大创精品

高考备考专家系列丛书

依据国家教育部最新课程标准和教学大纲编写

高考备考专家

高二

同步导读

TONG BU DAO DU

北京师范大学新课标教学研究中心 组编

数学

（下B版）

北京邮电大学出版社
http://www.buptpress.com

创精品

高考备考专家系列丛书

依据国家教育部最新课程标准和教学大纲编写

高考备考专家

高二

同步导读

TONG BU DAO DU

北京师范大学新课标教学研究中心　组编

数学

（下 B版）

北京邮电大学出版社
http://www.buptpress.com

图书在版编目(CIP)数据

高二同步导读. 数学(下 B 版)/北京师范大学新课标教学研究中心编. —北京:北京邮电大学出版社,2004

ISBN 7-5635-0899-6

Ⅰ.高...　Ⅱ.北...　Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 042495 号

书　　名　高二同步导读·数学(下 B 版)
主　　编　北京师范大学新课标教学研究中心
责任编辑　周　堃　邓　艳
出版发行　北京邮电大学出版社
社　　址　北京市海淀区西土城路 10 号　邮编 100876
经　　销　各地新华书店
印　　刷　北京市彩虹印刷有限责任公司
开　　本　850 mm×1 168 mm　1/16
印　　张　6.5
字　　数　203 千字
版　　次　2005 年 10 月第 1 版　2005 年 10 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 7-5635-0899-6/O·80
定　　价　9.00 元

如有印刷问题请与北京邮电大学出版社联系　　电话:(010)62283578

E-mail: publish@bupt.edu.cn　　Http://www.buptpress.com

促膝小语

——人在高二

高二，是高考备考蓄势待发的阶段。您准备好了吗？

此时，您是置身于题海，而无法参透书中的精髓；还是备感茫然，一味的烦恼，而无法把握学习的方向，掌握知识的重点；还是觉得高考太神秘，而找不到解决问题的钥匙？

相对高考来说，高二这一年就像是站在地平线上观望喷薄欲出的红日，也像是站在海岸线上眺望初现篷帆的航船。在您蓄锐整装的时刻，是否有必要听听我们编者的几句肺腑之言？

高考是人生的重要里程碑，顺利通过考试，步入自己理想的大学，踏进神圣的殿堂是莘莘学子强烈的渴望。而高二正是高考道路上积蓄力量，奋勇拼搏的阶段。在这一阶段，要日日行不怕路万里，时时学不怕书万卷。正所谓苦磨剑十余载，一朝出鞘惊世人。

工欲善其事，必先利其器，所以，在高二的时候应该有一套适合自己、适合进度、贴近教材、贴近高考的参考书。“事倍功半”和“事半功倍”的道理，想必大家早已谙熟于心的吧！

我们编者一直本着“想同学之所想，急同学之所急”的原则，推出高考备考专家系列丛书之高二同步导读，为您答疑解惑，伴您走过高二这段难忘的时光。

书中内容紧贴教材、紧扣考纲。“本章知识网络归纳”、“本章精讲”、“目标定位”、“要点查看”、“知识点击”等使您系统地复习教材，有纲可循。“例题刷新”、“能力升级”使您扎实地掌握知识，有题可练。“方法浏览”、“重点搜索”、“高考热点透析”、“高考链接”为您备战高考提供了实战的思路和演练的平台。

拥有她，您就如同拥有一位专家，可以随时得到帮助和指导，又如同拥有一台储备丰富的掌上电脑，可以随地查阅和练习。相信在本丛书的指导下您的学习成绩，就像“芝麻开花——节节高”。

虽为“促膝小语”，却是“金玉良言”，促膝方显心诚，小语才好入耳。希望同学们靠汗水浇出胜利果实，凭方法走到成功彼岸。

最后祝愿同学们在这套高考备考专家系列丛书之高二同步导读的指导下，夙愿得偿，一举成名。

本套丛书在编写过程中承蒙有关领导、老师的大力支持，在此谨表谢意。同时，因水平所限，加之时间仓促，书中不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

