数学建模基础教程

黄世华 编著

甘肃教育出版社

数学建模基础教程

黄世华　编著

甘肃教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学建模基础教程 / 黄世华编著. —兰州：甘肃教育出版社，2006. 3
ISBN 7-5423-1541-2

Ⅰ. 数… Ⅱ. 黄… Ⅲ. 数学模型—高等学校—教材 Ⅳ. 022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006) 第 017754 号

责任编辑：朱黎明
封面设计：徐晋林

数学建模基础教程
黄世华 编著
甘肃教育出版社出版发行
(730000 兰州市南滨河东路 520 号)
www. gseph. com 0931 - 8773231
兰州石化职业技术学院印刷厂印刷
开本 850 × 1168 毫米 1/32 印张 6.5 字数 150 千
2006 年 3 月第 1 版 2006 年 3 月第 1 次印刷
印数:1 - 1,000
ISBN7 - 5423 - 1541 - 2 定价：9. 80 元

前　言

近几十年来,数学的应用不仅在它的传统领域发挥着越来越重要的作用,而且不断地向一些新的领域渗透,形成了许多交叉学科. 随着科学技术的不断进步和计算机的迅速发展,数学与计算机技术相结合的数学技术,成为当代高新技术的重要组成部分."高技术本质上是数学技术"的观点已被越来越多的人们所接受.

数学的应用,实质上是数学和所研究的实际问题相结合的结果. 一个成功的数学应用的成果,往往会使我们对所研究问题的认识达到更深的层次,这是当我们使用自然语言来描述一个现象时很难做到的. 数学是各学科可以共同使用的一种数学语言,有它自己的理论体系,而实际问题则各自显示它们自己的特征和要求. 一个成功的应用必须要把两者沟通,建立起它们之间的紧密联系,数学模型就是架于数学理论和实际问题之间的桥梁,而数学建模是应用数学解决实际问题的重要手段和途径. 通过数学模型的组建,数学的语言被应用到实际问题中,而实际问题对模型分析的特殊需求又往往对数学的理论提出新的挑战. 实践证明,要想使数学应用得以成功,必须依赖于应用者深厚的数学基础和严格的逻辑推理能力. 但仅此是不够的,还要依赖于其敏锐的洞察力、分析归纳的能力以及对实际问题的深入的理解和广博的知识面. 运用数学方法解决实际问题,是当代大学生必不可少的技能,是培养具有竞争力的高素质人才必不可少的课程,是素质教育发展的必然趋势. 为适应这一需要,编者编写了这本高职生、专科生适用的"数学建模基础教程".

本书是数学模型课程的教材. 重点阐述:1. 如何既从具体事物中抽象出数学概念,又了解这种抽象只是一种近似,只反映具体事物的某些本质特性;2. 如何从复杂的实际问题中寻找最

重要的因素;3. 如何既注意思考的逻辑性,又紧密结合实际情况;4. 如何将所得结果应用于实践,通过实践进一步改进模型.

本书的基础是“高等数学”、“线性代数”、“常微分方程”和“概率论与数理统计”. 如果有“计算方法”或“数值分析”的基本知识,对本书内容的理解将有一定的帮助. 为了能更好地掌握书中数学软件的使用,读者最好具备一定的应用计算机的水平与能力.

本书的基本内容是:第一章,数学建模概论,介绍数学模型的基本知识,使学生对数学模型有一个初步的了解. 第二章,MATLAB 基础,介绍 MATLAB 的通用命令和有关 MATLAB 编程的一些基本知识. 第三章,初等方法建模,介绍几种初等方法建立的模型. 第四章,微分法建模,介绍用微分法对实际问题建模及相应的求解方法. 第五章,微分方程法建模,介绍常用的微分方程模型. 第六章,代数法建模,介绍用代数法对实际问题建模及求解方法. 第七章,概率统计法建模,介绍基本的统计模型及相应的求解分析方法. 第八章,层次分析法建模,介绍层次分析法. 第九章,计算机仿真模拟,介绍仿真的基本知识及常见的模拟方法.

本书选取大量浅显案例,叙述严谨,可读性、趣味性强. 可作为高职高专院校数学系“数学模型”课的教材,非数学专业本科生选修的教材,也可供高等院校师生以及各类科技工作者自学参考.

