，它是任何一个集合的子集，是任何一个非空集合的真子集.

2. 集合$\{\varnothing\}$不是空集：$\varnothing\in\{\varnothing\}$、$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$、$\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$三种表示法都是对的.

四、有限集的子集、真子集的个数

关于有限集的子集个数有下列结论：若有限集 A 中有 n 个元素，则 A 的子集个数有 2^n 个，即 $C_n^0+C_n^1+\cdots C_n^n=2^n$；非空子集有 2^n-1 个；真子集有 2^n-1 个.

题型与方法

【例 1】 判断下列说法是否正确？说明理由

(1)某个村里的年青人组成一个集合.

(2)所有的很小的正数组成集合.

(3)$1,\frac{3}{2},\frac{6}{4},\left|-\frac{1}{2}\right|,0.5$ 这些数组成的集合有 5 个元素.

(4)集合$\{1,3,5,7\}$与集合$\{3,1,7,5\}$表示同一个集合.

【解析】 本题主要应用元素的三大性质来判断，(1)(2)中的“年青人”和“很小正数”没有明确标准，不具备确定性，故(1)、(2)说法是错误的，(4)适合元素的无序性，故正确.

方法小结：本题主要考查了集合的三个性质：确定性、互异性、无序性.

【例 2】 已知集合 $P=\{x\mid x=n,n\in N\}$，$Q=\{x\mid x=\frac{n}{2},n\in Z\}$，$R=\{x\mid x$

$=\frac{1}{2}+n,n\in Z\}$，则下列结论正确的是(　　)

A. $Q\subsetneqq P$　　B. $Q\subsetneqq R$　　C. $Q=P\cup R$　　D. $Q=P\cap R$

分析：本题考查集合与集合之间的关系.

解：当 $n=2k(k\in Z)$ 时，$x=\frac{n}{2}=k(k\in Z)$

当 $n=2k+1(k\in Z)$ 时，$x=\frac{n}{2}=k+\frac{1}{2}\quad(k\in Z)$

$\therefore Q=\{x\mid x=k$ 或 $k+\frac{1}{2},x\in Z\}=P\cup R$

故选 C.

【例 3】 已知集合 $M=\{x\mid x=m+\frac{1}{6},m\in Z\}$，$N=\{x\mid x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3},n\in Z\}$，$P=\{x\mid x=\frac{p}{2}+\frac{1}{6},p\in Z\}$，则 M,N,P 满足关系(　　)

A. $M=N\subsetneqq P$　B. $M\subsetneqq N=P$　C. $M\subsetneqq N\subsetneqq P$　　D. $N\subsetneqq P\subsetneqq M$

解：对于集合 M：$x=\frac{6m+1}{6},m\in Z$

对于集合 N：$x=\frac{3n-2}{6}=\frac{3(n-1)+1}{6},n\in Z$

对于集合 P：$x=\frac{3p+1}{6},p\in Z$

由于 $3(n-1)+1$ 和 $3p+1$ 都表示被 3 除余 1 的数，而 $6m+1$ 表示被 6 除余 1 的数，所以 $M\subsetneqq N=P$.

答案：B

【例 4】 设 a,b 是整数，集合 $E=\{(x,y)\mid(x-a)^2+3b\leqslant 6y\}$，点 $(2,1)\in E$，但点 $(1,0)\notin E$，$(3,2)\notin E$，求 a,b 的值.

分析：$(2,1)\in E$，应理解为 $(2,1)$ 满足不等式 $(x-a)^2+3b\leqslant 6y$，$(1,0)\notin E$，$(3,2)\notin E$ 应从反面理解，即 $(1,0)\{(x,y)\mid(x-a)^2+3b>6y\}$，$(3,2)\in\{(x,y)\mid(x-a)^2+3b>6y\}$

解：由 $(2,1)\in E$ 有 $(2-a)^2+3b\leqslant 6$　　①

由 $(1,0)\notin E$ 有 $(1-a)^2+3b>0$　　②

由 $(3,2)\notin E$ 有 $(3-a)^2+3b>12$　　③

联立①、②、③解不等式组得 $-\frac{3}{2}<a<-\frac{1}{2}$

$\because a,b$ 为整数

$\therefore a=-1$，把 $a=-1$ 代入①、②得 $-4\leqslant 3b\leqslant -3$ 得 $b=-1$

综上所述：$a=-1,b=-1$

【例 5】 已知集合 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，若 $A=B$，求 $(x+\frac{1}{y})+(x^2+\frac{1}{y^2})+\cdots+(x^{2000}+\frac{1}{y^{2000}})$ 的值.