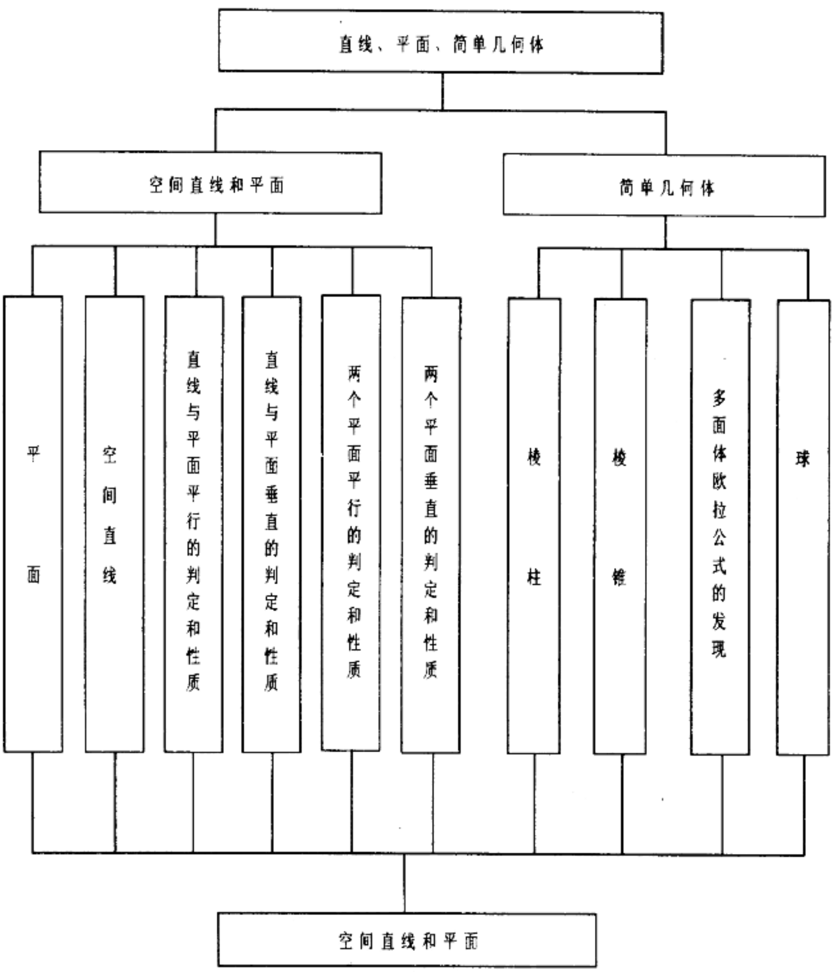
目录

第九章　直线、平面、简单几何体(B版)

第十章　排列、组合和概率

第九章　直线、平面、简单几何体(B 版)

本章知识网络



9.1　平面的基本性质

目标定位

理解并掌握平面的基本性质(三条公理及推论),能正确运用这些性质进行简单的作图.

能正确运用平面基本性质的三条公理证明有关三线共点、三点共线和点线共面等问题.能在解题的过程中学会读图、识图,形成空间概念.

要点查看

1. 平面的表示方法

几何里的平面是无限伸展的.它是一个只描述而不定义的概念.平面将空间分成两部分,平面没有厚度、大小,常用平行四边形表示平面,记为α、β、γ……或平面AC等.

2. 平面的基本性质

(1)(公理1)如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上的所有点都在这个平面内.

以上为文字语言形式,用符号语言形式叙述为

$$\left.\begin{array}{l}A、B\in a\\A、B\in\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow a\subset\alpha$$

公理1是判定直线是否在平面内的理论根据.

(2)(公理2)如果两个平面有一个公共点,那么它们还有其他公共点,这些公共点的集合是一条直线.

注意:①公理2用符号语言形式叙述为

$A\in\alpha$,$A\in\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=a$,且$A\in a$.

②这里两个平面是指不重合的两个平面.

③公理2是研究两个平面关系的基础,主要用于判断两个平面是否相交,也是证明点共线或线共点的依据.

④注意两个相交平面的画法:先画出交线a,并要虚实分明.

(3)(公理3)经过不在同一条直线上的三点有且只有一个平面.

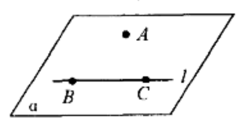
注意:①"有且只有"中"有"是说图形存在,"只有一个"是说图形唯一.

②三点A、B、C是不共线的.

③公理3可简述为:不共线的三点确定一个平面,它是确定平面的依据.

3. 公理3的推论

(1)推论1:一条直线和直线外一点确定一个平面.



证明:如上图,①存在性:点A是直线l外一点,在l上任取两点B、C,根据公理3,经过不共线的三点A、B、C有一个平面α.

