

最实用 最权威 最经典



新大纲

2007年考研 数学

最新经典讲义(经济类)

主 编 黄先开 曹显兵 简怀玉

● 一线名师 授课底本 ● 经典讲解 全新奉上 ● 附送6重好礼

- 全面解析新大纲考试内容与考试要求，列表形式清晰明确，一目了然
- 总结重要公式与结论，帮助考生常记不忘
- 归纳典型题型讲解内容，例题分析、详解、评注环环相扣
- 每讲配精编习题，有针对性地演练、温习



中国人民大学出版社

国内同类最畅销图书

2007 年考研

数学最新经典讲义(经济类)

主 编 黄先开 曹显兵 简怀玉

正版查询及服务程序

- 刮 开 涂 层
- 获取 16 位数字编码
- 以编码作短信查真伪
- 上 www.1kao.net 注册
- 登录增值服务进免费课堂

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

2007 年考研数学最新经典讲义(经济类)/黄先开,曹显兵,简怀玉主编

北京:中国人民大学出版社,2006

ISBN 7-300-07535-5

I. 2...

II. ①黄...②曹...③简...

III. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料

IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 092548 号

2007 年考研数学最新经典讲义(经济类)

主 编 黄先开 曹显兵 简怀玉

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号 邮政编码 100080

电 话 010-62511242(总编室) 010-62511239(出版部)

010-82501766(邮购部) 010-62514148(门市部)

010-62515195(发行公司) 010-62515275(盗版举报)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.lkao.net> (中国 1 考网)

经 销 新华书店

印 刷 北京宏伟双华印刷有限公司

规 格 210mm×285mm 16 开本 版 次 2006 年 8 月第 1 版

印 张 32.75 印 次 2006 年 8 月第 1 次印刷

字 数 876 000 定 价 38.00 元

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换

前言

本书是作者根据《2007年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》最新编著的一本系统复习考研数学的参考书。它是以作者多年考研辅导讲稿为基础,结合作者对历年考题的研究、命题趋势以及数学的内在规律倾心编写而成的。目的是帮助广大考生在较短时间内系统复习好考研数学内容,取得优异成绩,并为今后研究生学习阶段打下坚实的数学基础,让数学伴随同学们走向人生的辉煌。

本书编写特点如下:

一、考试内容与要求——对照最直接

明确学习内容与要求,才能有的放矢。本书在每章的开头以表格的形式简述最新考研大纲要求的基本概念、基本原理和基本方法及其层次,作者认为这对于考前进行全面、系统的复习是必要的。

二、重要公式与结论——总结最完善

针对每一章中的重点、难点以及容易混淆的概念进行诠释,并归纳总结每一章的重要定理、公式和结论,特别是对一些重要的中间结论或者隐含条件进行了归纳总结。目的在于希望考生通过系统复习后,一见到此类问题,就能立刻联想到考题实际期望考查的是哪一方面的知识点,从而使考生站在一个更高的层次上去分析问题、解决问题,达到认识和理解的新境界。考生是否具备了这种能力,对考研能否取得成功和获得高分是至关重要的。

三、典型题型与例题分析——题型最丰富

对数学课程来说,题目是无穷的,但题型是有限的。作者通过精心编制和设计许多新题型,使得本书几乎囊括了考研数学所涉及的所有题型,并逐一进行分析,给出了解题方法和规律。另外,借助于许多重要经典例题的评注,本书能够帮助同学们更好地把握典型例题的典型处理方法和各种可能的延伸,从而使同学们能够举一反三、触类旁通。

四、习题精选与答案——选题最典型

对于真正掌握一门课程内容并通过相关考试来说,做一定数量的习题是必不可少的。为此,作者按照填空题、选择题和计算证明题的顺序对应各种题型选编了相当数量的习题,供读者模拟练习之用,希望读者尽可能独立地完成习题。

五、本书带“*”的内容,数学四考生不作要求

在成书过程中,作者参考了众多著作和教材,由于篇幅所限不能一一列出,在此谨向有关作者表示衷心感谢!