由于受编者水平限制,可能在内容的取材、结构的编排以及课程的讲法上存在着不妥之处,希望使用本书的教师、学生、同行专家以及其他读者提出宝贵的批评意见和建议.

在本书出版之际,谨向对本书提供过帮助的各位老师和专家表示衷心的感谢.

编者

2006 年 1 月

目　录

第一章　数学建模概论

世界上一切事物都是按照一定的客观规律运动、变化着，事物之间也彼此联系和制约着，无论是从浩瀚的宇宙到渺小的粒子，还是从自然科学到社会科学都是这样．事物的变化规律和事物之间的联系，必然蕴含着一定的数量关系．所以数学是认识世界和改造世界的必不可少的重要工具，特别是在科学技术飞速发展的今天，这一点就显得更为重要．

众所周知，数学最引人注目的特点是思维的抽象性、推理的严谨性和应用的广泛性．它的抽象性和严谨性的特点成为我们科学地思维和组织构造知识的一个有效的手段，应用性则为各门学科以及人们的生产、生活和社会活动在定量方面向深层发展奠定了基础．

在解决各种复杂的实际问题时，建立数学模型是一种十分有效并被广泛使用的工具或手段．数学建模是一种包含数学模型的建立、求解和验证的复杂过程，其关键是如何运用数学语言和方法来刻画实际问题．未来具有竞争力的优秀人才应具备较高的数学素质，能够利用数学手段创造性地解决实际问题．数学建模教育的核心是引导学生从“学”数学向“用”数学方面转变，强调数学学习的目的在于应用．本章叙述什么是数学模型，

它有什么作用,数学模型的分类,以及如何建立和应用数学模型.

§1.1 从现实对象到数学模型

原型和模型

事物的原型是指人们所研究的实际对象、系统或过程,而模型则是为了某种特定的目的,加工提炼出的一种替代物,它集中反映了事物的本质.

数学模型及其特征

数学模型是用数学描述实际问题的产物,一般可表述为:对于现实世界的某一特定对象,为了某种特定目的,根据内在规律和有关信息,做出一些必要的简化假设,运用适当的数学工具,得到的一个数学结构. 它用数学符号、公式、图表、算法等刻画客观事物的本质属性与内在规律.

数学模型的特征:(1)它是某事物为一种特殊目的而作的一个抽象化、简单化的数学结构,这意味着扬弃、筛选、舍弃次要因素,突出主要因素的主要结果,是事物的一种模拟,虽源于现实,但非实际的原型,而又高于现实.(2)它是数学上的抽象,在数值上可以作为公式应用,可以推广到原物相近的一类问题.(3)可以作为某事物的数学语言,可以被译成算法语言、编写程序进入计算机.

数学模型是对现实世界部分信息加以分析提炼加工的结果,其数学解答最终需翻译为实际解答,并应符合实际及人们的要求,从而得出对现实对象的分析、预测、决策或对结果进行控制.

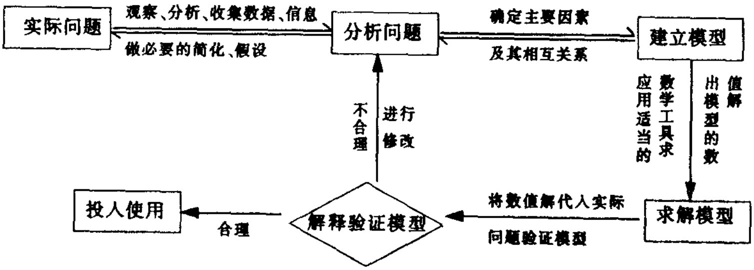
数学模型的分类

数学模型的分类很难有统一的标准,可以根据不同的分类原则分成不同的类型. 根据数学方法可分为初等模型、微分方程模型、微积分模型、代数模型、概率统计模型、图论模型、优化

模型、控制模型等；根据研究的实际问题可分为人口发展模型、生态模型、交通模型、经济模型等；根据变量的性质可分为确定性模型、随机性模型、连续性模型、离散性模型等；根据对变量的了解程度可分为白箱模型、灰箱模型、黑箱模型等；根据系统的性质可分为微观模型、宏观模型、集中参数模型、分布参数模型、定常模型、时变模型等；按照建模的方法不同，可分为理论模型和经验模型.