∴ B、$C\in\alpha$,B、$C\in l$,由公理1,$l\subset\alpha$,即平面α是经过点A和直线l的平面.

②唯一性:∵ B、$C\in l$,

∴ 任何经过点A和l的平面一定经过点A、B、C.由公理3,经过不共线的三点A、B、C的平面只有一个.故过l和A的平面只有一个.

(2)推论2:两条相交直线确定一个平面.

(3)推论3:两条平行直线确定一个平面.

注意:公理3及其推论是确定平面的依据,是把空间问题转化为平面问题的基础.

4. 空间图形在平面内的表示方法

指的是水平放置的空间图形的直观图的画法.把空间图形在平面内画得既富立体感,又能表达出图形各主要部分的位置关系和度量关系的图形,就是直观图.

关于直观图的画法规则是：(1)在已知图形中取水平平面，取互相垂直的轴 Ox、Oy，再取 Oz 轴，使 $\angle xOz=90^\circ$ 且 $\angle yOz=90^\circ$；

(2)画直观图时，把它们画成对应轴 $O'x'$、$O'y'$、$O'z'$，使 $\angle x'O'y'=45^\circ$(或 135°)，$\angle x'O'z'=90^\circ$. $x'O'y'$ 确定的平面表示水平平面；

(3)已知图形中平行于 x 轴、y 轴或 z 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 x' 轴、y' 轴或 z' 轴的线段；

(4)已知图形中平行于 x 轴和 z 轴的线段，在直观图中保持长度不变；平行于 y 轴的线段，长度为原来的一半.

掌握画直观图的关键两步是：首先画水平放置的空间图形的底面图形的直观图；然后，画出侧面并成图.

例题剖析

【例 1】 如图 9－1－1，已知直线 AB、BC、CA 两两相交，交点分别为 A、B、C.

求证：直线 AB、BC、CA 共面(在同一平面内).

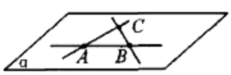


图 9－1－1

证明 1　∵ $AB\cap AC=A$,

∴ 由推论 2，直线 AB 和 AC 确定一个平面 α.

∵ $B\in AB$，$C\in AC$，

∴ $B\in$ 平面 α，$C\in$ 平面 α，

∴ 由公理 1，$BC\subset$ 平面 α，

因此，直线 AB、BC、CA 共面 α.

证明 2　因为 A、B、C 三点不共线，由公理 3，点 A、B、C 可以确定一个平面 α.

因此 $A\in$ 平面 α，$B\in$ 平面 α，

由公理 1，$AB\subset$ 平面 α，

同理 $BC\subset$ 平面 α，$AC\subset$ 平面 α，

即直线 AB、BC、CA 共面 α.

【点评】证明直线共面的问题，一般可先通过公理 3 或其推论确定一个平面 α，然后再利用公理 1 证明直线在平面 α 内.

【例 2】 如图 9－1－2，作空间四边形 $ABCD$ 的截面 PQR，若 PQ、CB 的延长线交于 M，RQ、DB 的延长线交于 N，RP、DC 的延长线交于 K. 求证：M、N、K 三点共线.

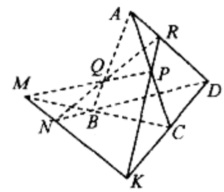


图 9－1－2

证明　∵ $PQ\cap CB=M$，

$PQ\subset$ 平面 PQR，

$BC\subset$ 平面 BCD，

∴ $M\in$ 平面 PQR，

$M\in$ 平面 BCD，

同理 N、$K\in$ 平面 PQR，

N、$K\in$ 平面 BCD，

由公理 2 可知，M、N、K 三点在平面 PQR 与平面 BCD 的交线上，

∴ M、N、K 三点共线.

【点评】证明空间三点共线的基本方法是：由公理 2，只要证明三点都是两个平面的公共点，由于两个平面的交线有且只有一条，所以这三点必共线，此直线即两平面的交线.

【例 3】 如图 9－1－3，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，G、H 分别是 BC、CD 的中点，求证：B_1、D_1、G、H 四点共面.