由于作者水平所限,书中一定还存在许多不足之处,敬请广大读者、同行专家批评指正。

作者

2006年8月于北京

目 录

第一部分 微积分

第一讲 函数、极限、连续 3

- 1 考试内容与要求 3
- 2 重要公式与结论 5
- 3 典型题型与例题分析 7
- 题型一 函数的概念 7
- 题型二 函数、反函数及其性质 9
- 题型三 求函数极限 12
- 题型四 求数列极限 19
- 题型五 求解含参变量的极限 24
- 题型六 已知极限,求待定参数、函数、
 函数值及导数 25
- 题型七 无穷小比较 26
- 题型八 判断函数的连续性与间断点的
 类型 28
- 题型九 综合题 31
- 习题精选一 32
- 习题精选一答案 35

第二讲 导数与微分 37

- 1 考试内容与要求 37
- 2 重要公式与结论 38
- 3 典型题型与例题分析 40
- 题型一 利用导数定义解题 40
- 题型二 导数在几何上的应用 45
- 题型三 变限积分求导 46
- 题型四 利用导数公式与运算法则
 求导 50
- 题型五 综合题 54
- 习题精选二 55
- 习题精选二答案 59

第三讲 不定积分 61

- 1 考试内容与要求 61
- 2 不定积分的主要计算方法 62

3 典型题型与例题分析 63

- 题型一 基本类型 63
- 题型二 有理函数积分 66
- 题型三 三角有理函数积分 68
- 题型四 简单无理函数积分 70
- 题型五 被积函数含有指数函数、
 反三角函数的积分 71
- 题型六 分项——分部积分法 73
- 题型七 综合题 74
- 习题精选三 77
- 习题精选三答案 78

第四讲 定积分与反常(广义)积分 80

- 1 考试内容与要求 80
- 2 重要公式与结论 81
- 3 典型题型与例题分析 82
- 题型一 有关定积分的概念与性质的
 问题 82
- 题型二 利用基本方法(牛顿-莱布尼茨
 公式,换元积分法,分部积分法)
 计算定积分 84
- 题型三 对称区间上的积分 88
- 题型四 涉及变限积分的问题 89
- 题型五 循环计算法 93
- 题型六 化为二重积分计算 93
- 题型七 几类特殊问题 93
- 题型八 反常(广义)积分的计算 97
- 题型九 定积分等式的证明 100
- 题型十 定积分不等式的证明 102
- 题型十一 综合题 104
- 习题精选四 106
- 习题精选四答案 108

第五讲 中值定理的证明技巧 109

- 1 考试内容与要求 109

2 典型题型与例题分析	110
题型一 证明存在 ξ , 使 $f(\xi) = 0$, 或方程 $f(x) = 0$ 有根	110
题型二 证明存在 ξ , 使 $f^{(n)}(\xi) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$)	113
题型三 证明存在 ξ , 使 $G(\xi, f(\xi), f'(\xi)) = 0$	115
题型四 直接用拉格朗日中值定理或 柯西中值定理证明	117
题型五 双介值问题, 要证存在 ξ, η 使 $G(f'(\xi), f'(\eta), \dots) = 0$	118
题型六 含有 $f''(\xi)$ 或更高阶的介值 问题	120
题型七 有关介值的不等式证明	121
题型八 隐含问题	122
题型九 综合题	124
习题精选五	126
习题精选五提示	126

第六讲 不等式证明 127

题型一 利用微分中值定理证明 不等式	127
题型二 利用微积分基本公式: $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$ 证明不等式	128
题型三 利用单调性证明不等式	129
题型四 利用极值与最值证明 不等式	132
题型五 利用曲线的凹凸性证明 不等式	134
题型六 将常数不等式转化为函数 不等式证明	134
习题精选六	135
习题精选六提示	135

第七讲 一元微积分的应用 136

1 考试内容与要求	136
2 典型题型与例题分析	137
题型一 利用导数求曲线的切线、法线 方程	137
题型二 利用导数证明函数恒等式	138
题型三 利用导数判别函数的 单调性	138

题型四 利用导数研究函数的极值与 最值	139
题型五 函数作图	141
题型六 定积分的应用	143
题型七 综合题	146
习题精选七	148
习题精选七答案或提示	150

