

教育部高校学生司推荐
2006年版

全国各类成人高等学校招生考试丛书

专科起点升本科

高等数学 模拟试题



成人高考《高等数学》编写组 编

GAODENG SHUXUE

人民教育出版社

全国各类成人高等学校招生考试丛书（专科起点升本科）

高等数学（二） 模拟试题

● 成人高考《高等数学》编写组 编

人民教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(二)模拟试题/成人高考《高等数学》编写组编. —北京:人民教育出版社, 2006
(全国各类成人高等学校招生考试丛书)
专科升本科
ISBN 7-107-19470-4

I. 高…

II. 成…

III. 高等数学—成人教育: 高等教育—习题—升学参考资料

IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 026030 号

人民教育出版社出版发行

网址: <http://www.pep.com.cn>

北京天宇星印刷厂印装 全国新华书店经销

2006 年 3 月第 1 版 2006 年 4 月第 1 次印刷

开本: 787 毫米×1 092 毫米 1/16 印张: 3

字数: 58 千字 印数: 0 001~2 000 册

定价: 4.50 元

如发现印、装质量问题, 影响阅读, 请与出版科联系调换。

(联系地址: 北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编: 100081)

前

言

《全国各类成人高等学校招生考试丛书》(专科起点升本科)是人民教育出版社根据教育部2006年1月颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲——专科起点升本科》组织编写的。丛书包括复习指导用书和模拟试题两大部分,《高等数学(二)模拟试题》是复习指导用书《高等数学(二)》的配套练习资料,由多年从事成人高考考前辅导的专家和教师在认真研究考试大纲的基础上,根据新大纲规定的考试内容、试卷结构和题型编写的。旨在通过练习,使考生熟悉考试题型,学习应考技巧,训练思维方法,巩固学科知识。

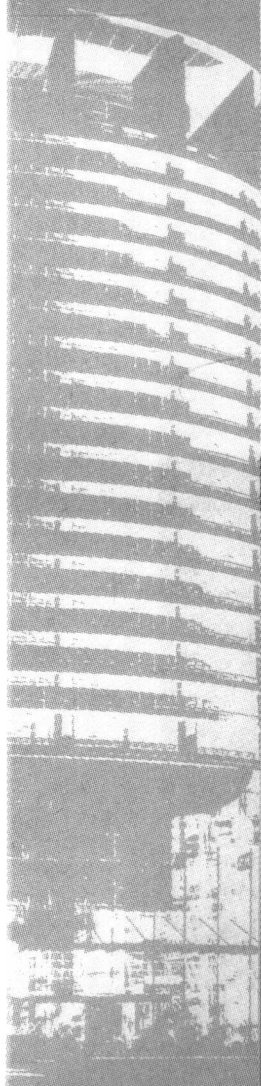
《高等数学(二)模拟试题》从不同角度,以多种形式对考生掌握知识的情况进行检测,便于考生了解考试的方法与特点。《高等数学(二)模拟试题》在题型上与大纲给出的试卷结构相同。考生通过练习不但可以检验学科知识的掌握情况,及时发现和调整不足;同时还可以通过训练,学会合理分配考试时间,争取在最短的时间内,取得最佳的考试成绩。