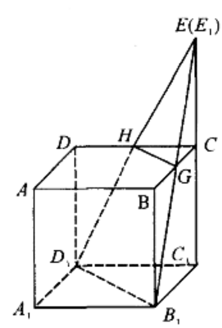


图 9－1－3

证明　延长 B_1G、C_1C 交于 E，延长 C_1C、D_1H 交于 E_1，

$\because CG /\!/ B_1C_1$，

且 $CG=\frac{1}{2}B_1C_1$，

$\therefore CE=C_1C$，

又 $CH /\!/ D_1C_1$，

且 $CH=\frac{1}{2}D_1C_1$，

$\therefore CE_1=C_1C$，

$\therefore$ E 与 E_1 重合.即 D_1H 和 B_1G 相交，

$\therefore$ B_1、D_1、G、H 四点共面.

【点评】证明空间的直线或点共面的基本方法是：①先根据公理 3 或推论确定一个平面，再证明所有的线或点都在这个平面内；②由一部分线或点确定一个平面，由另一部分线或点确定一个平面，再应用公理 3 或其推论证明这两个平面重合.

能力升级

1. 点 P 在直线 l 上，而直线 l 在平面 α 内，用符号表示为　(　　)

   A. $P\subset l\subset\alpha$

   B. $P\in l\in\alpha$

   C. $P\subset l\in\alpha$

   D. $P\in l\subset\alpha$

2. 下列推理，错误的是　(　　)

   A. $A\in l$, $A\in\alpha$, $B\in l$, $B\in\alpha\Rightarrow l\subset\alpha$

   B. $A\in\alpha$, $A\in\beta$, $B\in\alpha$, $B\in\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=AB$

   C. $l\not\subset\alpha$, $A\in l\Rightarrow A\notin\alpha$

   D. $A,B,C\in\alpha$, $A,B,C\in\beta$，且 A,B,C 不共线$\Rightarrow\alpha$ 与 β 重合

3. 下面是四个命题的叙述语：(其中 A, B 表示点，a 表示直线，α 表示平面)

   ①$\because$ $A\subset\alpha$, $B\subset\alpha$, $\therefore$ $AB\subset\alpha$；

   ②$\because$ $A\in\alpha$, $B\in\alpha$, $\therefore$ $AB\in\alpha$；

   ③$\because$ $A\notin a$, $a\subset\alpha$, $\therefore$ $A\notin\alpha$；

   ④$\because$ $A\notin\alpha$, $a\subset\alpha$, $\therefore$ $A\notin a$.

   其中命题叙述方法和推理过程都正确的命题的序号是________.

4. 证明：不在平面内的一条直线和这个平面最多只有一个公共点.

5. 如图 9-1-4,已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,G 是 $\triangle AB_1D_1$ 的重心,求证:A_1,G,C 三点在同一条直线上.

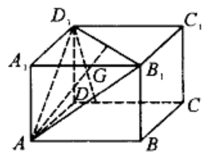


图 9-1-4

9.2　空间的平行直线与异面直线

目标定位

理解空间两直线的位置关系，即相交、平行和异面；掌握异面直线的概念、画法及其常用判定方法；掌握反证法的基本原理和步骤.

理解并掌握空间直线平行的传递性、空间“等角定理”及其推论.

理解掌握异面直线所成角的定义，能够利用定义求出两条直线所成的角.

理解两条异面直线公垂线的定义，理解任意两条异面直线公垂线的存在性和惟一性.

要点查看

1. 空间的平行直线

(1)公理4(平行公理)　平行于同一条直线的两条直线互相平行.

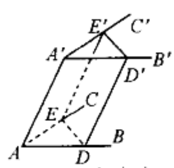
公理4所表述的性质又叫做空间平行线的传递性，即已知直线 a、b、c，且 $a/\!/b$，$b/\!/c$，则 $a/\!/c$.

平行公理是论证平行问题的主要依据.

(2)等角定理　如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等.

已知：$\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 的边 $AB/\!/A'B'$，$AC/\!/A'C'$ 并且方向相同(如下图)

求证：$\angle BAC=\angle B'A'C'$.



证明：在 $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 的两边上分别截取 $AD=A'D'$，$AE=A'E'$，

$\because AD/\!/A'D'$，$AD=A'D'$，

$\therefore A'D'DA$ 是平行四边形，

$\therefore AA' \mathrel{\underline{/\!/}} DD'$.

同理有 $AA' \mathrel{\underline{/\!/}} EE'$.

由平行公理得 $DD'/\!/EE'$ 且有 $DD'=EE'$，

$\therefore D'E'ED$ 是平行四边形.

$\therefore ED=E'D'$，

$\therefore \triangle ADE\cong\triangle A'D'E'$.