【解析】 此题易误解如下：

因为 $A=B$ 且 $xy>0$，所以 $\lg(xy)=0$

$xy=1$ 所以 $1=xy=|x|$ 或 $1=xy=y$

所以 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$

所以当 $x=y=1$ 时，$(x+\frac{1}{y})+(x^2+\frac{1}{y^2})+\cdots+(x^{2000}+\frac{1}{y^{2000}})=2\times2000=4000$

当 $x=y=-1$ 时，$(x+\frac{1}{y})+(x^2+\frac{1}{y^2})+\cdots+(x^{2000}+\frac{1}{y^{2000}})$

$=-2+2-2+\cdots+2=0$

事实上：当 $x=y=1$ 时，$A=\{1,1,0\}$，这与集合元素的互异性相矛盾，而当 $x=y=-1$ 时，$A=B=\{-1,1,0\}$，故本题只有一解，为

$(x+\frac{1}{y})+(x^2+\frac{1}{y^2})+\cdots+(x^{2000}+\frac{1}{y^{2000}})=0$.

方法小结：已知两集合相等，不仅要考虑两个集合的各种对应情况，还要注意集合本身所具有的三个性质（确定性，互异性，无序性）.

【例6】 设 S 为满足下列两个条件的实数所构成的集合：(1)S 内不含 1；(2)若 $a\in S$，则 $\frac{1}{1-a}\in S$，解答下列问题.

(1)若 $2\in S$，则 S 中必有其他两个数，求出这两个数.

(2)求证：若 $a\in S$，则 $1-\frac{1}{a}\in S$.

(3)在集合 S 中元素的个数能否只有一个？请说明理由.

分析：理解集合中元素的属性是解决问题的突破口，由(1)(2)知 S 中不能只有一个元素，对问题的思考，若从正面考虑有困难，可逆向，即正难则反.

【解析】 (1)$\because 2\in S$，$\therefore \frac{1}{1-2}\in S$，即 $-1\in S$，$\therefore \frac{1}{1-(-1)}\in S$，即 $\frac{1}{2}\in S$.

(2)证明：$\because a\in S$　$\therefore \frac{1}{1-a}\in S$，$\therefore \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}=1-\frac{1}{a}\in S$.

(3)(用反证法证明)假设 S 中只有一个元素，则有 $a=\frac{1}{1-a}$，即 $a^2-a+1=0$ 方程无实数解，$\therefore$ 集合 S 中不能只有一个元素.

(二)集合与集合间的包含关系

解法概要

内容：集合的基本概念及包含关系

题型：1. 已知几个集合，考查它们之间的包含关系.

2. 已知两个集合相等，求相关字母的值，主要考查集合中元素的互异性.

3. 已知两集合间联系，求另一集合.

4. 已知一集合是另一集合的子集，求相关字母的取值范围.

方法：1. 已知几个集合，考查它们之间的包含关系，常从以下几个方面考虑：

①从元素的表达形式进行突破，抓住它们的内在联系

②对集合简化，借助数轴.

【例1】 已知集合 $M=\{x|x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in Z\}$，$N=\{x|x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in Z\}$，则(　　)

A. $M\subsetneqq N$　　B. $M\supsetneqq N$　　C. $M=N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

【解析】 从集合 M,N 中元素的表达形式进行突破.

对于集合 M：$x=\frac{2k+1}{4},k\in Z$，对于集合 N：$x=\frac{k+2}{4},k\in Z$

$\because 2k+1$ 为奇数，而 $k+2$ 可取遍所有的整数，$\therefore M\subsetneqq N$. 故选 A.

方法小结：对于此题若只取 k 的一些值，写出 M,N 中的部分元素，观察 M 与 N 的关系，这种方法虽直观，但不能写出集合中的所有元素，可能会产生判断失误. 而以元素的表达形式突破，抓住了集合的本质，简单明了.

