学考指要丛书
XUEKAO ZHIYAO CONGSHU

学士版

● 本章综述 ● 释疑解难 ● 典型例题 ● 习题精解 ● 综合练习

计算方法

学考指要

孙玉香 主编

西北工业大学出版社

计算方法
学考指要

孙玉香　主编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书主要根据张德荣主编的《计算方法与算法语言》上册(第二版)内容编写而成,每章按照综述、释疑解难、典型例题、习题精解、综合练习5部分来编写,旨在帮助读者掌握课程重点内容,学会数值计算的分析设计方法,提高解题能力。

本书可供使用张德荣主编的《计算方法与算法语言》上册(第二版)和王能超主编的《数值分析简明教程》(第二版)教材的读者和教师参考,也可供考研的读者和使用其他教材的读者学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

计算方法学考指要/孙玉香主编.—西安:西北工业大学出版社,2006.6
(学考指要丛书)
ISBN 7-5612-2128-2

Ⅰ.计… Ⅱ.孙… Ⅲ.计算方法—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O241

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第108377号

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路127号 **邮编**:710072
电　　话:(029)88493844　88491757
网　　址:www.nwpup.com
印 刷 者:陕西东江印务有限责任公司
开　　本:787 mm×960 mm　1/16
印　　张:13.625
字　　数:369千字
版　　次:2006年9月第1版　2006年9月第1次印刷
印　　数:1～6 000册
定　　价:19.00元

前　言

本书集学、练、考于一体，是一本计算方法辅导教材，也是数值分析教学参考书；作为自学或考研参考书也会让读者受益匪浅。

为了便于学习，作者从以下几个方面讲解相关知识：

（1）本章综述：使本章的内容一目了然。

（2）释疑解难：对难点重点分析解释，并进行适当的归纳总结。

（3）典型例题：本章知识点的常规应用。通过对典型例题的分析、解答，使读者能够举一反三、触类旁通，达到事半功倍的效果。

（4）习题精解：练习将所学知识以及解决问题的思想方法进一步广泛的应用，拓展应用知识解决问题的能力，使掌握的知识得到升华。

（5）综合练习：考查所学的概念、定理、公式以及对它们的应用和掌握情况，进一步巩固所学的知识。随后的分析解答提供了训练题的参考答案，以供读者参考。

（6）模拟试卷：附录中给出了若干模拟试卷，试卷难易程度不同，读者可以根据自己对知识的掌握程度选择相应的试卷进行测试，并根据参考答案，估算测试成绩。

作　者

2006 年 8 月

目　录

第1章　引　论

1.1　本章综述

本章主要介绍了计算方法的基本概念，如计算方法研究的对象及特点、浮点数、误差等，其主要内容归纳为如图 1.1 和如图 1.2 所示的知识结构图.

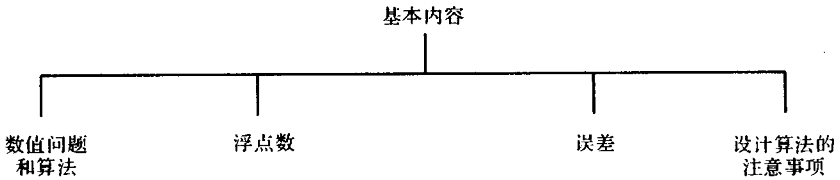

图 1.1　基本内容

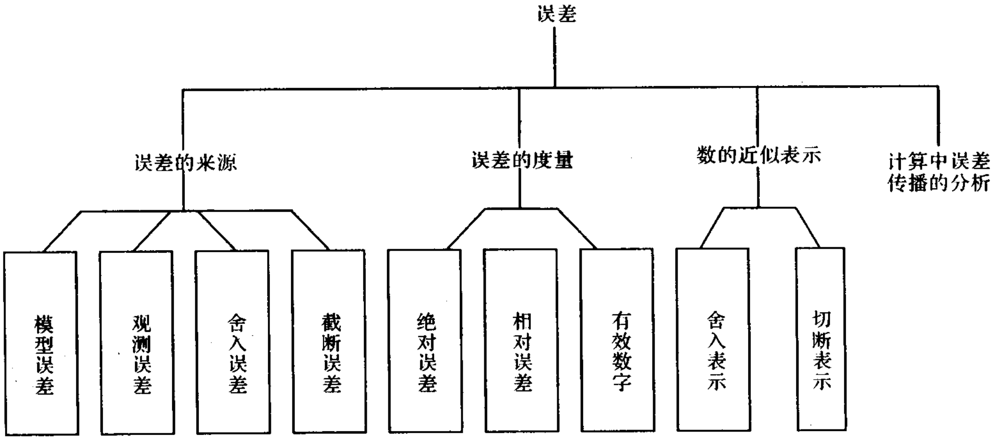

图 1.2　误差

1.2 释疑解难

问题 1.1 为什么计算机中的数系是有限的、离散的、有理数的集合?

