经全国中小学教材审定委员会
2005 年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4–5

不等式选讲

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

人民教育出版社

A 版

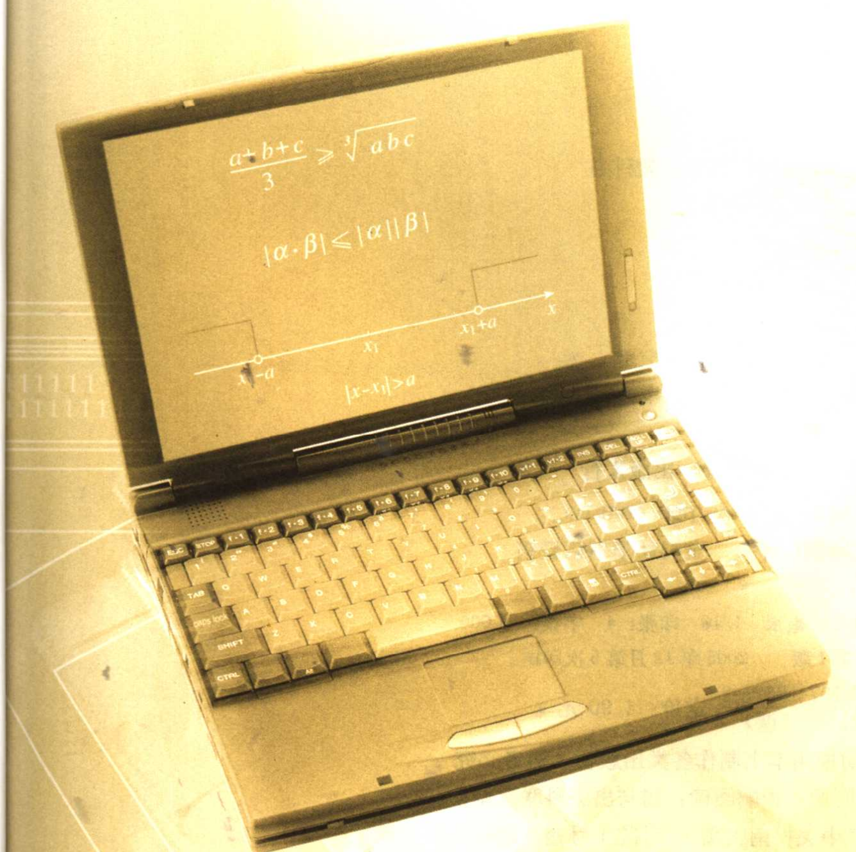
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4–5

不等式选讲

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心
编著



人民教育出版社

A版

普通高中课程标准实验教科书

数　学

选修 4－5

A 版

不等式选讲

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

*

人民教育出版社　出版发行

网址：http：//www.pep.com.cn

北京四季青印刷厂印装　全国新华书店经销

*

开本：890 毫米×1 240 毫米　1/16　印张：4　字数：76 000

2005 年 6 月第 1 版　2005 年 12 月第 5 次印刷

ISBN 7-107-18675-2
G・11765（课）　定价：4.90 元

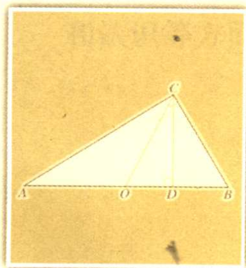
如发现印、装质量问题，影响阅读，请与出版科联系调换。

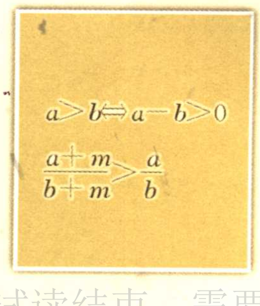
（联系地址：北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

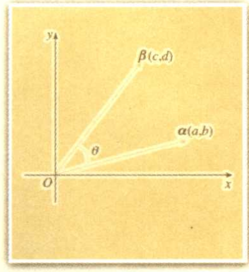
主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