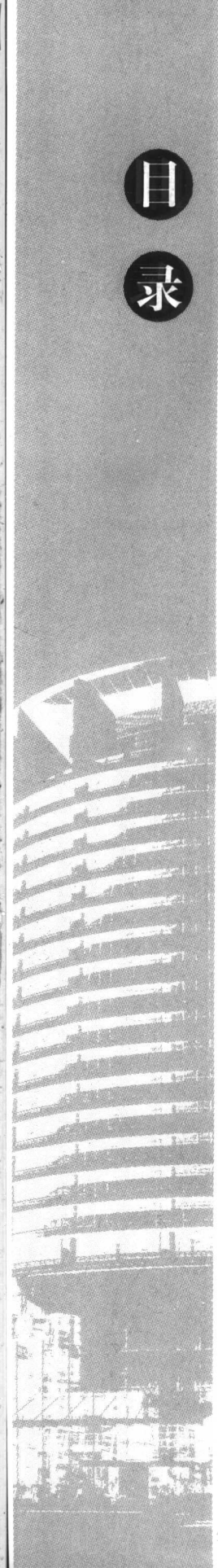
由于编写时间比较仓促,不当之处请专家及广大考生批评指正。

本书由顿继安主编。责任编辑龙正武,封面设计张蓓。

成人高考《高等数学》编写组

2006年3月





目

录

模拟试题一	1
模拟试题二	5
模拟试题三	9
模拟试题四	14
模拟试题五	19
模拟试题六	23
模拟试题七	27
模拟试题八	32
模拟试题九	36
模拟试题十	40



模拟试题一

一、选择题:1~10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{2x}$ 等于()。
A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 1
- 设 $y = x^2 - x^{-5}$, 则 y' 等于()。
A. $2x - 5x^{-6}$ B. $2x + 5x^{-6}$ C. $2x^3 - 5x^{-4}$ D. $2x^2 + 5x^{-4}$
- 设 $f(x) = \sin 3x$, 则 $f'(0)$ 等于()。
A. 0 B. 3 C. 1 D. -3
- 下列各点是曲线 $y = \cos x$ 的拐点坐标的是()。
A. (0, 0) B. (0, 1) C. $(\frac{\pi}{2}, 1)$ D. $(\frac{\pi}{2}, 0)$
- 设 $F(x) = \int_1^x (t - \sin t) dt$, 则 $F'(x)$ 等于()。
A. $x - \sin x$ B. $t - \sin t$ C. $\frac{t^2}{2} + \cos t$ D. $\frac{x^2}{2} + \cos x$
- 设 $f(x)$ 为可导函数, 则 $(\int f(x) dx)'$ 为()。
A. $f(x)$ B. $f(x) + C$ C. $f'(x)$ D. $f'(x) + C$
- 设函数 $z = x^2 + y^2 + xy$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ 等于()。
A. $2x + 2y$ B. $2x + 2y + xy$ C. $3x + 3y$ D. $x^2 + y^2 + x + y$
- 设 $f'(x) = 1, f(0) = 0$, 则 $\int f(x) dx$ 等于()。
A. $x + C$ B. $x^2 + C$ C. $\frac{x^2}{2}$ D. $\frac{x^2}{2} + C$
- $\int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^2} dx$ 等于()。
A. 0 B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. 1

10. 设事件 A, B 互不相容, 且 $P(A)=0.4, P(B)=0.5$, 则 $P(\overline{AB})$ 等于()。

- A. 0.9 B. 0.5 C. 0.4 D. 0.1

二、填空题: 11~20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分。

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2-x+2} =$ _____。

12. 设函数 $y = \ln x$, 则 $y''(1) =$ _____。

13. 曲线 $y = x^2 + \sin x$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线的斜率 $k =$ _____。

14. 设函数 $z = e^x + xy$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$ _____。

15. 设函数 $z = x^2 + y^2$, 则全微分 $dz =$ _____。

16. 设 x^2 为 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $f(x) =$ _____。

17. 已知 $f(x) = \int_x^x \arctan t dt$, 则 $f'(x) =$ _____。

18. 若 $x=1$ 是函数 $y = x^2 - ax$ 的一个极值点, 则 $a =$ _____。

19. $\int_{-1}^1 x^3 \cos x dx =$ _____。

20. $\int x e^{x^2} dx =$ _____。

三、解答题: 21~28 题, 21~25 题每题 8 分, 26~28 题每题 10 分, 共 70 分。解答应写出推理、演算步骤。

21. 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$ 。

22. 设函数 $y = \sqrt{x} + x^2 \ln x$, 求 dy 。

23. 计算 $\int \frac{1}{x \ln^2 x} dx$ 。

24. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$ 。

25. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x + xy + xyz = e^x$ 所确定的隐函数, 求 dz 。