【指点迷津】 计算机中 r 进制的数系 $F=\{s\times r^p \mid 尾数\ s\ 的位数\leqslant t,-m\leqslant p\leqslant M\}$,其中 r,t,m,M 均为正整数,因尾数 s 的位数有限,阶码 p 是有限值,因而数系 F 表示的数是有限的有理数;数系 F 中相邻两数 $s\times r^p$ 与 $(s+r^{-t})\times r^p$ 之间有无穷多个数不属于数系 F 且相邻两数间的距离为 r^{p-t},因而数系 F 是离散的数系.

问题 1.2 进行数值计算时,为什么误差不可避免?

【指点迷津】 进行数值计算时,首先必须将实际问题转化为数学模型,在这个过程中,只能抓住主要因素,忽略次要因素,由此而产生了模型误差;其次,计算中用到的原始数据是通过实验或观测得到的,难免带有观测误差;计算过程中产生的数据位数可能很多或为无穷小数,而计算只能是有限位的,由于四舍五入而产生舍入误差;从理论上说,有些计算过程是一个无限的过程,实际计算只能是有限的,从而产生了截断误差.

如 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$,而 $\forall x$,e^x 只能取有限项进行计算.如

$$e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\xlongequal{\text{def}}E(x)$$

则 $e^x-E(x)=\frac{x^4}{4!}e^\xi$ 为截断误差,ξ 在 0 与 x 之间.

因此误差不可避免.

问题 1.3 绝对误差、相对误差的区别和联系?

【指点迷津】 设实际问题的近似解为 x^*、精确解为 x,则绝对误差为

$$\varepsilon(x)\xlongequal{\text{def}}x^*-x$$

绝对误差限 ε(简称误差限)$|\varepsilon(x)|\leqslant\varepsilon$,$\varepsilon$ 为正数.

此处 $|\cdot|$ 可以是绝对值,也可以是范数;ε 最好是上确界.如

$$|e^x-E(x)|=\left|\frac{x^4}{24}e^\xi\right|\leqslant\frac{e}{24},\quad x\in[0,1]$$

相对误差

$$\varepsilon_r(x)\xlongequal{\text{def}}\frac{\varepsilon(x)}{x}=\frac{x^*-x}{x}\approx\frac{x^*-x}{x^*}$$

相对误差限 $$|\varepsilon_r(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{|x|}\leqslant\varepsilon_r$$

如 $$|\varepsilon_r(E(x))|=\frac{|e^x-E(x)|}{|e^x|}\leqslant\frac{e}{24e^x}\leqslant\frac{e}{24},\quad\forall x\in[0,1]$$

因此,绝对误差表示了数值计算中数值解与精确解之间误差的大小,而相对误差表示数值解的精确程度.实际计算时,只能估计其绝对误差限与相对误差限.绝对误差限与相对误差限知其一,可求出另一个.

绝对误差与计量单位有关,相对误差与计量单位无关.

问题 1.4 何谓有效数字?它与绝对误差、相对误差有何联系?

【指点迷津】 在实际应用中表示近似值的精确程度经常用到有效数字.

定义 若近似值 x^* 某位数的半个单位是它的误差限,而且从该位数字开始到 x^* 最左边的那个非零数字共有 n 位(见图 1.3),那么称这 n 位数字为有效数字,且说近似值 x^* 具有 n 位有效数字.

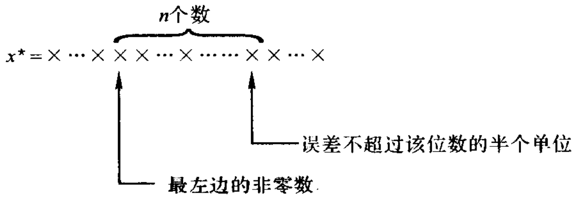

图 1.3

或者用数学语言来描述此定义如下:设近似值(规格化浮点数表示)

$$x^* = \pm 0.\, a_1 a_2 \cdots a_n \times 10^m$$

如果误差

$$|x - x^*| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m-l}, \quad 1 \leqslant l \leqslant n$$

则称此近似值有 l 位有效数字. 对同一个数的近似值来说,有效数字位数越多,其绝对误差与相对误差都越小;反之,绝对误差或相对误差越小,有效数字的位数有可能越多. 三者知其一,可求其余两个.