$\therefore \angle BAC=\angle B'A'C'$.

等角定理为两条异面直线所成的角的定义提供了可能性与唯一性.

(3)空间图形的平移. 如果空间图形 F 的所有点都沿同一方向移动相同的距离到 F' 的位置，则说图形 F 在空间作了一次平移.

(4)平移规律：图形平移后与原图形全等，即对应角和对应两点间的距离保持不变.

2. 异面直线及其夹角

(1)空间不重合的两条直线的位置关系有三种：

①若按有公共点可分2类：

$$\begin{cases}\text{有且仅有一个公共点——相交直线}\\ \text{没有公共点}\begin{cases}\text{平行直线}\\ \text{异面直线}\end{cases}\end{cases}$$

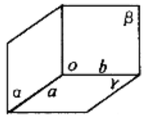
②若按是否共面分2类：

$$\begin{cases}\text{在同一平面内}\begin{cases}\text{相交直线}\\ \text{平行直线}\end{cases}\\ \text{不同在任一平面内——异面直线}\end{cases}$$

(2)异面直线的定义：不同在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线.

注意：①两条直线是异面直线等价于这两条直线既不相交也不平行.

②要深刻理解定义中“不同在任……”的含义；如下图，不能因为 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，就说 a、b 一定是异面直线. 实际上若 $a\cap b=O$，则 a、b 共面.

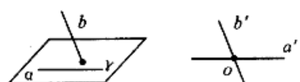


③画异面直线时要以平面作衬托.

(3)关于异面直线的定义　连结平面内一点与平面外一点的直线,和这个平面内不经过此点的直线是异面直线.

本定理提供了判断和证明异面直线的依据和方法.

(4)异面直线所成的角(或夹角)如下图,已知两条异面直线 a、b,经过空间任一点 O 作直线 $a'\,/\!/\,a$, $b'\,/\!/\,b$,由于 a' 和 b' 所成的角的大小与点 O 的选择无关,故把 a' 和 b' 所成的锐角(或直角)叫做异面直线 a 与 b 所成的角(或夹角).



注意:①异面直线夹角范围是$(0°,90°]$;

②根据定义,要计算异面直线 a、b 的夹角大小,必须通过平移转化为相交直线 a'、b' 的夹角,实现"转化"的难点在于点 O 的选择:一般选在 a 或 b 上,或某一特殊位置,把已知条件转移到某一个三角形中,解此三角形求夹角.

(5)两条异面直线互相垂直　如果两条异面直线所成的角是直角,那么这两条直线互相垂直.

注意:①两条直线互相垂直,可能相交,也可能异面.

②记为 $a\perp b$.

例题刷新

【例1】 如图 9-2-1,在空间四边形 $ABCD$ 中,E、H 分别是 AB、AD 的中点,F、G 分别是边 CB、CD 上的点,且 $CF:CB=CG:CD=2:3$.

求证:CA、FE、GH 三条直线交于一点.

证明　连接 BD.

$\because$ E、H 分别是 AB、AD 的中点,

$\therefore$ $EH\,/\!/\,BD$, 且 $EH=\frac{1}{2}BD$.

$\because$ $CF:CB=CG:CD=2:3$,

$\therefore$ $FG\,/\!/\,BD$,且 $FG=\frac{2}{3}BD$,

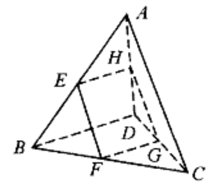


图 9-2-1

$\therefore$ $EH\,/\!/\,FG$,且 $EH<FG$.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是梯形,且 EF、GH 延长后相交.

设 $EF\cap GH=P$,

$\because$ $EF\subset$平面 ABC,$P\in EF$,

$\therefore$ $P\in$平面 ABC.

$\because$ $GH\subset$平面 ADC,$P\in GH$,

$\therefore$ $P\in$平面 ADC,

$\therefore$ P 为平面 ABC 与平面 ADC 的公共点.

又平面 $ABC\cap$平面 $ADC=AC$,

$\therefore$ $P\in AC$,

$\therefore$ CA、FE、GH 三条直线交于一点.

【点评】本例是一个空间三线共点的证明问题,所采用的方法是先证明两条直线 EF 与 GH 相交于一点 P,再证明点 P 在第三条直线上.

【例2】 三个平面两两相交,有三条交线.

求证:这三条交线或交于一点或互相平行.