第八讲 常微分方程与差分方程 152

1 考试内容与要求	152
2 基本方法	154
3 典型题型与例题分析	155
题型一 可化为一阶线性方程的求解	155
题型二 可化为变量分离方程的求解	156
* 题型三 可降阶的高阶方程	158
* 题型四 高阶线性方程和可化为二阶常 系数线性方程的求解	159
* 题型五 解差分方程	161
题型六 综合题与应用题	161
习题精选八	164
习题精选八答案	164

第九讲 多元函数微分学 166

1 考试内容与要求	166
2 重要公式与结论	168
3 典型题型与例题分析	168
题型一 基本概念题	168
题型二 求复合函数的偏导数或 全微分	171
题型三 求隐函数的偏导数或 全微分	173
题型四 已知偏导数, 反求函数关系	176
题型五 多元函数的极值	178
习题精选九	181
习题精选九答案	183

第十讲 多元函数积分学 184

1 考试内容与要求	184
2 重要公式与结论	185
3 典型题型与例题分析	185
题型一 二重积分的基本计算方法	185
题型二 利用重积分的对称性简化 计算	187
题型三 交换积分次序	189

题型四 几类特殊重积分的计算	190
* 题型五 综合题	191
习题精选十	192
习题精选十答案或提示	194
* 第十一讲 无穷级数	195
1 考试内容与要求	195
2 重要公式与结论	197
3 典型题型与例题分析	198
题型一 判定常数项级数的收敛性	198
题型二 求函数项级数的收敛域、幂级数 的收敛半径和收敛区间	202
题型三 求常数项级数的和及函数项级数的 和函数	204
题型四 幂级数的展开	206
题型五 综合题	207

第二部分

第一讲 行列式	223
1 考试内容与要求	223
2 重要公式与结论	223
3 典型题型与例题分析	224
题型一 利用行列式的性质与行(列)展开 定理计算行列式	224
题型二 按行(列)展开公式求代数 余子式	227
题型三 利用多项式分解因式计算 行列式	228
题型四 抽象行列式的计算或证明	229
题型五 n 阶行列式的计算	231
题型六 利用特征值计算行列式	234
题型七 综合题	234
习题精选一	235
习题精选一答案	237

第二讲 矩 阵	239
1 考试内容与要求	239
2 重要公式与结论	241
3 典型题型与例题分析	242
题型一 求数值型矩阵的逆矩阵	242
题型二 A 为抽象矩阵, 讨论 A 的 可逆性	245
题型三 考查矩阵运算的特殊性	246

习题精选十一	209
习题精选十一答案	210
第十二讲 经济应用专题	211
1 考试内容与要求	211
2 重要公式与结论	212
3 典型题型与例题分析	212
题型一 微分在经济上的应用	212
题型二 积分在经济上的应用	215
题型三 多元函数微分学应用	216
题型四 微分方程的应用	216
题型五 线性代数在经济上的应用	217
题型六 概率统计在经济上的应用	218
习题精选十二	219
习题精选十二答案	220

线性代数

题型四 解矩阵方程	248
题型五 利用伴随矩阵 A^* 进行计算或 证明	250
题型六 有关初等矩阵的问题	253
题型七 求矩阵的秩	253
习题精选二	256
习题精选二答案	258

第三讲 向 量

1 考试内容与要求	261
2 重要公式与结论	262
3 典型题型与例题分析	263
题型一 判定向量组的线性相关性	263
题型二 把一个向量用一组向量线性 表示	269
题型三 求向量组的秩	274
题型四 有关矩阵秩的命题	278
* 题型五 综合题	279
习题精选三	281
习题精选三答案	282

第四讲 线性方程组

1 考试内容与要求	285
2 重要公式与结论	286
3 典型题型与例题分析	286
题型一 基本概念题(解的判定、性质、	

结构)	286
题型二 含有参数的线性方程组的求解	289
题型三 抽象线性方程组求解	296
题型四 讨论两个方程组的公共解	299
题型五 讨论两个方程组解之间的关系	301
题型六 已知方程组的解,反求系数矩阵或系数矩阵中的参数	302
题型七 有关基础解系的讨论	304
题型八 有关 $AB=0$ 的应用	306
题型九 综合题	307
习题精选四	312
习题精选四答案	314