表 1.1

近似值	绝对误差限	有效数字位数
3.141	$\frac{1}{2} \times 10^{-2}$	3
0.302 15	$\frac{1}{2} \times 10^{-3}$	5
0.002 010 03	$\frac{1}{2} \times 10^{-6}$	8

问题 1.5 数值计算中应注意些什么?为什么?

【指点迷津】 数值计算中应注意:

(1) 简化计算步骤,减少运算次数:减少工作量,可以提高运算速度,减小误差积累.

(2) 避免接近的同号数相减,减少有效数字的损失:由两数差的相对误差估计

$$|\varepsilon_r(x_1 - x_2)| \leqslant \left|\frac{x_1}{x_1 - x_2}\right| |\varepsilon_r(x_1)| + \left|\frac{x_2}{x_1 - x_2}\right| |\varepsilon_r(x_2)|$$

知，当 $x_1 - x_2 \approx 0$ 时，$\left|\dfrac{x_1}{x_1 - x_2}\right|$，$\left|\dfrac{x_2}{x_1 - x_2}\right|$ 较大，则相对误差限较大，从而有效数字减少.

(3) 要防止大数"吃"小数：当参加加减运算的数，其阶码相差很大时，在对阶过程中，就可能出现大数"吃掉"小数，对计算结果产生不良影响.

(4) 避免大的乘数或小的除数，以防止溢出，保证计算进行到底.

(5) 设计稳定算法，设法控制误差的传播：在计算过程中，必须注意误差的积累，尤其是利用递推关系进行计算时，因运算过程比较有规律，相当方便，但如果递推过程中误差增大，多次递推后会得到错误的结果；如果递推过程误差减小，则得出的结果比较准确.

1.3 典型例题

例 1.1 举例说明：除了零以外计算机数系中有些数规范化后，不属于此数系.

分 析

设 $F = \{s \times r^p \mid \text{尾数 } s \text{ 的位数} \leqslant t, -m \leqslant p \leqslant M\}$，判断一个数 x 是否属于计算机中的数系 F，需从以下 3 方面考察：① x 是否为浮点数？② 尾数位数是否 $\leqslant t$？③ 阶码 $p \in [-m, M]$？若回答均为肯定的，则 $x \in F$；否则 $x \notin F$.

解 设计算机数系 $F = \{\pm 0.a_1a_2a_3a_4 \times 10^p \mid a_i = 0 \sim 9, \mid p \mid \leqslant 99\}$，则 $0.000\,2 \times 10^{-99} \in F$，而 $0.000\,2 \times 10^{-99}$ 的规范化浮点数为 $0.2 \times 10^{-102} \notin F$.

点 拨

计算机中的数均为浮点数，应注意浮点数运算的特点及计算机中数系的特殊性.

例 1.2 计算球体积时要使相对误差限为 1%，问测量半径时允许的相对误差限是多少？

分 析

本例主要考察误差在计算过程中的传播，利用微分进行误差分析.

解 球体积 $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$，则相对误差 $\varepsilon_r(V) \approx \mathrm{d}\ln V = \mathrm{d}\ln \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 3\mathrm{d}\ln R \approx 3\varepsilon_r(R)$，而 $\mid \varepsilon_r(V) \mid \leqslant 1\% \Rightarrow \mid \varepsilon_r(R) \mid \leqslant 1/300$. 因此测量半径时允许的相对误差限为 1/300.

点 拨

计算过程中的简单的误差分析：若 $y = f(x)$，x 为近似值时，由此计算的 y 也为近似值. y 的绝对误差 $\varepsilon(y) \approx \mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x = f'(x)\varepsilon(x)$；相对误差 $\varepsilon_r(y) \approx \mathrm{d}\ln y$. 若 $y = f(x_1, x_2)$，则 y 的绝对误差 $\varepsilon(y) \approx \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}\varepsilon(x_1) + \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\varepsilon(x_2)$；相对误差 $\varepsilon_r(y) \approx \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}\dfrac{x_1}{y}\varepsilon_r(x_1) + \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\dfrac{x_2}{y}\varepsilon_r(x_2)$.