26. 求函数 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值与最小值。

27. (1) 求曲线 $y = 2 - x^2, y = x (x \geq 0)$ 与直线 $x = 0$ 所围成的平面图形的面积;

(2) 求(1)中平面图形绕 x 轴旋转一周所生成的旋转体体积。

28. 设离散型随机变量 X 的分布列为:

X	1	2	3
p_i	0.2	0.4	a

(1) 求常数 a 的值;

(2) 求 X 数学期望 $E(X)$ 。

参 考 答 案

一、选择题

1. C 2. B 3. B 4. D 5. A 6. A 7. C 8. D 9. A 10. B

二、填空题

11. 0 12. -1 13. 1 14. e^x 15. $2xdx+2ydy$ 16. $2x$ 17. $\arctan x-2x\arctan x^2$

18. 2 19. 0 20. $\frac{e^{x^2}}{2}+C$

三、解答题

$$21. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right]^{-2} = e^{-2}.$$

$$22. \text{因为 } y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x \ln x + \frac{x^2}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x \ln x + x,$$

$$\text{所以 } dy = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x \ln x + x\right) dx.$$

$$23. \int \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \int \frac{1}{\ln^2 x} d \ln x = -\frac{1}{\ln x} + C.$$

$$24. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d(-\cos x) = x \cdot (-\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

25. 先求 z_x . 方程两边同时关于 x 求导数, 得:

$$1 + y + yz + x y z_x = e^x \cdot z_x,$$

$$z_x = \frac{1 + y + yz}{e^x - xy}.$$

再求 z_y . 方程两边同时关于 y 求导数, 得:

$$x + xz + x y z_y = e^x \cdot z_y,$$

$$z_y = \frac{x + xz}{e^x - xy}.$$

$$\text{所以 } dz = z_x dx + z_y dy = \frac{1 + y + yz}{e^x - xy} dx + \frac{x + xz}{e^x - xy} dy.$$

$$26. f'(x) = 3x^2 + 6x,$$

令 $f'(x) = 0$, 解得: $x_1 = 0, x_2 = -2$.

函数 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ 在 $[-2, 2]$ 上可能的最大值、最小值点为 $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 2$, 比较这三个点的函数值:

$$f(0) = -1, f(-2) = 3, f(2) = 19.$$

可知函数 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值为 $f(2) = 19$, 最小值为 $f(0) = -1$.

27. (1) 首先作出由曲线 $y = 2 - x^2, y = x (x \geq 0)$ 与直线 $x = 0$ 所围成的平面图形, 如图阴影部分所示.

再求出 $y = 2 - x^2$ 与 $y = x$ 的交点坐标,

$$\text{由 } \begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = x (x \geq 0) \end{cases}$$

可知,交点坐标为(1,1)。

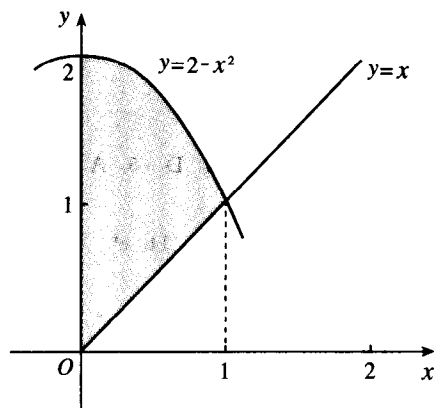
因此,所求平面图形面积为:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 [(2-x^2) - x] dx \\ &= \int_0^1 (2-x-x^2) dx \\ &= \left(2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{7}{6}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) V &= \pi \int_0^1 (2-x^2)^2 dx - \pi \int_0^1 x^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^4 - 4x^2 + 4) dx - \pi \int_0^1 x^2 dx \\ &= \pi \left(\frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + 4x \right) \Big|_0^1 - \pi \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \\ &= \frac{38}{15}\pi. \end{aligned}$$

28. (1) 由 $0.2 + 0.4 + a = 1$ 可知 $a = 0.4$;

$$(2) E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i p_i = 1 \times 0.2 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.4 = 2.2.$$