第五讲 特征值 特征向量

1 考试内容与要求	317
2 重要公式与结论	318
3 典型题型与例题分析	319
题型一 数值型矩阵特征值、特征向量的计算	319
题型二 计算抽象矩阵的特征值	321

题型三 特征值、特征向量的逆问题	324
题型四 矩形相似与对角化的讨论	329
题型五 特征值、特征向量与相似矩阵的应用问题	334
题型六 有关特征值、特征向量的证明问题	338
题型七 综合题	340
习题精选五	343
习题精选五答案	345

第六讲 二次型

1 考试内容与要求	347
2 重要公式与结论	348
3 典型题型与例题分析	348
题型一 基本概念题(二次型的矩阵、秩、正负惯性指数)	348
题型二 化二次型为标准形	350
题型三 有关正定二次型(正定矩阵)命题的证明	355
题型四 综合题	359
习题精选六	361
习题精选六答案	362

第三部分 概率论与数理统计

第一讲 随机事件与概率

1 考试内容与要求	367
2 重要公式与结论	369
3 典型题型与例题分析	371
题型一 事件的表示和运算	371
题型二 有关概率基本性质的命题	372
题型三 古典概型与几何概型的概率计算	375
题型四 事件独立性的命题	378
题型五 条件概率与积事件概率的计算	380
题型六 全概率公式和贝叶斯公式	383
题型七 伯努利试验	386
题型八 综合题	387
习题精选一	389
习题精选一答案	392

第二讲 随机变量及其分布

1 考试内容与要求	394
2 重要公式与结论	395
3 典型题型与例题分析	397
题型一 有关随机变量与分布的基本概念题	397
题型二 求随机变量的分布律与分布函数	400
题型三 已知事件发生的概率,反求事件中的未知参数	406
题型四 利用常见分布求相关事件的概率	407
题型五 求随机变量函数的分布	409
题型六 综合题	413
习题精选二	415
习题精选二答案	417