【例2】 已知 $A=\{x|y=x^2-2x+1\}$，$B=\{y|y=x^2-2x+1\}$，$C=\{x|x^2-2x+1=0\}$，$D=\{x|x^2-2x+1<0\}$，$E=\{(x,y)|y=x^2-2x+1\}$，$F=\{(x,y)|x^2-2x+1=0,y\in R\}$，则下列结论中正确的是(　　)

A. $A\subseteq B\subseteq C\subseteq D$　　B. $D\subsetneqq C\subsetneqq B\subsetneqq A$

C. $E=F$　　D. $A=B=E$

【解析】 弄清六个集合的不同含义.

$\because A=\{x|y=x^2-2x+1\}$ 表示函数 $y=x^2-2x+1$ 中 x 的取值范围，即函数的定义域，$\therefore A=R$

$B=\{y|y=x^2-2x+1\}$ 表示函数 $y=x^2-2x+1$ 中 y 的取值范围，即函数的值域，$\therefore B=\{y|y\geqslant 0\}$

$C=\{x|x^2-2x+1=0\}$ 表示方程 $x^2-2x+1=0$ 的解集　$\therefore C=\{1\}$

$D=\{x|x^2-2x+1<0\}$ 表示不等式 $x^2-2x+1<0$ 的解集　$\therefore D=\varnothing$

$E=\{(x,y)|y=x^2-2x+1\}$ 代表抛物线 $y=x^2-2x+1$ 上的点组成的集合.

$F=\{(x,y)|x^2-2x+1=0,y\in R\}$ 代表直线 $x=1$ 上的点组成的集合.

故选 B.

方法小结：简化是解决集合的常用策略，本题还应弄清“数集”与“点集”的区别.

2. 已知两个集合相等，求相关字母的值，需考虑以下两个方面

①元素的互异性

②元素的无序性

【例 3】 已知 $A=\{1,a,b\}$，$B=\{a,a^2,ab\}$，且 $A=B$，求实数 a,b.

分析：两个集合相等，它们的元素完全相同，可根据元素的互异性和无序性，分步进行讨论.

解法一：由集合元素的互异性观察：$A=\{1,a,b\}$ 知 $a\neq 1,b\neq 1$.

$\because A=B$ $\therefore a^2=1$ 或 $ab=1$

①当 $a^2=1$ 时 $\because a\neq 1$，$\therefore a=-1$，此时 $A=\{1,-1,b\}$，

$B=\{-1,1,-b\}$，那么 $b=-b$，即 $b=0$

②当 $ab=1$ 时，即 $a=\frac{1}{b}(b\neq 0)$，此时 $A=\{1,\frac{1}{b},b\}$，$B=\{\frac{1}{b},\frac{1}{b^2},1\}$，那么 $b=\frac{1}{b^2}$，即 $b=1$，$\because b\neq 1$，$\therefore ab=1$ 时无解，故 $a=-1,b=0$

解法二：$\because A=B$

$$\therefore \begin{cases}1+a+b=a+a^2+ab\\1\cdot a\cdot b=a\cdot a^2\cdot ab\end{cases}$$

$$即\begin{cases}(1+a+b)(a-1)=0\\ab(a-1)=0\end{cases}$$

由集合元素的互异性，有 $a\neq 1,a\neq 0$，解方程组得 $a=-1,b=0$.

方法小结：利用集合中元素的互异性来找突破口，是解决这类题的通法，而解法二根据两相等的有限集的性质：①两个集合的所有元素之和相等，②两个集合的所有元素之积相等，列出关于 a,b 的方程组，从而求出 a,b 更加简单易行.

3. 已知两集合间联系，求另一集合.

【例 4】 设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{C|C\in A\}$，求 B

【解析】 $\because A=B$ $\therefore B=\{1,2,3\}$

【例 5】 设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{C|C\subseteq A\}$，求 B

【解析】 $\because A=\{1,2,3\}$ $\therefore A$ 的子集为 $\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},A$，又 $B=\{C|C\subseteq A\}$

$\therefore B=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

方法小结：对例 5 中 B 的理解应为“B 是集合的集合”，B 中的代表元素为 C，C 适合的条件是 $C\subseteq A$，即 C 是 A 的子集，进一步明确对 B 的理解，即 B 是集合 A 的子集的集合.

4. 已知一集合是另一集合的子集，求相关字母的取值范围，①关键应考虑空集问题. ②涉及解无理不等式时，考虑用根的分布问题.

【例 6】 已知集合 $A=\{x|-x^2+3x+10\geqslant 0\}$，$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$若 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围.

分析：$\because \varnothing$ 是任何集合的子集，本题应就 $B=\varnothing$ 和 $B\neq\varnothing$ 两种情况分类讨论.