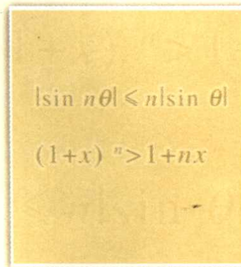
主要编者：俞求是　章建跃　田载今　马　波　李世杰
责任编辑：李龙才
美术编辑：王俊宏　王　艾
封面设计：吴　敬

目 录






y
β(c,d)
α(a,b)
θ
O
x


|sin nθ| ≤ n|sin θ|
(1+x)ⁿ>1+nx

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$$

$$|\alpha\cdot\beta|\leqslant|\alpha||\beta|$$

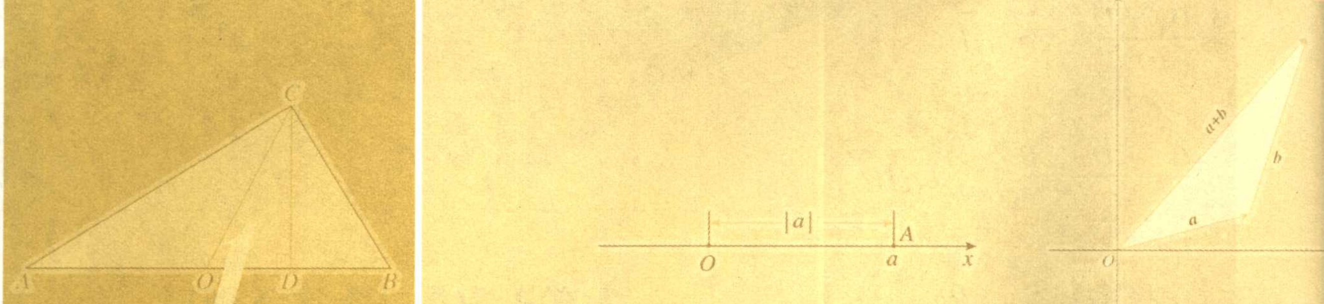
引言

在自然界中，等量关系和不等量关系是普遍存在的. 描述等量关系可以用等式，描述不等量关系可以用不等式. 与等量关系一样，不等关系也是数学研究的重要内容. 所以，研究不等关系和不等式，既是数学研究的重要方面，也是我们认识世界的重要途径.

本专题将在复习已有不等式知识（不等式的性质、基本不等式等）的基础上，继续学习不等式的知识，包括一些关于绝对值不等式的性质；证明不等式的基本方法：比较法，综合法和分析法，反证法和放缩法；几个重要的不等式：基本不等式，二维形式、向量形式和一般形式的柯西不等式，排序不等式；数学归纳法及其在证明不等式中的应用；等等.

许多重要的不等式有深刻的数学意义和背景，本专题中给出的不等式大都有明确的几何背景，把握这些几何背景，对于我们理解这些不等式的实质是非常重要的. 因此，在学习过程中，同学们应当注意理解这些不等式的背景（特别是几何背景）及其蕴涵的数学思想，尽可能借助几何直观来证明这些基本而重要的不等式，从中领悟数形结合等重要数学思想在研究不等式中的作用.

希望同学们通过本书的学习，在数学知识的积累、数学能力的提高、对数学的理解和认识等方面都能再上一个新台阶.



第一讲　不等式和绝对值不等式

现实中，人们常用长与短、多与少、高与矮、轻与重……来描述客观事物在数量上存在的不等关系．数学中，人们常用不等式表示这样的不等关系，不等式是数学研究的重要内容．

一　不等式

1. 不等式的基本性质

研究不等式的出发点是实数的大小关系．我们知道，数轴上的点与实数一一对应，因此可以利用数轴上点的左右位置关系来规定实数的大小：

设 a，b 是两个实数，它们在数轴上所对应的点分别是 A，B．那么，当点 A 在点 B 的左边时，$a<b$；当点 A 在点 B 的右边时，$a>b$（图 1.1-1）．