第三讲 多维随机变量及其分布

1 考试内容与要求	420
-----------	-----

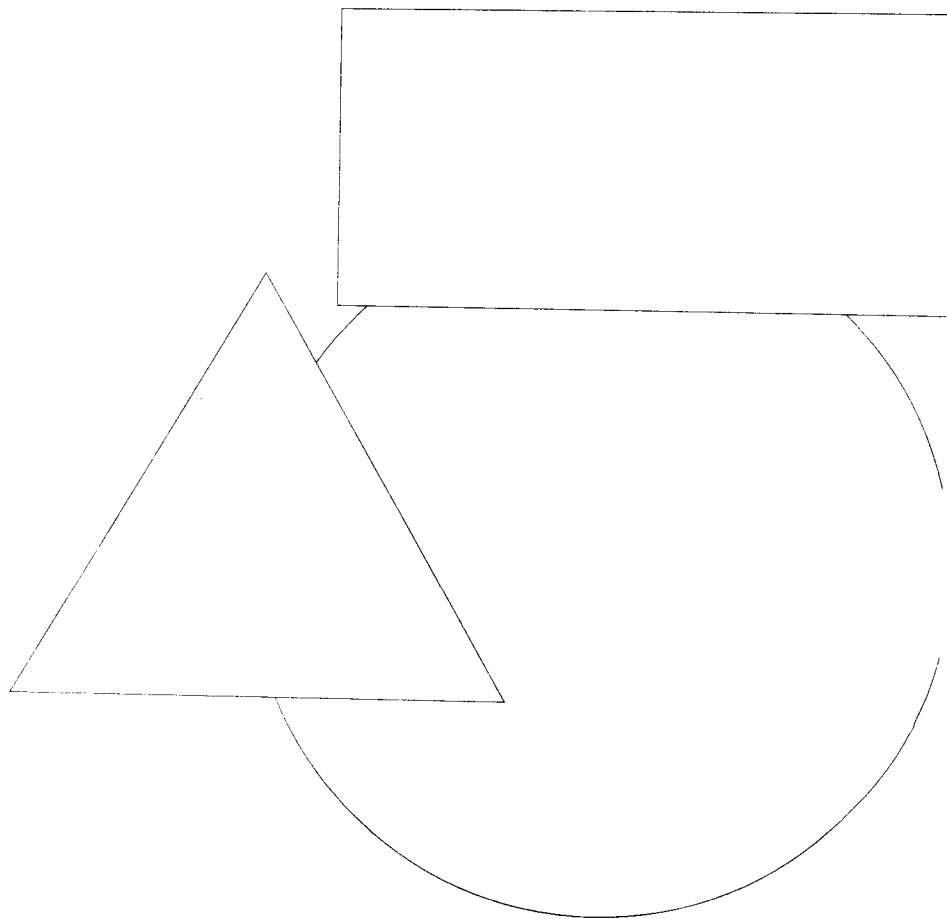
2 重要公式与结论	421	习题精选五	475
3 典型题型与例题分析	423	习题精选五答案	476
题型一 联合分布、边缘分布与条件分布 的计算	423	* 第六讲 数理统计的基本概念	477
题型二 已知部分分布律或边缘分布,求 联合分布律或相关参数	428	1 考试内容与要求	477
题型三 利用已知分布求相关事件的 概率	429	2 重要公式与结论	478
题型四 随机变量函数的分布	431	3 典型题型与例题分析	479
题型五 随机变量的独立性的讨论	435	题型一 求样本容量 n , 或与样本均值 $\bar{X}$ 和样本方差 S^2 有关的概率	479
题型六 综合题	437	题型二 求统计量的数字特征	480
习题精选三	437	题型三 求统计量的分布	482
习题精选三答案	439	习题精选六	484
第四讲 随机变量的数字特征	442	习题精选六答案	485
1 考试内容与要求	442	* 第七讲 参数估计	486
2 重要公式与结论	444	1 考试内容与要求	486
3 典型题型与例题分析	444	2 重要公式与结论	487
题型一 期望和方差的计算	444	3 典型题型与例题分析	487
题型二 随机变量函数的数学期望与 方差	448	题型一 求矩法估计和最大似然 估计	487
题型三 有关协方差、相关系数、独立性 与相关性的命题	454	题型二 估计量评选标准的讨论	494
题型四 有关数字特征的应用题	459	题型三 参数的区间估计	496
题型五 有关切比雪夫不等式的 命题	461	题型四 综合题	498
题型六 综合题	463	习题精选七	499
习题精选四	465	习题精选七答案	500
习题精选四答案	467	* 第八讲 假设检验	502
第五讲 大数定律和中心极限定理	469	1 考试内容与要求	502
1 考试内容与要求	469	2 重要公式与结论	503
2 典型题型与例题分析	470	3 典型题型与例题分析	503
题型一 有关大数定律的命题	470	题型一 正态总体未知参数的假设 检验	503
题型二 有关中心极限定理的命题	471	题型二 有关两类错误的命题	504
题型三 综合题	475	习题精选八	506
		习题精选八答案	507

第一部分 **PART ONE**

微积分

PART

ONE



第一讲 函数、极限、连续

1 考试内容与要求

一 考试内容

函数的概念及表示法	设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x \in D$, 按照一定的法则, 变量 y 总有一个确定的值和它对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记作 $y = f(x)$. 表示法: 公式法、表格法、图形法等.
函数的有界性	设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果存在正数 M , 对于任意 $x \in I$, 恒有 $ f(x) \leq M$, 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有界. 如果这样的 M 不存在, 则称函数 $y = f(x)$ 在 I 上无界.
函数的单调性	设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果对于 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上是单调增加 (或单调减少) 的.
函数的周期性	设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个不为零的常数 T , 使得对于任一 $x \in D$, 有 $x \pm T \in D$ 且 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.
函数的奇偶性	设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 如果对任一 $x \in D$, 恒有 $f(-x) = f(x)$ [或 $-f(x)$], 则称函数 $f(x)$ 为偶函数 (或奇函数). 偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于坐标原点对称.
复合函数	设 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ 为两个函数, 若 $\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域有非空交集, 则由 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 可复合而成复合函数 $y = f[\varphi(x)]$, u 称为中间变量.
反函数	设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 W . 若对 $\forall y \in W$, $\exists$ 唯一确定的 $x \in D$, 满足 $y = f(x)$, 则得到 x 是 y 的函数, 记为 $x = \varphi(y)$, 称为 $y = f(x)$ 的反函数.
分段函数	在不同区间段上函数的表达式不一致的函数, 称为分段函数.
隐函数	设有关系式 $F(x, y) = 0$, 若对 $\forall x \in D$, 存在唯一确定的 y 满足 $F(x, y) = 0$ 与 x 相对应, 由此确定的 y 与 x 的函数关系 $y = y(x)$ 称为由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数.
基本初等函数的性质及其图形	幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数. 这些函数的性质及其图形 (略).
初等函数	由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合运算所构成并可用一个式子表示的函数, 称为初等函数.