模拟试题二

一、选择题:1~10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 当 $n \rightarrow \infty$ 时,下列变量为无穷小量的是()。

- A. $\frac{1}{n-1}$ B. $\frac{(-1)^n+1}{3}$ C. e^n D. $n[(-1)^n+1]$

2. 若函数 $f(x) = \begin{cases} ax+1, & x>0 \\ x^2+b, & x\leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导,则 a, b 之值为()。

- A. $a=0, b=1$ B. $a=1, b=1$ C. $a=2, b=0$ D. $a=1, b=0$

3. 已知 $u(1)=1, u'(1)=2, v(1)=0, v'(1)=-1$, 若函数 $y=u(x)v(x)$, 则 $y'(1)$ 等于()。

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

4. 设函数 $y=x^2$, 在 $x=1$ 处的改变量 $\Delta x=0.01$ 时, 此时函数的微分值为()。

- A. 0.01 B. 0.02 C. 2 D. $2xdx$

5. 下列说法正确的是()。

- A. 如果函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续, 则函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点一定可导
B. 如果函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续, 则函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点一定可微
C. 如果函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点可导, 则函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点一定连续
D. 如果函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点不可导, 则函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点一定不连续

6. 直线 l 与 x 轴平行, 且与曲线 $y=2x-x^2$ 相切, 则切点的坐标是()。

- A. $(1,1)$ B. $(-1,1)$ C. $(0,-1)$ D. $(0,1)$

7. 如果函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处满足 $f'(x_0)=0$, 则()。

- A. x_0 是驻点 B. x_0 不是驻点 C. x_0 是极值点 D. x_0 不是极值点

8. 设 $f(x)$ 为 $[-1,1]$ 上连续函数, 则定积分 $\int_{-1}^1 f(-x)dx$ 等于()。

- A. 0 B. $2\int_0^1 f(x)dx$
C. $-\int_{-1}^1 f(x)dx$ D. $\int_{-1}^1 f(x)dx$

9. 下列广义积分收敛的是()。

- A. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ B. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ C. $\int_1^{+\infty} \sqrt{x}dx$ D. $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$

10. 下列说法正确的是()。

- A. 如果 A, B 是互斥事件, 则 $P(A) + P(B) = 1$
- B. 若 $P(A) + P(B) = 1$, 则 A, B 必定是互斥事件
- C. 如果 A, B 是对立事件, 则 $P(A) + P(B) = 1$
- D. 若 $P(A) + P(B) = 1$, 则事件 A 与 B 是对立事件

二、填空题: 11~20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分。

11. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} + ax - b \right) = 0$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 点连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

13. 函数 $y = \frac{\sin x}{x(x-1)}$ 的间断点为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(0)}{2x} = \frac{3}{2}$, 则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

15. $y = e^{2x}$, 则 $y'' = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

16. 曲线 $y = \frac{x-1}{x^2} - 2$ 的渐近线为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

17. $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

18. $\int_{-1}^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

19. 函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \ln(xy)$ 的定义域为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

20. 函数 $z = x^2 + xy - y^2 - 3$ 的全微分 $dz \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、解答题: 21~28 题, 21~25 题每题 8 分, 26~28 题每题 10 分, 共 70 分。解答应写出推理、演算步骤。

21. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{x}}$ 。

22. 求 $\int \sin(x+1) \cos(x+1) dx$ 。

23. 求函数 $y = \arcsin x$ 在点 $x=0, \Delta x=0.02$ 时的微分。

24. 若 $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$ 存在, 且 $f(x) = \frac{\sin 2x}{x - \pi} + 2 \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$, 求 $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$ 。

25. 设曲线 $y = x^2 - 1$ 在点 (x_0, y_0) 处的切线 l 与直线 $y = 2x + 1$ 平行,

(1) 求切点 (x_0, y_0) ;

(2)求切线 l 的方程。

26. 已知 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$, 求 $\int_{-2}^1 f(x) dx$ 。