例 1.3 写出下列各题的合理计算途径，使计算结果更精确（不必计算结果）.

(1) $\ln(x+1) - \ln x, x \gg 1$；(2) $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n$；(3) x^{16}；(4) 求方程 $x^2 - 18x + 1 = 0$ 的根，取四位浮点数计算；(5) $100 + \sum\limits_{n=1}^{100} x_i, x_i = i \times 10^{-3}, i = 1, 2, \cdots, 100$，用三位浮点数计算.

分　析

设计算法时应注意尽量减少工作量(一次加法或一次减法记作一次加法;一次乘法或一次除法记作一次乘法.工作量即为完成这个算法所需的加法次数和乘法次数.),减少误差积累;避免接近的数相减;防止大数"吃"小数等.

解　(1) 避免相近的同号数相减:$\ln(x+1)-\ln x=\ln\dfrac{x+1}{x}$.

(2) 减少工作量:$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}$ (若先计算矩阵 $\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$,需 $n+n^2$ 次乘法,而再计算$(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}$ 又需 n^2 次乘法,因此共需$(n+2n^2)$ 次乘法;但计算 $\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}$ 只需$(2n+1)$ 次乘法.

(3) 利用 $x^{2k}=x^k\cdot x^k$,减少工作量,如 $x^{16}=(((x\cdot x)^2)^2)^2$.

(4) 根据浮点数运算的特点,计算公式为 $x_1=9+\sqrt{80}$,$x_2=\dfrac{1}{x_1}$.

(5) 防止大数"吃"小数,先将小数求和,即 $100+\sum\limits_{n=1}^{100}x_i=\sum\limits_{n=1}^{100}x_i+100$.

1.4 习题精解

1. 计算机数系中,存在着满足条件 $x\neq 0,x+1=1$ 的数 x,找出满足此条件的最大者.

【解答】　设数系 $F=\{\pm 0.a_1a_2a_3a_4\times 10^p \mid a_i=0\sim 9,\ |p|\leqslant 99\}$,则 $x=0.4\times 10^{-4}\in F$,但 $x+1=0.000\,004+0.1\times 10=0.1\times 10=1$.

F 中满足此条件的 $x_{\max}=\begin{cases}0.499\,9\times 10^{-3} & \text{舍入时}\\ 0.999\,9\times 10^{-3} & \text{截断时}\end{cases}$

对于 t 位浮点数 $x_{\max}=\begin{cases}0.4\underbrace{9\cdots 9}_{t-1}\times 10^{-t+1} & \text{舍入时}\\ 0.\underbrace{9\cdots 9}_{t}\times 10^{-t+1} & \text{截断时}\end{cases}$

2. $(\sqrt{2}-1)^6=(3-2\sqrt{2})^3=99-70\sqrt{2}=\dfrac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}=\dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}=\dfrac{1}{99+70\sqrt{2}}$.

用这六个公式中哪个进行计算误差较小?

【解答】　用$\dfrac{1}{99+70\sqrt{2}}$计算误差最小.

$(\sqrt{2}-1)^6$,$(3-2\sqrt{2})^3$,$\dfrac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$,$\dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$ 工作量均比$\dfrac{1}{99+70\sqrt{2}}$大,而 $99-70\sqrt{2}$ 中 99 和 $70\sqrt{2}$ 是相近数,应避免相减.

3. 序列$\{y_n\}$满足递推关系 $y_n=10y_{n-1}-1(n=1,2,3,\cdots)$,若 $y_0=\sqrt{2}\approx 1.41$(三位有效数字),问 y_{10} 计算的绝对误差限是多少?这个计算过程稳定吗?

【解答】　因为 $y_n=10y_{n-1}-1$,所以 $\varepsilon(y_n)=10\varepsilon(y_{n-1})=10^n\varepsilon(y_0)$;而 $|\varepsilon(y_0)|\leqslant\dfrac{1}{2}\times 10^{-2}$,则 $|\varepsilon(y_{10})|\leqslant 10^{10}\times\dfrac{1}{2}\times 10^{-2}=\dfrac{1}{2}\times 10^8$.

因此这个计算过程是不稳定的.