函数关系的建立	通过经济问题等建立函数关系式.
数列极限的定义	$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Leftrightarrow$ 对 $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 恒有 $ x_n - A < \epsilon$.
函数极限的定义和性质	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 恒有 $ f(x) - A < \epsilon$. 性质: ① 唯一性: 极限存在必唯一. ② 保号性: 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 而且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则存在点 x_0 的某一空心邻域, 当 x 在该邻域内时, 有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$). ③ 如果在 x_0 的某一空心邻域内 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).
函数的左极限与右极限	若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 存在, 记为 $f(x_0 - 0)$, 则称之为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限; 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 存在, 记为 $f(x_0 + 0)$, 则称之为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限.
无穷小量与无穷大量的概念及其关系	设自变量 x 在某一变化过程中, 如果 $\lim f(x) = 0$, 则称在自变量 x 的该变化过程中, 函数 $f(x)$ 为无穷小量; 如果 $\lim f(x) = \infty$, 则称在自变量 x 的该变化过程中, 函数 $f(x)$ 为无穷大量. 其关系为: 若 $\lim f(x) = \infty$, 则 $\lim \frac{1}{f(x)} = 0$; 若 $\lim f(x) = 0$, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\lim \frac{1}{f(x)} = \infty$.
无穷小量的性质及无穷小量的比较	性质: ① 有限个无穷小量之和仍为无穷小量; ② 有限个无穷小量之积仍为无穷小量; ③ 无穷小量乘有界变量仍为无穷小量; ④ $\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\lim \alpha(x) = 0$. 比较: 设在自变量 x 的某一变化过程中, $\alpha(x), \beta(x)$ 是无穷小量: ① 如果 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小, 记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$; ② $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, 则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小; ③ $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, 则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小; ④ $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.
极限的四则运算	设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则 $\lim (f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$; $\lim f(x) \cdot g(x) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$; $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$, 若 $\lim g(x) \neq 0$.

极限存在的两个准则: 单调有界准则和夹逼准则	准则(1): 若存在 x_0 的某空心邻域, 有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ 成立, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. 准则(2): 单调有界数列必有极限.
两个重要极限	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$
函数间断点的类型	若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处不连续, 则称点 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的间断点. 若 $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ 均存在, 则称 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点; 若 $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ 中至少有一个不存在, 则称 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.
初等函数的连续性	初等函数在其定义区间内必连续.
闭区间上连续函数的性质	设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 性质 ①(有界性): $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界; 性质 ②(最值定理): $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必取到最大值和最小值; 性质 ③(介值定理): 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值为 M, 最小值为 m, 则对 $\forall c \in [m, M]$, 必 $\exists \xi \in [a, b]$, 使 $f(\xi) = c$.

二 考试要求

1. 理解函数的概念, 掌握函数的表示法, 会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念, 了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形, 了解初等函数的概念.
5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.
6. 了解极限的性质与极限存在的两个准则, 掌握极限的四则运算法则, 掌握利用两个重要极限求极限的方法.
7. 会用洛必达法则求极限.
8. 理解无穷小量的概念和基本性质, 掌握无穷小量的比较方法. 了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系.
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续), 会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性, 了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理), 并会应用这些性质.