27. 求由半椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 (y \geq 0)$ 与 x 轴所围成的面积, 并求该半椭圆绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的体积 V 。

28. 设 A, B 是两个事件, 已知 $P(A) = 0.6, P(B) = 0.5, P(B|\bar{A}) = 0.3$, 求:

(1) $P(\bar{A}B)$;

(2) $P(A+B)$ 。

参 考 答 案

一、选择题

1. A 2. A 3. B 4. B 5. C 6. A 7. A 8. D 9. D 10. C

二、填空题

11. $-1, -1$ 12. 2 13. $x=1$ 和 $x=0$ 14. 1 15. $4e^{2x}$ 16. $x=0$ 和 $y=-2$

17. $\ln(1+e^x) + C$ 18. 0 (提示: 利用被积函数是奇函数)

19. $x^2 + y^2 \geq 4$ 且 $xy > 0$ 20. $dx - 2dy$

三、解答题

$$\begin{aligned} 21. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x} - 1} \right)^{\frac{1}{x}} \stackrel{t = \frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t+1}{t-1} \right)^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{t-1} \right)^t \stackrel{t = \frac{t-1}{2}}{=} \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s} \right)^{2s+1} \\ &= e^2. \end{aligned}$$

$$22. \int \sin(x+1) \cos(x+1) dx = \int \sin(x+1) d\sin(x+1) = \frac{1}{2} \sin^2(x+1) + C.$$

23. 先求 y' ,

$$\text{因为 } y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\text{所以 } y'|_{x=0} = 1,$$

$$\text{因此 } dy = y'|_{x=0} \Delta x = 1 \times 0.02 = 0.02.$$

24. 令 $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = A$, 则 $f(x) = \frac{\sin 2x}{x - \pi} + 2A$,

两边同时求极限:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{x - \pi} + 2A,$$

$$A = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \cdot \cos 2x}{1} + 2A,$$

$$A = 2 + 2A,$$

$$A = -2,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -2$ 。

25. (1) $y = x^2 - 1$ 在 (x_0, y_0) 点的切线的斜率为:

$$y' \Big|_{x=x_0} = 2x_0,$$

由题意可知: $2x_0 = 2$,

所以 $x_0 = 1$,

从而 $y_0 = 0$,

即切点为 $(1, 0)$;

(2) 切线 l 方程为: $y - 0 = 2(x - 1)$, 即: $y = 2x - 2$ 。

$$\begin{aligned} 26. & \int_{-2}^1 f(x) dx \\ &= \int_{-2}^0 (x+1) dx + \int_0^1 x^2 dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-2}^0 + \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

27. 半椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 (y \geq 0)$ 与 x 轴的交点为: $(-2, 0), (2, 0)$,

半椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 (y \geq 0)$ 可以看成是由曲线 $y = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ 与 $y = 0$ 所围成的平面图形。

因此, 所求面积为:

$$S = \int_{-2}^2 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx = 3\pi.$$

故所求旋转体体积为:

$$V = \pi \int_{-2}^2 9 \left(1 - \frac{x^2}{4} \right) dx = 9\pi \left(x - \frac{x^3}{12} \right) \Big|_{-2}^2 = 24\pi.$$

28. (1) 因为 $P(B|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}$,

所以 $P(\bar{A}B) = P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})$ 。

因为 $P(A) = 0.6$, 所以 $P(\bar{A}) = 1 - 0.6 = 0.4$,

所以 $P(\bar{A}B) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$;

(2) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$,

因为 $P(B) = P(\bar{A}B) + P(AB)$, 所以 $P(AB) = P(B) - P(\bar{A}B) = 0.5 - 0.12 = 0.38$,