解:由 $A=\{x|-x^2+3x+10\geqslant 0\}$,得 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 5\}$,对 $B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$,$B\subseteq A$ 分类讨论如下:

(1)若 $B=\varnothing$,则 $m+1>2m-1\Rightarrow m<2$ 此时有 $B\subseteq A$

(2)若 $B\neq\varnothing$,则 $m+1\leqslant 2m-1\Rightarrow m\geqslant 2$.

$$B\subseteq A\Leftrightarrow\begin{cases}m\geqslant 2\\ m+1\geqslant -2\\ 2m-1\leqslant 5\end{cases}\Rightarrow 2\leqslant m\leqslant 3$$

由(1)、(2)得 $m\leqslant 3$,故实数 m 的取值范围为 $\{m|m\leqslant 3\}$

方法小结:此题分 $B=\varnothing$ 和 $B\neq\varnothing$ 两类讨论是解决本题的通解通法.综合时要注意结合数轴写出它们的并集.

【例 7】 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2\leqslant 0\}$,$B=\{x|x^2-2ax+a\leqslant 0,a\in R\}$,且 $B\subseteq A$,求 a 的取值范围.

分析:$\because x^2-2ax+a$ 不能进行有理式因式分解,会涉及解无理不等式,应考虑根的分布

解:$A=\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$

设 $f(x)=x^2-2ax+a$

①当 $\Delta=(-2a)^2-4a<0$,即 $0<a<1$,$B=\varnothing$,满足 $B\subseteq A$.

②当 $\Delta\geqslant 0$ 时,要使 $B\subseteq A$,需使

$$\begin{cases}1\leqslant a\leqslant 2\\ \Delta=4a^2-4a\geqslant 0\\ f(1)=1-2a+a\geqslant 0\\ f(2)=4-4a+a\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow a=1$$

综上可知 $a\in(0,1]$

方法小结:此题除了考虑 $\varnothing$ 问题以外,涉及解无理不等式问题时,通常考虑根的分布.

(三)集合与集合之间的运算关系

解法概要

内容:对交集、并集、补集概念的理解,如何求交集、并集、补集,如何应用韦恩图解决问题.

题型:1. 给定几个集合,求集合之间的交、并、补.

2. 已知两集合的交集为 $\varnothing$,求相关字母的值.

3. 已知两集合的交集不为 $\varnothing$,求相关字母的值.

4. 已知两集合的交集,求相关字母的值.

5. 已知两集合的并集,求相关字母的值.

6. 已知一个集合的补集,求相关字母的值.

7. 集合与集合之间的包含与运算的混合问题.

方法:1. 先将集合具体化,然后根据交集、并集、补集的定义求解结果,关键是利用数轴,或文氏图描述

【例 1】 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$,$A=\{1\}$,$B=\{2,3\}$,求 $A\cap B$、$A\cup B$,C_uA,C_uB,$(C_uA)\cap(C_uB)$,$C_u[(C_uA)\cup(C_uB)]$

分析:解答本题的关键是对有关集合的"交、并、补"概念要弄清楚.

【解析】 ∵全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$,$A=\{1\}$,$B=\{2,3\}$

∴$A\cap B=\varnothing$,$A\cup B=\{1,2,3\}$,$C_uA=\{2,3,4,5,6\}$

$C_uB=\{1,4,5,6\}$,$(C_uA)\cap(C_uB)=\{4,5,6\}$

又∵$(C_uA)\cup(C_uB)=\{1,2,3,4,5,6\}$,∴$C_u[(C_uA)\cup(C_uB)]=\varnothing$.

【例 2】 设 $A=\{2,-1,x^2-x+1\}$,$B=\{2y,-4,x+4\}$,$C=\{-1,7\}$,且 $A\cap B=C$,求 x、y 的值.

【解析】 由已知 $A=\{2,-1,x^2-x+1\}$,$B=\{2y,-4,x+4\}$,$C=\{-1,7\}$,由 $A\cap B=C$,得

$7\in A$,$7\in B$,$-1\in B$

∴在 A 中,$x^2-x+1=7$,∴$x=-2,3$

当 $x=-2$ 时,在 B 中 $x+4=2$,又∵$2\in A$,∴$2\in A\cap B$,但 $2\notin C$,

∴$x=-2$ 不合题意,当 $x=3$ 时,在 B 中 $x+4=7$

∴$2y=-1$,$y=-\frac{1}{2}$,综上,所求 $x=3$,$y=-\frac{1}{2}$

【例 3】 已知 $A=\{x\mid x^2\geqslant 9\}$,$B=\{x\mid \frac{x-7}{x+1}\leqslant 0\}$,$C=\{x\mid |x-2|<4\}$.