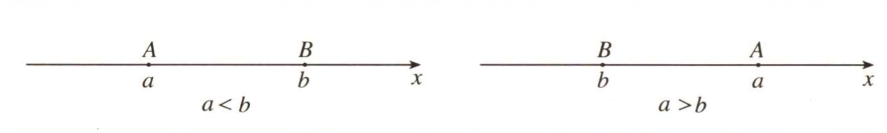


图 1.1-1

关于实数 a，b 的大小关系，有以下基本事实：

如果 $a>b$，那么 $a-b$ 是正数；如果 $a=b$，那么 $a-b$ 等于零；如果 $a<b$，那么 $a-b$ 是负数．反过来也对．

这个基本事实可以表示为

$$a>b \Leftrightarrow a-b>0;$$

$$a=b \Leftrightarrow a-b=0;$$

$$a<b \Leftrightarrow a-b<0.$$

上面的符号“$\Leftrightarrow$”表示“等价于”，即可以互相推出．

思考

从上述基本事实出发，你认为可以用什么方法比较两个实数的大小？

从上述基本事实可知，要比较两个实数的大小，可以转化为比较它们的差与0的大小. 这是研究不等关系的一个出发点.

0是正数与负数的分界点，它为实数比较大小提供了“标杆”.

例1　比较$(x+3)(x+7)$和$(x+4)(x+6)$的大小.

分析：通过考察它们的差与0的大小关系，得出这两个多项式的大小关系.

解：因为

$$\begin{aligned}&(x+3)(x+7)-(x+4)(x+6)\\=&(x^2+10x+21)-(x^2+10x+24)\\=&-3<0,\end{aligned}$$

所以

$$(x+3)(x+7)<(x+4)(x+6).$$

探究

我们知道，等式有“等式两边同加（或减）一个数，等式仍然成立”“等式两边同乘（或除以）一个数，等式仍然成立”等基本性质. 类比等式的这些性质，不等式有哪些基本性质呢？

我们知道，等式的基本性质是从数的运算的角度提出的. 同样的，由于不等式也研究实数之间的关系，所以联系数的运算（加、减、乘、除、乘方、开方等）来思考不等式的基本性质是非常自然的. 例如，不等式两边加（或乘）同一个数，不等式是否仍然成立？等等.

研究实数的关系时联系数的运算，是一种基本的数学思想.

由两个实数大小关系的基本事实，可以得出不等式的一些基本性质.

（1）如果 $a>b$，**那么** $b<a$；**如果** $b<a$，**那么** $a>b$. **即**

$$a>b \Leftrightarrow b<a.$$

（2）如果 $a>b$，$b>c$，**那么** $a>c$. **即**

$$a>b,\ b>c \Rightarrow a>c.$$

（3）如果 $a>b$，**那么** $a+c>b+c$.

（4）如果 $a>b$，$c>0$，**那么** $ac>bc$；**如果** $a>b$，$c<0$，**那么** $ac<bc$.

（5）如果 $a>b>0$，**那么** $a^n>b^n$（$n\in\mathbf{N}$，$n\geqslant2$）.

（6）如果 $a>b>0$，**那么** $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（$n\in\mathbf{N}$，$n\geqslant2$）.

通过语言叙述可以加深理解上述基本性质. 例如，性质（4）可以表述为：不等式两

边同乘一个正数，不等号同向；不等式两边同乘一个负数，不等号反向．你能用自己的语言叙述上述各条性质吗？

请同学们尝试证明以上不等式的基本性质．

思考

观察不等式的基本性质（1）～（6），并与等式的基本性质比较，你认为在研究不等式时，需要特别注意什么问题？

事实上，从上述基本性质可以发现，在研究不等式时，需要特别注意“符号问题”，即在作乘（除）运算时，乘（除）数的符号会影响不等号的方向．

上述关于不等式的基本事实和基本性质是解决不等式问题的基本依据，研究不等式时，经常以它们作为出发点．例如，利用不等式的基本性质可以得到下列结论：

如果 $a>b$，$c>d$，那么 $a+c>b+d$；

如果 $a>b>0$，$c>d>0$，那么 $ac>bd$.