证明　已知:$\alpha\cap\beta=c$, $\beta\cap\gamma=b$, $\gamma\cap\alpha=a$.

$\because$ $\beta\cap\gamma=b$, $\gamma\cap\alpha=a$,

$\therefore$ $a\subset\gamma$,$b\subset\gamma$,

$\therefore$ a,b 相交于一点或互相平行.

(1)若 a、b 相交于一点(如图 9-2-2).

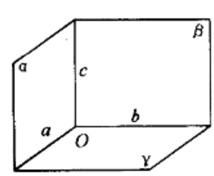


图 9-2-2

设 $a\cap b=O$,

$\because$ $O\in a$, $a\subset\alpha$,

$\therefore$ $O\in\alpha$.

同理 $O\in\beta$,

又 $a\cap\beta=c$，

$\therefore O\in c$，

因此，a、b、c 交于一点.

(2)如图 9-2-3，若 $a/\!/b$，则必有 a、b、c 互相平行. 如不然，不妨设 a 与 c 不平行，由于 a 与 c 在同一平面内，故 a 与 c 必相交.

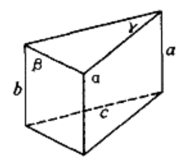


图 9-2-3

设 $a\cap c=O$，依照(1)可证 O 是 β 与 γ 的公共点，从而推得点 O 必在 β 与 γ 的交线 b 上. 这与 $a/\!/b$ 矛盾. 因此必有 a、b、c 互相平行.

综合(1)(2)，结论成立.

【点评】三个平面两两相交，有且仅有三种情况：三个平面两两相交，有一条公共交线；三个平面两两相交，有三条交线，三条交线交于一点或互相平行.

【例 3】 如图 9-2-4，已知 E、F 分别是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 A_1A 和棱 C_1C 上的点，且 $AE=C_1F$.

求证：四边形 $EBFD_1$ 是平行四边形.

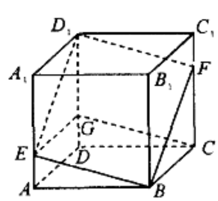


图 9-2-4

证明 在 DD_1 上取一点 G，使 $D_1G=A_1E$，

则易知 $A_1E/\!/D_1G$，且 $A_1E=D_1G$，

$\therefore$ 四边形 A_1EGD_1 为平行四边形，

$\therefore EG/\!/A_1D_1$，且 $EG=A_1D_1$.

又 $A_1D_1/\!/B_1C_1$，且 $A_1D_1=B_1C_1$，$BC/\!/B_1C_1$，且 $BC=B_1C_1$，

$\therefore EG/\!/BC$，且 $EG=BC$，

$\therefore$ 四边形 $EGCB$ 为平行四边形，

$\therefore EB/\!/GC$，且 $EB=GC$.

又 $D_1G/\!/FC$，且 $D_1G=FC$，

$\therefore$ 四边形 D_1GCF 为平行四边形，

$\therefore CG/\!/D_1F$，且 $CG=D_1F$，

$\therefore EB/\!/D_1F$，且 $EB=D_1F$，

$\therefore$ 四边形 $EBFD_1$ 是平行四边形.

【点评】证四边形 $EBFD_1$ 是平行四边形需分两步：先证四边形 $EBFD_1$ 是平面四边形，再用平面几何的平行四边形的判定方法加以判定.

【例 4】 如图 9-2-5，长方体 AC_1 中，$AB=BC=4$，$AA_1=3$，求异面直线 B_1D 与 BC_1 所成角的余弦值.

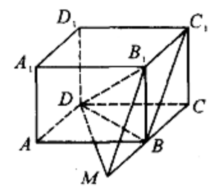


图 9-2-5

解 延长 CB 至 M，使 $BM=BC$，连结 B_1M.

$\because BM/\!/B_1C_1$，且 $BM=BC=B_1C_1$，

$\therefore B_1M/\!/BC_1$，且 $B_1M=BC_1$，

$\therefore DB_1$ 与 B_1M 所成角即等于 DB_1 与 BC_1 所成的角.