1.5 综合练习

一、填空题

1.设一规范化浮点数系，尾数的位数为 t，阶数 p 满足条件 $-m \leqslant p \leqslant M$，则此数系中数的个数是__________.

2.已知 $x = 14.016\,25\cdots$ 的近似数 $x^* = 14.01$，则绝对误差约为__________，相对误差约为__________.

3.$(\sqrt{5}-2)^6 = (9-4\sqrt{5})^3 = \dfrac{1}{(\sqrt{5}+2)^6}$，其中$\sqrt{5} \approx 2.24$，代入后得 0.000 19，0.000 064，0.000 172，则近似程度最好的近似值是__________.

4.写出下列各题的合理计算途径，使计算结果更精确(不必计算结果).

①$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f =$ __________.；② 当 $|x| \ll 1$ 时，$1-\cos x =$ __________；

③ $\sum\limits_{j=2}^{100} \dfrac{1}{j^2-1} =$ __________；

④ 用四位浮点数计算时，$\begin{cases} 10^{-5}x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ 等价于方程组__________；

⑤$n = 0,1,\cdots,8$，求 $y_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{x^2+5}\mathrm{d}x$ 的近似值，用公式__________.

二、计算题

5.已知 $x = 6\,018.018$，分别求取满足下述条件的近似数：

① 绝对误差限为$\dfrac{1}{2} \times 10^{-2}$；② 相对误差限为$\dfrac{1}{2} \times 10^{-6}$；③ 所求取的近似数各有几位有效数字？

6.设下列各对近似数均为有效数字，问它们是否一样？若不一样，有何区别？

①25 800，258×10^2；　　②0.006 39，$0.006\,390 \times 10^{-2}$；

③$0.701\,4 \times 10^2$，$0.070\,14 \times 10^3$；　　④0.906 0，0.096.

7.设 $y_0 = 28$，按递推公式 $y_n = y_{n-1} - \dfrac{1}{100}\sqrt{783}\,(n = 1,2,3,\cdots)$，计算到 y_{100}. 若取 $\sqrt{783} \approx 27.982$(五位有效数字)，试问计算 y_{100} 的绝对误差限是多少？

8.举例说明在计算机数系中，加法结合律和乘法的分配律都不成立.

9.利用等价变换使下列表达式的计算结果更精确：① 已知 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n$，求 $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}$；

②$\int_x^{x+1} \dfrac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$，$|x| \gg 1$.

10.当 $n = 0,1,\cdots,8$ 时，求定积分 $y_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{4x+1}\mathrm{d}x$ 的近似值.

三、证明题

11. 采用牛顿迭代法 $x_0 = 2, x_{k+1} = \dfrac{1}{2}(x_k + 7/x_k)\,(k = 0,1,2,\cdots)$，计算$\sqrt{7}$时，若 x_k 是$\sqrt{7}$的具有 n 位有效数字的近似值，则 x_{k+1} 是$\sqrt{7}$的具有 $2n$ 位有效数字的近似值.

12.证明：$\sqrt[3]{x}$ 的相对误差约等于 x 的相对误差的$\dfrac{1}{3}$.

13. 证明：和的绝对误差限不超过各和数绝对误差限之和.

14. 设 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$，假定 g 是准确的，当对 t 的测量有 ± 0.1 s 的误差. 证明当 t 增加时，s 的绝对误差限增加，而相对误差限却减少.

15. 在计算机上对 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ 自左至右求和 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$，当 n 很大时，s_n 将不随 n 的增加而增加，试说明之.

第2章 插值法

2.1 本章综述

本章主要介绍各种插值问题以及相应的各种解法和截断误差估计，其知识结构图如图 2.1 所示.