数学建模的步骤与原则

一个理想的数学模型必须是既能反映系统的全部重要特性，同时在数学上又易于处理，它须满足模型的可靠性、适用性.它的步骤和原则大致归结为：



建立一个模型，首先要观察、分析、收集必要的数据，明确所要解决的目的要求.其次把现实问题理想化.现实问题错综复杂，涉及面广，必须先将问题理想化、简单化，也就是先抓住主要因素，放弃次要因素.在相对比较简单的情况下，理清变量之间的关系，建立相应的模型.建立模型应注意：(1)分清变量类型，恰当使用数学工具.(2)抓住问题，简化变量之间的关系.因为模型过于复杂，则无法求解或求解困难，就不能反映客观实际.(3)要有严密的数学推理，模型本身要正确.(4)要有足够的精确度，要把本质的东西和关系反映进去，把非本质的东西去掉.还要注意反映现实的真实程度.(5)不同的模型要用到不

同的数学分支知识去求解.(6)用已有的数据去验证模型是否反映客观实际.(7)对模型要进行修改.

数学建模是一个动态反复的迭代过程,没有固定的模式可以套用,特别是它与数学建模工作者自身素质密切相关.这就是说,它直接依赖于人们的直觉、猜想、判断、经验和灵感.在这里想象力和洞察力是非常重要的.所谓想象力实质上就是一种联系或联想能力,它表现为对不同的事物通过相似、类比、对照找出其本质上共同的规律,或将复杂的问题通过近似、对偶、转换等方式简化为易于处理的等价问题,而洞察力则体现在抓主要矛盾或关键的把握全局的能力.由于人们的经历、素质和视野的差异,不同人所构造的模型水平则往往不同,因此数学建模是一种创造性的劳动或"艺术".

在数学建模学习中一般应注意的几个方面

(1)假设、公式和叙述要简明.首先,数学建模的假设是否合理是全文清晰叙述的基础,所以一定要经过反复斟酌、挑选,将最重要、最基本的概念,用清晰而严格的语言给以界定或描述.其次,模型应规范化,符号、公式和文字说明都要求简练而又能说明问题,并且符号前后要统一,公式推导或表述不能过于繁冗.再次,数学模型表达式之间要有必要的文字说明,基本步骤和主要的推导过程.

(2)要防止数学模型中的"形式套用".对问题要仔细观察、舍表取本,灵活应用自己已有的数学知识,并突出自己的优点,不能从形式上套用某种方法,使本来简单的问题复杂化.

(3)要注意及早培养写摘要的能力.摘要能力是科学研究的重要能力,在摘要中要写清条件、结论、基本过程、关键步骤、要领、所采用的方法以及有些什么特色等.

(4)要深刻领会数学的重要性不仅体现在数学知识的应用,更重要的是数学的思维方法,这里包括思考问题的方式,所

运用的数学方法及处理技巧等．特别应致力于“双向”翻译、逻辑推理、联想和洞察四种基本能力的培养．

(5)要提高动手能力，包括自学、文献检索、计算机应用、科技论文写作和相互交流能力，特别应有意识地增强文字表述方面的准确性和简明性．

(6)要勇于克服学习中的困难，消除畏难情绪．由于数学建模课程属于拓宽性、启发性强，难度较深的课程，提倡创造性思维方法的训练，因而文字习题解题中找不到感觉或做得有出入是一种正常现象，对此不必丧失信心．相信通过摸索会逐步有所改进，如果解决好几个问题或真正动手完成一两个实际题目都应视为有所收获．从长远看这种学习有益于开阔人们的思路和眼界，有利于知识结构的改善和综合素质的提高．

§1.2　数学建模示例

对于初学者来说，数学模型是一个较难驾驭的课题，它的处理手法相当灵活．要掌握数学模型最好的办法是实践，自己一个人独立地实践或几个人一组集体实践．开始阶段不要急于尝试工业上或科学技术上复杂的建模问题．在我们身边的现实生活中就有许多值得我们思考的问题．其中不少既简单又实用，是我们学习数学模型的好材料．这一节所列举的例子将展现给大家实际中的数学模型是什么样子，以利于大家去发现我们身边的模型．例题是一些极普通的问题，不需要你具备多少实际的专业背景和过多过深的数学知识及方法就可以着手去尝试．

1. 椅子问题

问题描述

四条腿长度相同的方椅放在不平的地面上，是否能使它四脚同时着地？

模型假设

(1)椅子:四腿长度相同并且四脚连线呈正方形.