连结 DM.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CC_1B$ 中，

$BC_1=\sqrt{CC_1^2+BC^2}=5$，

即 $B_1M=BC_1=5$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BDC$ 中，$BD=\sqrt{BC^2+DC^2}=4\sqrt{2}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle BB_1D$ 中，$B_1D=\sqrt{BB_1^2+BD^2}=\sqrt{41}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle DCM$ 中，$DM=\sqrt{CD^2+MC^2}=\sqrt{80}$，

于是，在 $\triangle DB_1M$ 中，

$$\cos\angle DB_1M=\frac{B_1D^2+B_1M^2-DM^2}{2\cdot B_1D\cdot B_1M}$$

$$=-\frac{7\sqrt{41}}{205}.$$

$\therefore$ 异面直线 B_1D 与 BC_1 所成角的余弦值为 $\frac{7\sqrt{41}}{205}$.

【点评】因为异面直线间所成的角的范围为 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以当所求的角为钝角时，应取其补角. 另外把几何体的某一面延展，通过补形的方法解决问题，也是立体几何中常采用的解题技巧.

【例5】 如图9-2-6,空间四边形 $ABCD$ 中,$AC=6$, $BD=8$,E 为 AB 中点,F 为 CD 中点,$EF=5$,求:AC 与 BD 所成的角.

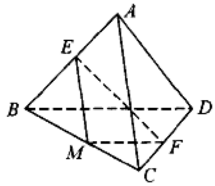


图9-2-6

解 取 BC 中点 M,连结 EM、FM.

则有 $ME/\!/AC$,且 $ME=\frac{1}{2}AC$,

$MF/\!/BD$,且 $MF=\frac{1}{2}BD$,

∴ ME 与 MF 所成的角等于 AC 与 BD 所成的角.

在△MEF 中,

∵ $ME=\frac{1}{2}AC=3$,$MF=\frac{1}{2}BD=4$,$EF=5$,

∴ $ME\perp MF$,

即∠$EMF=90°$,

∴AC 与 BD 所成的角为 $90°$.

【点评】解决异面直线所成角的问题,点 O 的选择很关键.有时不一定是其中某条异面直线上的点,可以根据具体图形作恰当的选择,如四面体中选择棱的中点是常用的方法.本题所选的特殊点既不在 AC 上,也不在 BD 上,而是在 BC 上.

【例6】 空间四边形 $ABCD$ 中,所有的棱长等于 a.

(1)如图9-2-7,已知 E 为 CD 中点,求 AE 和 BC 所成的角;

(2)如图9-2-8,已知 E、M 分别是棱 CD、AD 的中点,求 AE、BM 所成的角.

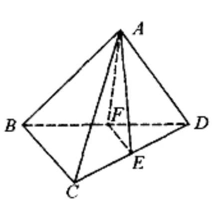


图9-2-7

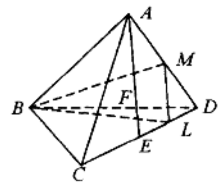


图9-2-8

解 (1)取 BD 中点 F,连结 EF,

∵ E、F 分别是 CD、BD 的中点,

∴ $EF/\!/BC$,

且 $EF=\frac{1}{2}BC$,

∴ ∠AEF 就是异面直线 BC 与 AE 所成的角或其补角.

在△AEF 中,$AE=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,

$EF=\frac{1}{2}a$, $AF=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,

∴ 由余弦定理,$\cos\angle AEF=\frac{\sqrt{3}}{6}$,

故 AE 和 BC 所成的角为 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$.

(2)取 DE 中点 L,连结 LM、BM,

∵ L、M 分别是 DE、AD 的中点,

∴ $LM/\!/AE$,

且 $LM=\frac{1}{2}AE$,

∴ ∠BML 就是异面直线 AE 与 BM 所成的角或其补角.

在△BLM 中,$LM=\frac{\sqrt{3}}{4}a$,$BM=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $BL=\frac{\sqrt{13}}{4}a$,

∴ 由余弦定理,$\cos\angle BML=\frac{1}{6}$,

故异面直线 AE 与 BM 所成的角为 $\arccos\frac{1}{6}$.

【点评】求异面直线所成的角关键在于构造一个易于求解的三角形,使三角形的某一个角是异面直线所成的角或其补角.