你能证明这两个结论吗？

例 2 已知 $a>b>0$，$c>d>0$，求证

$$\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}.$$

分析： 观察要证的不等式，联系性质（6），可知关键是证明 $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$．为此先要证 $\frac{1}{d}>\frac{1}{c}$．

证明： 因为 $c>d>0$，所以

$$cd>0,\ c-d>0,\ \frac{1}{cd}>0.$$

于是

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{c}=\frac{c-d}{cd}>0,$$

因此

$$\frac{1}{d}>\frac{1}{c}>0.$$

由 $a>0$ 及性质（4），得

$$\frac{a}{d}>\frac{a}{c}>0.$$

由 $a>b>0$，$\frac{1}{c}>0$ 及性质（4），得

$$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}>0.$$

由性质（2），得

$$\frac{a}{d}>\frac{b}{c}>0.$$

根据性质（6），有

$$\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}.$$

2. 基本不等式

我们已经学过重要不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$（a，$b\in\mathbf{R}$），为了方便同学们学习，下面将它以定理的形式给出，并给出证明.

定理 1　如果 a，$b\in\mathbf{R}$，那么

$$a^2+b^2\geqslant 2ab,$$

当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

证明：因为 $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geqslant 0$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立，所以，

$$a^2+b^2\geqslant 2ab,$$

当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

探究

你能从几何的角度解释定理 1 吗？

如果把实数 a，b 作为线段长度，那么可以这样来解释定理 1：

以 $a\geqslant b$ 为例. 如图 1.1-2，在正方形 $ABCD$ 中，$AB=a$；在正方形 $CEFG$ 中，$EF=b$. 那么

$$S_{正方形ABCD}+S_{正方形CEFG}=a^2+b^2.$$

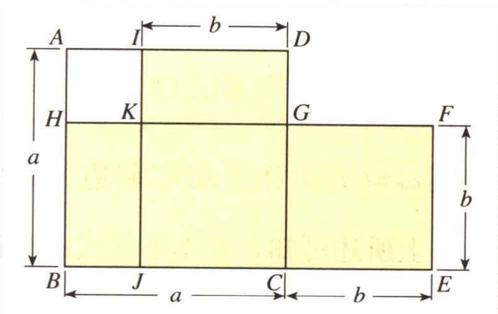


图 1.1-2

矩形 $BCGH$ 和矩形 $JCDI$ 的长均为 a，宽均为 b，它们的面积的和是

$$S_{矩形BCGH}+S_{矩形JCDI}=2ab.$$

矩形 $BCGH$ 和矩形 $JCDI$ 的公共部分是正方形 $JCGK$，它的边长等于 b，其面积与正方形 $CEFG$ 相等. 所以，上述两个矩形的面积和 $2ab$ 就等于图中阴影部分的面积，它不大于正方形 $ABCD$ 与正方形 $CEFG$ 的面积的和，即

$$a^2+b^2\geqslant 2ab.$$

当且仅当 $a=b$ 时，两个矩形成为两个正方形，阴影部分面积等于正方形 $ABCD$ 与

正方形 $CEFG$ 的面积和，即

$$a^2+b^2=2ab.$$

将定理 1 作简单的恒等变形，就可以得到以下的基本不等式（basic inequality）.

定理 2 （基本不等式） 如果 a，$b>0$，那么

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},$$

当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

证明：因为 $a+b=(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2\geqslant2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=2\sqrt{ab}$，所以

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},$$

当且仅当 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$，即 $a=b$ 时，等号成立.

如果 a，b 都是正数，我们就称 $\frac{a+b}{2}$ 为 a，b 的算术平均（arithmetic mean），$\sqrt{ab}$ 为 a，b 的几何平均（geometric mean）. 于是，基本不等式可以表述为：

两个正数的算术平均不小于（即大于或等于）它们的几何平均.