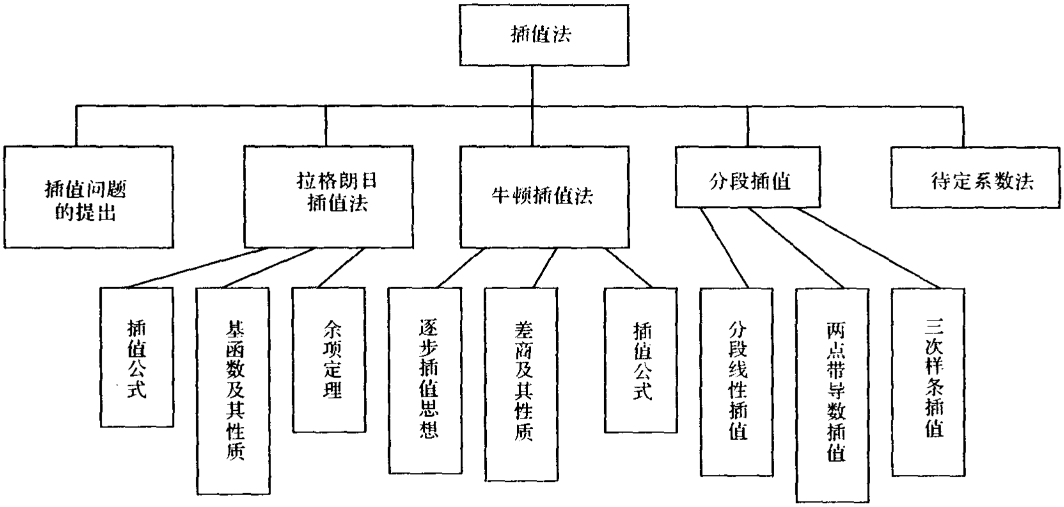

图 2.1

2.2 释疑解难

问题 2.1 何谓插值问题?何谓代数插值问题?

【指点迷津】 实际问题中仅仅知道函数 $f(x)$ 在某些点(称为节点)上的信息如某些点的函数值、导数值等，而要求另一些点上的函数值或导数值. 一般通过构造一个“简单”函数 $p(x)$ 近似 $f(x)$. 若要求在节点上 $p(x)$ 的信息和 $f(x)$ 相同，则称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的插值函数. 求此插值函数的问题即为插值问题.

若要求插值函数为代数多项式，则称此插值问题为代数插值问题.

问题 2.2　拉格朗日(Lagrange)插值问题有哪几种常用解法?

【指点迷津】 拉格朗日插值问题:在区间$[a,b]$上,已知 $f(x)$ 的 $n+1$ 个两两互异的节点 x_i 的函数值 $y_i=f(x_i)(i=0,1,2,\cdots,n)$,求次数不超过$n$的代数多项式$p_n(x)$(简记为$\partial p_n(x)\leqslant n$)使得$p_n(x)$满足插值条件 $p_n(x_i)=y_i(i=0,1,2,\cdots,n)$. 常用解法有:

(1) 待定系数法:用 $1,x,x^2,\cdots,x^n$ 作为基函数,令 $p_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$,组合系数 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$,待定.由 $n+1$ 个插值条件,可得关于组合系数的$n+1$阶的线性方程组,此方程组的系数矩阵为范德蒙行列式,由已知条件知,此行列式不为零,则该方程组的解存在唯一,即 $p_n(x)$ 存在唯一(实际应用时,应根据所给条件选择适当的基函数,使得计算过程简化,待定系数表示简单,如问题 2.4 等).

(2) 基函数法(拉格朗日插值思想):用已知的函数值 $y_i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 作为组合系数,而基函数 $l_i(x)$ $(i=0,1,\cdots,n)$ 待定. 令 $p_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}y_il_i(x)$,其中基函数满足:$\partial l_i(x)\leqslant n(i=0,1,\cdots,n)$,且 $l_i(x_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}(i,j=0,1,\cdots,n)$,由此可唯一确定这些基函数

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

从而唯一确定 $p_n(x)$. $l_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$ 称为n次的拉格朗日插值基函数或者称为n次的拉格朗日基本插值多项式.

(3) 基于承袭性(牛顿(Newton)插值思想或余项校正法):若 $N_{n-1}(x_i)=N_n(x_i)=y_i(i=0,1,2,\cdots,n-1)$,而 $N_n(x_n)=y_n$,即在 $N_{n-1}(x)$ 的基础上增加一个插值条件,则

$$N_n(x)=N_{n-1}(x)+c_n\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)$$

从而得到基函数为$1,x-x_0,(x-x_0)(x-x_1),\cdots,(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$,而组合系数$c_0,c_1,c_2,\cdots,c_n$,待定.即

$$N_n(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+c_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

因为这组基的特殊性,这些组合系数为节点 $x_i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 对应的各阶差商,即 $c_i=f[x_0,x_1,\cdots,x_i]$ $(i=0,1,2,\cdots,n)$. 而这些差商均由差商表给出.

对于同一组节点,不论哪种方法求出 $f(x)$ 的插值多项式,表达形式虽然不同,实质上是完全相同的.即对于同一个插值问题,$p_n(x)\equiv N_n(x)$ 成立.