(2)地面:略微起伏不平的连续变化的曲面.

(3)着地:点接触,在地面任意位置处椅子应至少有三只脚同时落地.

模型分析及建立

该问题的关键是要用数学语言把条件及结论表示出来,需运用直观和空间的方式来思考. 将椅脚连线构成的正方形的中心称为椅子中心,椅子处于地面任一地点,总可想像为椅子中心处于该处——某直角坐标系的原点 O 处,而用 A,B,C,D 表示椅子四脚的初始位置. 椅子总能着地,则意味着通过调整,四脚定能达到某一平衡位置,即使四脚与地面距离均为零. 这可想像为使椅子以原点 O 为中心旋转角度 θ,相当于坐标轴旋转 θ. 此时四脚位置变为 A',B',C',D',如图 1-1 所示,显然椅子的位置可用 θ 来表示,而椅脚与地面距离应是 θ 的连续函数.

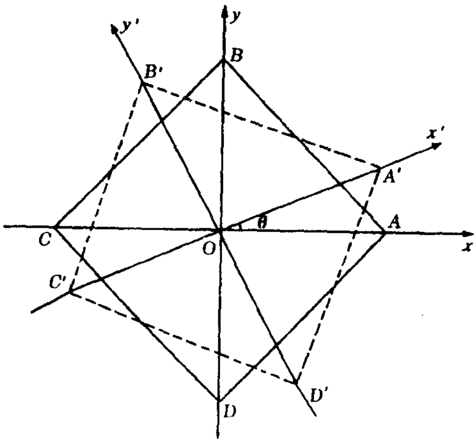


图 1-1 用 θ 表示椅子的位置

令 A, C 两脚, B, D 两脚与地面距离之和分别为 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$，则该问题易归结为：

已知连续函数 $f(\theta)\geqslant 0, g(\theta)\geqslant 0$ 且对 $\forall\theta, f(\theta)\cdot g(\theta)=0$，若 $f(0)>0, g(0)=0$，则一定存在 θ_0，使得 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

模型求解

证明：令 $\theta=\frac{\pi}{2}$（即旋转 90°，对角线 AC 与 BD 互换），

则 $f(\frac{\pi}{2})=0, g(\frac{\pi}{2})>0$. 定义 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，得到

$$h(0)\cdot h(\frac{\pi}{2})<0.$$

根据连续函数的零点定理，则存在 $\theta_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得

$$h(\theta_0)=f(\theta_0)-g(\theta_0)=0.$$

结合条件 $f(\theta_0)\cdot g(\theta_0)=0$（假设 3），从而得到

$$f(\theta_0)=g(\theta_0)=0.$$

即四个点均在地面上，四脚同时着地.

由于这个实际问题非常直观和简单，模型解释和验证就略去了.

评注：这个模型的巧妙之处在于用一元变量 θ 表示椅子的位置，用 θ 的两个函数表示椅子四脚与地面的距离，进而把模型假设和椅脚同时着地的结论用简单、精确的数学语言表达出来，构成了这个实际问题的数学模型.

2. 广告中的学问

问题描述

书店要订购一批新书出售，它打算印制详细介绍图书内容的精美广告分发给广大读者以招徕顾客. 虽然读者对这种图书的需求量是随机的，但是与书店投入的广告费用有关. 根据以往的经验知道，随着广告费的增加，潜在的购买量会上升，并且

有一个上限. 所谓潜在的买主是指那些对于得到这种图书确实有兴趣,但不一定花钱从这家书店购买的人. 书店掌握了若干个潜在买主的名单,广告将首先分发给他们. 这个模型要求我们在对需求量随广告费增加而变化的随机规律作出合理假设的基础上,根据图书的购进价和售出价确定广告费和订购量的最优值,使书店的利润(在平均意义下)最大.

问题分析

建模的关键在于分析广告费、潜在购买量与随机需求量之间的关系,并作出合理、简化的假设. 若记广告费为 c,潜在购买量为 $s(c)$,$s(c)$应是 c 的增函数(严格地说是非降函数),且有一个上界. 为简单起见不妨设 $s(0)=0$,记实际的需求量为随机变量 r, 其概率密度为 $p(r)$, 于是对于给定的广告费 c,需求量 r 在0到 $s(c)$之间随机取值,如果没有进一步的信息,可以简单地假设 $p(r)$在区间$[0,s(c)]$内呈均匀分布.