下面我们讨论一下基本不等式的几何意义. 在图 1.1-3 中，CD 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中斜边 AB 上的高，OC 是斜边 AB 上的中线，$AD=a$，$BD=b$. 于是，

$$OC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}(a+b).$$

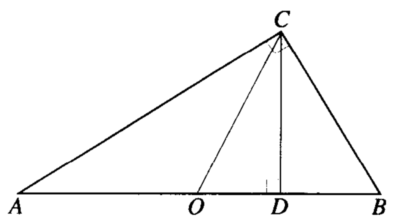


图 1.1-3

因为 $\angle DCA+\angle A=90^\circ$，$\angle B+\angle A=90^\circ$，

所以 $\angle DCA=\angle B$.

于是 $\mathrm{Rt}\triangle DCA\backsim\mathrm{Rt}\triangle DBC$.

从而 $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{BD}$，即 $\frac{a}{CD}=\frac{CD}{b}$.

所以 $CD=\sqrt{ab}$.

当 $a\neq b$ 时，在 $\mathrm{Rt}\triangle OCD$ 中，斜边 OC 大于直角边 CD，所以 $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$.

当 $a=b$ 时，$\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AB 上的中线 OC 和高 CD 重合，所以 $\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$.

综上所述可知，基本不等式的几何意义是：直角三角形斜边上的中线不小于斜边上的高.

探究

你能给出基本不等式的其他几何解释吗？

例 3 求证：(1) 在所有周长相同的矩形中，正方形的面积最大；(2) 在所有面积相同的矩形中，正方形的周长最短.

分析：设矩形的长为 x，宽为 y，那么该矩形的周长为 $2(x+y)$，面积为 xy. 这样，问题就转化为：

(1) 如果 $2(x+y)$（从而 $x+y$）为定值，那么正数 x，y 有什么关系时 xy 最大？

(2) 如果 xy 为定值，那么正数 x，y 有什么关系时 $2(x+y)$（从而 $x+y$）最小？

由于基本不等式恰好涉及两个正数的和与积之间的数量关系，所以可以利用基本不等式证明.

证明：设矩形的长为 x，宽为 y.

(1) 设矩形周长为定值 l，即 $2x+2y=l$ 为定值. 根据基本不等式

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy},$$

可得

$$\frac{l}{4}\geqslant\sqrt{xy}.$$

于是，矩形的面积

$$xy\leqslant\frac{l^2}{16},$$

当且仅当 $x=y$ 时，等号成立，即当且仅当矩形是正方形时，面积 xy 取得最大值$\frac{l^2}{16}$.

(2) 设矩形面积为定值 S，即 $xy=S$ 为定值. 根据基本不等式

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy},$$

矩形的周长

$$2(x+y)\geqslant 4\sqrt{xy}=4\sqrt{S},$$

当且仅当 $x=y$ 时，等号成立，即当且仅当矩形是正方形时，周长$2(x+y)$取最小值 $4\sqrt{S}$.

一般地，从基本不等式可以得到下面结论：对两个正实数 x，y，如果它们的和 S 是定值，则当且仅当 $x=y$ 时，它们的积 P 取得最大值；如果它们的积 P 是定值，则当且仅当 $x=y$ 时，它们的和 S 取得最小值.

利用基本不等式可以解决一些最大（小）值问题.

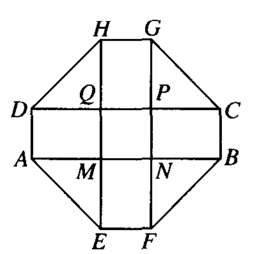


图 1.1-4

例 4 某居民小区要建一座八边形的休闲场所，它的主体造型平面图（图 1.1-4）是由两个相同的矩形 $ABCD$ 和 $EFGH$ 构成的面积为 200 平方米的十字型地域. 计划在正方形 $MNPQ$ 上建一座花坛，造价为每平方米4 200元，在四个相同的矩形上（图中阴影部分）铺花岗岩地坪，造价为每平方米 210 元，再在

四个空角（图中四个三角形）上铺草坪，造价为每平方米 80 元.