2 重要公式与结论

一、函数的奇偶性、周期性与导数、积分的联系

1. 设 $f(x)$ 是可导的偶函数, 则 $f'(x)$ 为奇函数, 且 $f'(0) = 0$;
 设 $f(x)$ 是可导的奇函数, 则 $f'(x)$ 为偶函数.
2. 设 $f(x)$ 连续: 如 $f(x)$ 为偶函数, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 为奇函数; 如 $f(x)$ 为奇函数, 则对任意的 a , $\int_a^x f(t) dt$ 为偶函数.
3. 设 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续, 则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & f(x) \text{ 为偶函数,} \\ 0, & f(x) \text{ 为奇函数.} \end{cases}$$

4. 可导的周期函数的导函数仍为同周期函数.

5. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 则

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(x) dx &= \int_0^T f(x) dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx, \\ \int_0^{nT} f(x) dx &= n \int_0^T f(x) dx. \end{aligned}$$

二、在自变量不同变化过程中的函数极限及其联系

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A.$$

$$4. \text{ 设 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

【评注】由结论 3, 4 知可利用函数极限求数列极限.

三、连续的隐含条件

如题中给了连续条件, 应充分利用以下结论:

$$1. \text{ 设 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处连续, 则 } f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

$$2. \text{ 设 } f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续, 则 } f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上可积, 且可构造 } f(x) \text{ 的原函数 } \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b),$$

对 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可应用最值、介值、零点定理.

四、两个重要极限的一般形式

$$1. \text{ 设 } \alpha(x) \rightarrow 0, \text{ 则 } \lim_{\alpha(x)} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1.$$

$$2. \text{ 设 } f(x) \rightarrow 1, \quad g(x) \rightarrow \infty, \text{ 则 } \lim_{g(x)} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{g(x)} g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{g(x)} g(x) [f(x) - 1]} \quad (\ln f(x) = \ln[1 + f(x) - 1] \sim f(x) - 1).$$

五、无穷小量与有界变量之积为无穷小量

特例: 设 $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow \infty$, 则

$$\lim f(x) \sin g(x) = \lim f(x) \cos g(x) = \lim f(x) \arctan g(x) = \lim f(x) \operatorname{arccot} g(x) = 0.$$

六、极限存在准则及性质

1. 单调有界数列必有极限.

2. 夹逼定理: 设在 x_0 的某空心邻域内 (或当 $|x| > X$ 时), 有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 且

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} h(x) = A, \quad \text{则} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = A.$$

3. 极限的局部保号性与有界性: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$,

(1) 则存在 x_0 的某空心邻域, 使得在该邻域内 $f(x)$ 有界;

(2) 如果 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则存在 x_0 的某空心邻域, 使得在此邻域内有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$);

(3) 如果在 x_0 的某空心邻域内有 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 则 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$);

(4) $\lim f(x) = A \Leftrightarrow \exists$ 无穷小量 $\alpha(x)$, 使 $f(x) = A + \alpha(x)$.

七、无穷小量的等价替换

1. 若 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 且 $\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = A$, 则

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'} = A.$$

2. 常见的等价无穷小: 设 $\alpha(x) \rightarrow 0$, 则

$$\sin \alpha(x) \sim \tan \alpha(x) \sim \arctan \alpha(x) \sim \arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x);$$

$$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \ln[1 + \alpha(x)] \sim \alpha(x);$$

$$1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{1}{2}[\alpha(x)]^2, \quad [1 + \alpha(x)]^k - 1 \sim k\alpha(x) \quad (k \neq 0).$$

八、常见的极限不存在的函数

1. 无穷大量是极限不存在的一种形式.

2. 设 $\alpha(x) \rightarrow \infty$, 则下列函数的极限不存在:

$$\sin \alpha(x), \quad \cos \alpha(x), \quad e^{\alpha(x)}, \quad \tan \alpha(x), \quad \cot \alpha(x).$$

3 典型题型与例题分析

题型一 函数的概念

解题提示

函数概念及其复合, 包括分段函数的复合, 本质上是函数关系的建立问题, 而建立函数关系是进一步研究函数性质的基础.

1. 假设有关系式 $f[g(x)] = \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 的表达式已知, 有两种情况:

(1) 已知 f , 求 g : 相当于求反函数 $g(x) = f^{-1}[\varphi(x)]$;

(2) 已知 g , 求 f : 一般作变量代换 $g(x) = u \Rightarrow x = g^{-1}(u)$, 于是有 $f(u) = \varphi[g^{-1}(u)]$, 再根据函数关系与变量字母无关, 得 $f(x) = \varphi[g^{-1}(x)]$.