能力升级

1. 在空间中如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行，则这两个角的关系是　　(　　)

A. 相等或互补

B. 相等

C. 互补

D. 既不相等也不互补

2. 在空间中，下列命题中正确的个数为　　(　　)

①有两组对边相等的四边形是平行四边形

②四边相等的四边形是菱形

③平行于同一条直线的两条直线平行

④有两边和它们夹角对应相等的两个三角形全等

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

3. 如图 9－2－9，设 E,F,G,H 依次是空间四边形 $ABCD$ 边 AB,BC,CD,DA 上除端点外的点，且 $\frac{AE}{AB}=\frac{AH}{AD}=\lambda,\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\mu$. 则下列结论中不正确的为　　(　　)

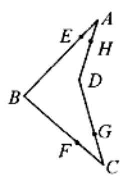


图 9－2－9

A. 当 $\lambda=\mu$ 时，四边形 $EFGH$ 是平行四边形

B. 当 $\lambda\neq\mu$ 时，四边形 $EFGH$ 是梯形

C. 当 $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$ 时，四边形 $EFGH$ 是平行四边形

D. 当 $\lambda=\mu\neq\frac{1}{2}$ 时，四边形 $EFGH$ 是梯形

4. 在空间四边形 $ABCD$ 中，E,F,G,H 分别是 AB, BC,CD,DA 的中点，且 $AC=2,BD=4$. 则 $EG^2+FH^2=$______.

5. 如图 9－2－10，两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 的对应顶点的连线 AA',BB',CC' 交于同一点 O，且 $\frac{AO}{OA'}=\frac{BO}{OB'}=\frac{CO}{OC'}=\frac{2}{3}$.

(1)求证：$AB\parallel A'B',AC\parallel A'C',BC\parallel B'C'$；

(2)求 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}$ 的值.

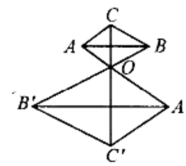


图 9－2－10

6. 设 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长 a 的正方体，M，N，R，S，P，Q 分别是 AA_1，CC_1，AD，CD，A_1B_1，B_1C_1 的中点，求顺次连结这些中点所构成图形的面积.

课间随笔

9.3　直线和平面平行与平面和平面平行

目标定位

理解空间一条直线和一个平面的三种位置关系，掌握线面平行的判定定理，能够正确运用有关知识证明直线与平面平行.

掌握线面平行的性质，能运用线面平行的性质与判定方法解决有关问题.

要求掌握两平面平行的判定方法以及两平面平行的性质.

能够熟练地运用两平面平行的判定和性质定理.

要点查看

1. 直线和平面平行

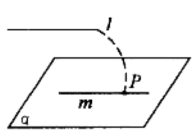
(1)直线和平面的位置关系有三种，用公共点的个数归纳为

$$\begin{cases}\text{直线在平面内——有无数个公共点}\\ \text{直线不在平面内}\begin{cases}\text{相交——只有 1 个公共点}\\ \text{平行——没有公共点}\end{cases}\end{cases}$$

(2)线面平行的判定定理　如果不在一个平面内的一条直线和平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行.

已知：$l\not\subset\alpha$，$m\subset\alpha$，且 $l /\!/ m$

求证：$l /\!/ \alpha$



证明：假设 $l \not/\!/ \alpha$，则 $l\cap\alpha=P$.

若 $P\in m$，

则与 $l /\!/ m$ 矛盾；

若 $P\notin m$，

则 l 与 m 成异面直线，

这也与 $l /\!/ m$ 矛盾，

故 $l /\!/ \alpha$.

注意：①这个定理用符号表示为

$$\left.\begin{matrix}l\not\subset\alpha\\ m\subset\alpha\\ l /\!/ m\end{matrix}\right\}\Rightarrow l /\!/ \alpha$$

②应用此定理时必须 3 个条件齐备. 应用的关键是：要证线面平行，转化为证线线平行，即在 α 内找一条直线 m，使 $m /\!/ l$(已知直线)

(3)线面平行的性质定理　如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行.

已知：$l /\!/ \alpha$，$l\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=m$

求证：$l /\!/ m$

证明：∵ $l /\!/ \alpha$，

∴ l 和 α 没有公共点；

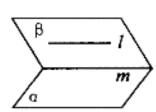
又∵ $m\subset\alpha$，

∴ l 和 m 也没有公共点；

又 l、$m\subset\beta$，

∴ $l /\!/ m$.

注意：①这个定理用符号表示为



$$\left.\begin{matrix}l /\!/ \alpha\\ l\subset\beta\\ \alpha\cap\beta=m\end{matrix}\right\}\Rightarrow l /\!/ m$$

②应用此定理的关键是：寻找平面 β，使 β 经过 l 且与 α 相交于 m.

③本定理同时可作为线线平行的判定定理使用.

④线面平行还有性质："若过平面内一点的直线平行于与此平面平行的一条直线，则这条直线在此平面内."