（1）设总造价为 S 元，AD 长为 x 米，试建立 S 关于 x 的函数关系式；

（2）当 x 为何值时 S 最小，并求出这个最小值.

解：（1）设 $DQ=y$ 米，则 $x^2+4xy=200$，从而

$$y=\frac{200-x^2}{4x}.$$

于是

$$\begin{aligned}S&=4\ 200x^2+210\times 4xy+80\times 2y^2\\&=4\ 200x^2+210\times 4x\,\frac{200-x^2}{4x}+80\times 2\left(\frac{200-x^2}{4x}\right)^2\\&=38\ 000+4\ 000x^2+\frac{400\ 000}{x^2}.\end{aligned}$$

（2）由基本不等式可知，

$$4\ 000x^2+\frac{400\ 000}{x^2}\geqslant 2\sqrt{4\ 000x^2\times\frac{400\ 000}{x^2}}=80\ 000,$$

所以

$$S\geqslant 38\ 000+80\ 000=118\ 000,$$

当且仅当

$$4\ 000x^2=\frac{400\ 000}{x^2},$$

即 $x=\sqrt{10}\approx 3.16$ 时，等号成立.

由上可知，当 AD 约为 3.16 米时，休闲场所总造价 S 取最小值 118 000 元.

3. 三个正数的算术—几何平均不等式

思考

基本不等式给出了两个正数的算术平均与几何平均的关系. 这个不等式能否推广呢？例如，对于 3 个正数，会有怎样的不等式成立？

类比基本不等式的形式，我们猜想，对于 3 个正数 a，b，c，可能有：如果 a，b，$c\in\mathbf{R}_+$，那么$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$，当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立.

如何证明这个猜想呢？仍然类比基本不等式的推出过程，我们先证明：

已知 a，b，$c\in\mathbf{R}_+$，那么 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$，当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立.

证明：因为

$$
\begin{aligned}
&a^3+b^3+c^3-3abc\\
=&(a+b)^3-3a^2b-3ab^2+c^3-3abc\\
=&(a+b)^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc\\
=&(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]-3ab(a+b+c)\\
=&(a+b+c)[a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab]\\
=&(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\
=&\frac{1}{2}(a+b+c)\times[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant 0,
\end{aligned}
$$

(1) $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$;
(2) $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$.

所以

$$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc,$$

当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立.

对上述结果作简单的恒等变形，就可以得到

定理 3　如果 a，b，$c\in\mathbf{R}_+$，那么 $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$，当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立.

这个不等式可以表述为：**三个正数的算术平均不小于它们的几何平均.**

事实上，基本不等式可以推广到一般的情形：**对于 n 个正数 a_1，a_2，…，a_n，它们的算术平均不小于它们的几何平均，即**

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，等号成立.

例 5　已知 x，y，$z\in\mathbf{R}_+$，求证 $(x+y+z)^3\geqslant 27xyz$.

证明：因为 $\frac{x+y+z}{3}\geqslant\sqrt[3]{xyz}>0$，所以

$$\frac{(x+y+z)^3}{27}\geqslant xyz,$$

即

$$(x+y+z)^3\geqslant 27xyz.$$

例 6　如图 1.1-5，把一块边长是 a 的正方形铁片的各角切去大小相同的小正方形，再把它的边沿着虚线折转作成一个无盖方底的盒子，问切去的正方形边长是多少时，才能使盒子的容积最大？

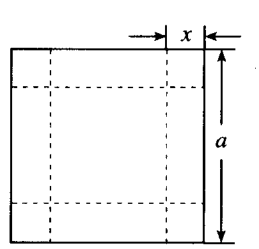


图 1.1-5

解：设切去的正方形边长为 x，无盖方底盒子的容积为 V，则

$$
\begin{aligned}
V&=(a-2x)^2x\\
&=\frac{1}{4}(a-2x)(a-2x)\times 4x
\end{aligned}
$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\left[\frac{(a-2x)+(a-2x)+4x}{3}\right]^3$$

$$=\frac{2a^3}{27},$$

当且仅当 $a-2x=a-2x=4x$，即当 $x=\frac{a}{6}$ 时，不等式取等号，此时 V 取最大值 $\frac{2a^3}{27}$. 即当切去的小正方形边长是原来正方形边长的 $\frac{1}{6}$ 时，盒子的容积最大.