为了确定函数 $s(c)$的形式,不妨首先假设印刷广告需要一笔固定的费用 c_0,它并不产生潜在购买量;然后,因为广告将优先分发给那些确定的潜在买主,如果每份广告的印刷费和邮寄费是固定的,那么 $s(c)$将随着 c 线性地增加;最后,随着广告的普遍分发,$s(c)$随着 c 的增加而渐趋于某一上界 S,示意图如图1-2,其中 $c_0 \leqslant c \leqslant c_1$ 是 $s(c)$的线性增加阶段.

在以上分析的基础上作下面的假设.

模型假设

(1)每本图书的购进价为 a,售出价为 b,忽略贮存费用;需求量 r 是随机的,其概率密度记作 $p(r)$.

(2)广告费为 c,潜在购买量是 c 的函数记作 $s(c)$;需求量 r 在$[0,s(c)]$内呈均匀分布.

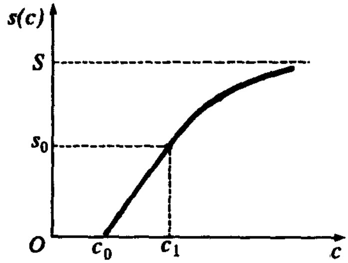


图 1-2　潜在购买量 $s(c)$ 的示意图

(3)广告费中固定费用为 c_0，$s(0)=s(c_0)=0$；每份广告的印制和邮寄费用为 k，广告将首先分发给 s_0 个确定的潜在买主；$s(c)$ 是 c 的非降函数，且上界为 S.

建模与求解

设图书的购进量为 u，建模的目的是确定广告费用 c 和购进量 u 的最优值，使书店的平均利润(即利润的期望值)最大.

分三步建立模型．先在给定的广告费 c 下根据假设 1，2 确定使平均利润达到最大的购进量，再利用假设 3 构造函数 $s(c)$ 的具体形式，最后根据前两步的结果确定广告费的最优值．下面是具体步骤.

(1)当广告费 c 给定时，记购进量为 u 的平均利润是 $J(u)$，因为利润是从售出书的收入中减去购进书和广告费的支出，注意到需求量 r 的概率密度为 $p(r)$，可以写出 $J(u)$ 的表达式为

$$J(u)=b\left(\int_0^u rp(r)dr+\int_u^\infty up(r)dr\right)-au-c. \tag{1.1}$$

利用 $\int_0^\infty p(r)dr=1$，(1.1) 式可分为

$$J(u)=(b-a)u-c-b\int_0^u(u-r)p(r)dr. \tag{1.2}$$

式中 $(b-a)u-c$ 是购进的书全部售出时的利润，

$b\int_0^u (u-r)\cdot p(r)dr$ 是当部分图书未能售出时的损失.

计算$\frac{dJ}{du}$并令其为零,容易求出使 $J(u)$ 达到最大的 u 的最优值,记作 u^*,u^* 满足

$$\int_0^{u^*} p(r)dr = \frac{b-a}{b}. \tag{1.3}$$

根据 r 在$[0,s(c)]$内均匀分布的假设及 $s(0)=0$,有

$$p(r)=\begin{cases}\frac{1}{s(c)}, & 0\leqslant r\leqslant s(c)\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{1.4}$$

代入(1.3)式得

$$u^*(c)=\frac{b-a}{b}s(c). \tag{1.5}$$

即购进量的最优值 u^* 等于广告费 c 所决定的潜在购买量 $s(c)$乘以比例系数$\frac{b-a}{b}$,这个系数与进出差价 $b-a$ 成正比,与销售价 b 成反比.

将(1.4),(1.5)代入(1.2)式,可得最大的平均利润为

$$J(u^*(c))=\frac{(b-a)^2}{2b}s(c)-c. \tag{1.6}$$

(2)根据假设3和图1-2,首先设

$$s(c)=0,0\leqslant c\leqslant c_0, \tag{1.7}$$

记 $c_1=c_0+ks_0$, (1.8)

因为 $s(c_1)=s_0$,所以

$$s(c)=\frac{c-c_0}{k},c_0\leqslant c\leqslant c_1 \tag{1.9}$$

是图1-2上的直线部分. 对于 $c>c_1$,应有