问题 2.3　差商有哪些性质?

【指点迷津】 差商的性质:

(1) 差商和所含节点的次序无关,如 $f[x_0,x_1,x_2]=f[x_1,x_2,x_0]=f[x_2,x_0,x_1]$. 因此$k$阶差商也可以定义为

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f[x_0,\cdots,x_{k-2},x_k]-f[x_0,\cdots,x_{k-2},x_{k-1}]}{x_k-x_{k-1}}$$

或

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f[x_1,\cdots,x_k]-f[x_0,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$$

(2) 差商与导数的关系:若 $f(x)$ 在插值区间$[\min\limits_i x_i,\max\limits_i x_i](i=0,1,2,\cdots,n)$ 上有 n 阶导数,则

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},\quad \xi\in(\min_i x_i,\max_i x_i)$$

且
$$f[\underbrace{x_0,x_0,\cdots,x_0}_{n+1}]=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

(3) 差商与函数值的关系：$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x_j)}{\pi'(x_j)}$，其中 $\pi'(x_j)=\prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}(x_j-x_i)$.

(4) 差商与差分的关系：若 $x_j=x_0+jh,f_j=f(x_j)$，则 $f[x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+n}]=\frac{\Delta^n f_i}{n!h^n}$.

因此在此条件下，若 $f(x)$ 在区间$[\min_k x_k,\max_k x_k](k=i,i+1,\cdots,i+n)$上有 n 阶导数，则差分与导数的关系为

$$\Delta^n f_i=h^n f^{(n)}(\xi),\quad \xi\in(x_i,x_{i+n})$$

问题 2.4　如何求解两点带导数的插值?并写出其插值余项.

【指点迷津】　两点带导数的插值：已知 $f(x)$ 在区间$[x_0,x_1]$有四阶导数，且

$$f(x_0)=y_0,\quad f'(x_0)=y'_0,\quad f(x_1)=y_1,\quad f'(x_1)=y'_1$$

则存在唯一的次数不超过 3 的代数多项式：

$$p_3(x)=\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)y_0+\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)y_1+$$
$$\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2(x-x_0)y'_0+\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2(x-x_1)y'_1\text{—— 基函数法}$$

或者　$$p_3(x)=y_0+y'_0(x-x_0)+\left[\frac{3(y_1-y_0)}{(x_0-x_1)^2}-\frac{y'_1+2y'_0}{x_1-x_0}\right](x-x_0)^2+$$
$$\left[\frac{2(y_1-y_0)}{(x_0-x_1)^3}+\frac{y'_1+y'_0}{(x_1-x_0)^2}\right](x-x_0)^3\text{—— 待定系数法}$$

其中，$p_3(x_0)=y_0,p_3(x_1)=y_1,p'_3(x_0)=y'_0,p'_3(x_1)=y'_1$.

具体计算时，可用带导数的差商表：

x_0——y_0			
x_0——y_0	y'_0		
x_1——y_1	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_0,x_1]$	
x_1——y_1	y'_1	$f[x_0,x_1,x_1]$	$f[x_0,x_0,x_1,x_1]$

则　$$p_3(x)=y_0+y'_0(x-x_0)+f[x_0,x_0,x_1](x-x_0)^2+f[x_0,x_0,x_1,x_1](x-x_0)^2(x-x_1)$$

其中　$$f[x_0,x_0,x_1]=\frac{f[x_0,x_1]-y'_0}{x_1-x_0},\quad f[x_0,x_1,x_1]=\frac{y'_1-f[x_0,x_1]}{x_1-x_0}$$

$$f[x_0,x_0,x_1,x_1]=\frac{f[x_0,x_1,x_1]-f[x_0,x_0,x_1]}{x_1-x_0}$$

其余项估计为　$\forall x\in[x_0,x_1],\quad \exists\xi\in(x_0,x_1)$

$$f(x)-p_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2$$

问题2.5　什么是三次样条插值函数?求解三次样条插值函数时为什么须增加边界条件?

【指点迷津】　三次样条插值函数 $s(x)$：$s(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots,n)$，其中 $a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_n\leqslant b$；在 $[x_i,x_{i+1}]$ 上，$s(x)$ 为次数不高于 3 的多项式；$s(x)$ 在整个区间 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数.