习题1.1

1. 判断下列各命题的真假，并说明理由：

   (1) 如果 $a>b$，那么 $ac>bc$；

   (2) 如果 $a>b$，那么 $ac^2>bc^2$；

   (3) 如果 $a>b$，那么 $a^n>b^n$ $(n\in\mathbf{N}_+)$；

   (4) 如果 $a>b$，$c<d$，那么 $a-c>b-d$.

2. 比较 $(x+1)(x+2)$ 和 $(x-3)(x+6)$ 的大小.

3. 求证：

   (1) 如果 $a>b$，$ab>0$，那么 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

   (2) 如果 $a>b>0$，$c<d<0$，那么 $ac<bd$.

4. 如果 $a>b$，$c>d$，是否一定能得出 $ac>bd$? 并说明理由.

5. 设 a，$b\in\mathbf{R}_+$，且 $a\neq b$. 求证：

   (1) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$；

   (2) $\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}$.

6. 设 a，b，c 是不全相等的正数，求证：

   (1) $(a+b)(b+c)(c+a)>8abc$；

   (2) $a+b+c>\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$.

7. 求证 $a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant ab+bc+cd+da$.

8. 已知 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$，求证

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\leqslant 1.$$

9. 已知 x，$y\in\mathbf{R}$，求证

$$\frac{x^2+y^2}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

10. 求证 $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2$.

11. 已知 a，b，$c\in\mathbf{R}_+$，$a+b+c=1$，求证

$$a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}.$$

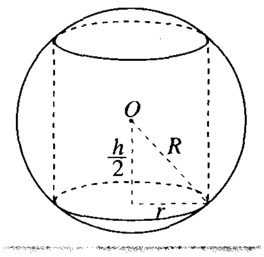
12. 已知 a，b，$c\in\mathbf{R}_+$，求证：

(1) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\geqslant 9$；

(2) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\geqslant 9abc$.

13. 在对角线有相同长度的所有矩形中，怎样的矩形周长最长，怎样的矩形面积最大？

14. 已知球的半径为 R，球内接圆柱的底面半径为 r，高为 h，则 r 和 h 为何值时，内接圆柱的体积最大？



（第 14 题）

15. 已知 $a>0$，$b>0$，且 $h=\min\left\{a,\ \frac{b}{a^2+b^2}\right\}$，求证

$$h\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

min A 表示数集 A 中最小数.

二 绝对值不等式

从不等式的背景可以看到，许多不等关系都涉及到距离的长短，面积或体积的大小，重量的大小，等等，它们都要通过非负数来表示. 因此，研究含有绝对值的不等式具有重要意义.

1. 绝对值三角不等式

我们知道，实数 a 的绝对值 $|a|$ 有明确的几何意义，它表示数轴上坐标为 a 的点 A 到原点的距离（图 1.2-1(1)).

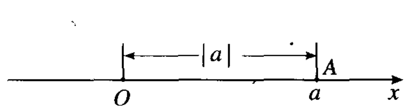


图 1.2-1 (1)

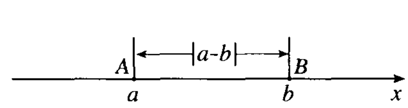


图 1.2-1 (2)

对于任意两个实数 a，b，设它们在数轴上的对应点分别为 A，B，那么 $|a-b|$ 的几何意义是数轴上 A，B 两点之间的距离，即线段 AB 的长度（图 1.2-1(2)).

绝对值的几何意义是我们认识绝对值不等式的重要工具. 实际上，我们可把“距离大小”作为解决绝对值不等式的基本出发点，研究和解决相应的问题.