2. 求函数的定义域时注意:

(1) 分式中分母不能为零;

(2) 根式中负数不能开偶次方根;

(3) 对数函数中, 底数要大于零不等于 1, 真数要大于零;

(4) 反正弦函数和反余弦函数 $\arcsin x, \arccos x$ 中 $-1 \leq x \leq 1$.

【例 1.1】 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

【分析】 直接按复合函数的定义计算即可, 注意 $|f(x)| \leq 1$.

【详解】 由 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ 知 $|f(x)| \leq 1$, 因此有 $f[f(x)] = 1$.

【评注】 已知 $f(x), g(x)$, 求复合函数 $f[g(x)]$ (或 $g[f(x)]$), 一般用代入法逐次复合即可, 应特别注意的是 $g(x)$ 的值域与 $f(x)$ 的定义域的对应关系.

【例 1.2】 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于

(A) 0.

(B) 1.

(C) $\begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

(D) $\begin{cases} 0, & |x| \leq 1, \\ 1, & |x| > 1. \end{cases}$

【 】

【详解】 由于 $|f(x)| \leq 1$, 于是 $f[f(x)] = 1$, 故 $f\{f[f(x)]\} = 1$, 可见应选 (B).

【例 1.3】 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ x+2, & x > 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x, & x \geq 0, \end{cases}$ 则 $g[f(x)]$ 为

(A) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0. \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0. \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0. \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0. \end{cases}$

【 】

【详解】 $g[f(x)] = \begin{cases} 2-f(x), & f(x) \leq 0, \\ f(x)+2, & f(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2-(-x), & x \geq 0, \\ 2+x^2, & x < 0 \end{cases}$
 $= \begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0. \end{cases}$

可见应选(D).

【例 1.4】 设 $f(x+1) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$ 则 $f(x) =$ _____.

【分析】 设中间变量 $x+1$ 为一新变量, 解出 f 关于新变量的表达式, 再利用函数与变量的关系与用什么符号表示无关的性质即得.

【详解】 设 $t = x+1, x = t-1$, 则

$$f(t) = \begin{cases} (t-1)^2, & 0 \leq t-1 \leq 1, \\ 2(t-1), & 1 < t-1 \leq 2 \end{cases} = \begin{cases} (t-1)^2, & 1 \leq t \leq 2, \\ 2(t-1), & 2 < t \leq 3, \end{cases}$$

即

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & 1 \leq x \leq 2, \\ 2(x-1), & 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

故应填 $\begin{cases} (x-1)^2, & 1 \leq x \leq 2, \\ 2(x-1), & 2 < x \leq 3. \end{cases}$

【例 1.5】 设 $f(\tan x) = \tan x + \sin 2x$, 其中 $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$, 求 $f(\cot x)$.

【分析】 先求出 $f(x)$ 的表达式, 再求 $f(\cot x)$.

【详解】 因为

$$\begin{aligned} f(\tan x) &= \tan x + \sin 2x = \tan x + 2 \sin x \cos x \\ &= \tan x + 2 \tan x \cdot \cos^2 x = \tan x + 2 \tan x \cdot \frac{1}{\sec^2 x} \\ &= \tan x + \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}, \end{aligned}$$

所以

$$f(x) = x + \frac{2x}{1+x^2}.$$

于是

$$f(\cot x) = \cot x + \frac{2 \cot x}{1 + \cot^2 x} = \cot x + \sin 2x.$$

【例 1.6】 设 $f(x) = \frac{x+|x|}{2}$, 则 $f(1-x) \cdot f(1+x) =$ _____.

【分析】 表达式中含绝对值符号, 先去绝对值然后再进行运算.

【详解】 因为 $f(x) = \frac{x+|x|}{2} = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ 所以

$$f(1-x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases} \quad f(1+x) = \begin{cases} 1+x, & x \geq -1, \\ 0, & x < -1, \end{cases}$$

故

$$f(1-x) \cdot f(1+x) = \begin{cases} 1-x^2, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$