因在每个小区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上，$s(x)$ 为次数不高于 3 的多项式 $s_i(x)$，设

$$s_i(x)=a_i+b_ix+c_ix^2+d_ix^3,\quad i=0,1,\cdots,n-1$$

其中 a_i,b_i,c_i,d_i 待定. 则求 $s_i(x)$ 就要确定 4 个未知数，因此求解三次样条插值函数共要确定 $4n$ 个未知数；而已知插值条件有 $s(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots,n)$ 共 $n+1$ 个条件；$s(x)$ 在整个区间 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数即连接条件：

$$\begin{cases}s(x_i-0)=s(x_i+0)\\ s'(x_i-0)=s'(x_i+0), \quad i=1,\cdots,n-1\\ s''(x_i-0)=s''(x_i+0)\end{cases}$$

共 $3n-3$ 个条件. 由以上分析知，总共有 $4n-2$ 个条件，而要求 $4n$ 个未知数，因此必须增加两个边界条件.

问题 2.6　如何求三次样条函数?

【指点迷津】　在每个小区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上，三次样条函数 $s(x)$ 为次数不高于 3 的多项式 $s_i(x)$，则 $s_i(x_i)=y_i,s_i(x_{i+1})=y_{i+1}$，要求次数不高于 3 的多项式 $s_i(x)$，还需两个条件.

(1) 利用一阶导数表示的三次样条：设 $s'_i(x_i)=m_i,s'_i(x_{i+1})=m_{i+1}$，则由两点带导数的插值公式知

$$s_i(x)=a_i+b_i(x-x_i)+c_i(x-x_i)^2+d_i(x-x_i)^3$$

其中 $a_i=y_i,b_i=m_i,c_i=\dfrac{3(y_{i+1}-y_i)}{(x_i-x_{i+1})^2}-\dfrac{m_{i+1}+2m_i}{x_{i+1}-x_i},d_i=\dfrac{2(y_{i+1}-y_i)}{(x_i-x_{i+1})^3}+\dfrac{m_{i+1}+m_i}{(x_{i+1}-x_i)^2}$.

又由连接条件：$s''_{i-1}(x_i)=s''_i(x_i)(i=1,2,\cdots,n-1)$，得到关于 $m_i(i=0,1,\cdots,n)$ 的 $n-1$ 阶的线性方程组，与两个边界条件联立得到关于 m_i 的 $n+1$ 阶的线性方程组，此方程组的系数矩阵是严格对角占优的三对角矩阵，由求解三对角方程组的追赶法可求出唯一解 m_i，也就求出了利用一阶导数表示的三次多项式 $s_i(x)$，从而得到分段表示的样条函数 $s(x)$.

(2) 利用二阶导数表示的样条函数：设 $s''_i(x_i)=M_i,s''_i(x_{i+1})=M_{i+1}$，因 $\partial s_i(x)\leqslant 3$，则

$$s''_i(x)=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}M_i+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}M_{i+1}$$

两次积分后得　$$s_i(x)=\frac{(x-x_{i+1})^3}{-6h_i}M_i+\frac{(x-x_i)^3}{6h_i}M_{i+1}+c_1(x-x_i)+c_2(x-x_{i+1})$$

其中 $h_i=x_{i+1}-x_i$，而 $s_i(x_i)=y_i,s_i(x_{i+1})=y_{i+1}$ 得

$$c_1=\frac{1}{h_i}\left(y_{i+1}-\frac{h_i^2}{6}M_{i+1}\right),\quad c_2=-\frac{1}{h_i}\left(y_i-\frac{h_i^2}{6}M_i\right)$$

因此

$$s_i(x)=\frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i}M_i+\frac{(x-x_i)^3}{6h_i}M_{i+1}+\left(y_{i+1}-\frac{h_i^2}{6}M_{i+1}\right)\frac{x-x_i}{h_i}+\left(y_i-\frac{h_i^2}{6}M_i\right)\frac{x_{i+1}-x}{h_i}$$

又由连接条件：$s'_{i-1}(x_i)=s'_i(x_i)(i=1,2,\cdots,n-1)$，得到关于 $M_i(i=0,1,\cdots,n)$ 的 $n-1$ 阶的线性方程组，与两个边界条件联立得到关于 M_i 的 $n+1$ 阶的线性方程组，此方程组的系数矩阵也是严格对角占优的三对角矩阵，由求解三对角方程组的追赶法可求出唯一解 M_i，也就求出了利用二阶导数表示的三次多项式