(1)求 $A\cap B$ 及 $A\cup C$.(2)若 $U=R$,求 $A\cap[C_u(B\cap C)]$

分析:先将 A、B、C 具体化,然后根据交集、并集、补集的定义求解结果.

【解析】 $A=\{x\mid x^2\geqslant 9\}=\{x\mid x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -3\}$

$B=\{x\mid \frac{x-7}{x+1}\leqslant 0\}=\{x\mid -1<x\leqslant 7\}$

$C=\{x\mid |x-2|<4\}=\{x\mid -2<x<6\}$

(1)$A\cap B=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 7\}$,如下图 1-1-1(A)

$A\cup C=\{x\mid x\leqslant -3$,或 $x>-2\}$,如下图 1-1-1(B)

图 1-1-1

(2)∵$U=R$

又 $B\cap C=\{x\mid -1<x<6\}$

∴$C_u(B\cap C)=\{x\mid x\leqslant -1$,或 $x\geqslant 6\}$

∴$A\cap[C_u(B\cap C)]=\{x\mid x\leqslant -3$,或 $x\geqslant 6\}$

方法小结：本题(1)运用的数学思想是数形结合思想，从图上不难看出，纵向去数横线，两条横线者为“交集”，至少有一条横线者为“并集”，这样的解答方法具有一般性.

2. 已知两集合的交集为$\varnothing$，求相关字母的值，关键在于注意考虑空集和分类讨论.

【例4】 已知$A=\{x|x^2+(p+2)x+1=0,x\in R\}$，$A\cap R^+=\varnothing$，求实数$p$的取值范围.

【解析】 集合A为一元二次方程的解构成的数集.

$\because A\cap R^+=\varnothing$，$\therefore A$中元素有三种情况：

(1)集合A中含有两个元素，且两个元素均为非正数，即方程$x^2+(p+2)x+1=0$有两个不相等的非正根，则

$$\begin{cases}\Delta=(p+2)^2-4>0,\\x_1+x_2=-(p+2)\leqslant 0,\\x_1x_2=1\geqslant 0.\end{cases}$$

故有$p>0$.

(2)集合A中含有一个元素，即方程$x^2+(p+2)x+1=0$有两个相等的非正根，则$\Delta=(p+2)^2-4=0$，即$p=0$或$p=-4$. 当$p=0$时，$x=-1$；当$p=-4$时，$x=1$，不合题意，故$p=0$.

(3)集合A为空集，即方程$x^2+(p+2)x+1=0$无实根，则$\Delta=(p+2)^2-4<0$，故$-4<p<0$.

综合(1)(2)(3)，可得$p>-4$.

【例5】 已知集合$A=\{x|x^2+3x+2\geqslant 0\}$，$B=\{x|mx^2-4x+m-1>0\}$且$A\cap B=\varnothing$，且$A\cup B=A$，求$m$的取值范围.

【解析】 由已知$A=\{x|x\leqslant -2$或$x\geqslant -1\}$，由$A\cap B=\varnothing$得

(1)$\because A$非空，$\therefore B=\varnothing$

(2)$\because A=\{x|x\leqslant -2$，或$x\geqslant -1\}$，$\therefore B=\{x|-2<x<-1\}$

另一方面，$A\cup B=A$，$\therefore B\subseteq A$，于是上面的(2)不成立，否则$A\cup B=R$与题设$A\cup B=A$矛盾.

由上面分析，知$B=\varnothing$.

由已知$B=\{x|mx^2-4x+m-1>0\}$，结合$B=\varnothing$，得

对一切$x\in R$，$mx^2-4x+m-1\leqslant 0$恒成立

于是，有$\begin{cases}m<0\\16-4m(m-1)\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow m\leqslant\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$

$\therefore m$的取值范围为$\{m|m\leqslant\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\}$

方法小结：1. 对于此类问题必须有带字母参数的集合为空集的可能性的讨论.

2. 抛物线要注意几何意义，运用图象解决恒成立问题.