所以 $P(A+B) = 0.6 + 0.5 - 0.38 = 0.72$ 。



模拟试题三

一、选择题: 1~10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \sin x$ 是 x 的()。

A. 高阶无穷小

B. 等价无穷小

C. 同阶无穷小, 但不是等价无穷小

D. 低阶无穷小

2. 下列函数在 $x=0$ 处可导的是()。

A. $y = |x|$

B. $y = x^2$

C. $y = 3\sqrt{x}$

D. $y = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$

3. 直线 l 与 x 轴平行, 且与曲线 $y = x - e^x$ 相切, 则切点的坐标为()。

A. (1, 1)

B. (-1, 1)

C. (0, -1)

D. (0, 1)

4. 设 $y = \frac{\ln x}{x}$, 则 dy 等于()。

A. $\frac{1 - \ln x}{x^2} dx$

B. $\frac{1 - \ln x}{x^2} dx$

C. $\frac{\ln x - 1}{x^2} dx$

D. $\frac{\ln x - 1}{x^2} dx$

5. 设 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$, 且 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 等于()。

A. $\cos x + \frac{1}{2} \cos^2 x$

B. $\cos^2 x - \frac{1}{2} \cos^4 x$

C. $x + \frac{1}{2} x^2$

D. $x - \frac{1}{2} x^2$

6. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\int_a^b f(t) dt - \int_a^b f(x) dx$ 的值()。

A. 小于零

B. 等于零

C. 大于零

D. 不确定

7. 下列广义积分收敛的是()。

A. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

B. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$

C. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

D. $\int_1^{+\infty} e^x dx$

8. 设 $z = \frac{1}{xy}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 等于()。

A. $\frac{1}{x}$

B. $-\frac{1}{x}$

C. $\frac{1}{xy^2}$

D. $-\frac{1}{x^2 y}$

9. 下列结论正确的是()。

- A. 若 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处可微分, 则 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的两个偏导数 $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 必定存在
- B. 若 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的两个偏导数 $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 存在, 则 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处可微分
- C. 若 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的偏导数 $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 存在, 则必有 $f'_x(x_0, y_0)=0, f'_y(x_0, y_0)=0$
- D. 若 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的偏导数 $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 存在, 则 $P_0(x_0, y_0)$ 为函数 $z=f(x,y)$ 的极值点

10. 把 4 个红球和 4 个白球平均放到两个盒子里, 每个盒子有 2 个红球的概率是()。

- A. $\frac{C_4^2}{C_8^4}$ B. $\frac{C_4^2 C_4^2}{C_8^4}$ C. $\frac{2C_4^2 C_4^2}{C_8^4}$ D. $\frac{2C_4^2}{C_8^4}$

二、填空题: 11~20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分。

11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1} = \underline{\hspace{2cm}}。$

12. 设 $f'(1)=2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^2-1} = \underline{\hspace{2cm}}。$

13. 设函数 $f(x+1)=\arcsin x$, 则 $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}。$

14. 曲线 $y=x^2+3x+1$ 在点 $(0,1)$ 处的切线的斜率 $k = \underline{\hspace{2cm}}。$

15. $\int_0^1 (x-x^2) dx = \underline{\hspace{2cm}}。$

16. 设 $\ln 2x$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}。$

17. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \underline{\hspace{2cm}}。$

18. 函数 $z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ln(x+y)$ 的定义域为 $\underline{\hspace{2cm}}。$

19. 设 $f(x,y)=xe^{x+y}$, 则 $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} = \underline{\hspace{2cm}}。$

20. 设 $z=\sin xy$ 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}。$

三、解答题: 21~28 题, 21~25 题每题 8 分, 26~28 题每题 10 分, 共 70 分。解答应写出推理、演算步骤。

21. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin ax}{\sin^2 x} = 2$, 求 a 。

22. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(3x)}$ 。

23. $\int_0^1 \frac{x+x^2}{1+x^2} dx。$

24. 求 $\int \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} dx$ 。

25. 设函数 $y=f(x)$ 是由方程 $y=\sin(xy)-x$ 确定的隐函数, 求导数 y' 。

26. 已知 $f(x)=x+3(x-2)^{\frac{2}{3}}$, 求 $f(x)$ 的单调区间和极值点。

27. 设抛物线 $y=x^2$ 与该曲线在点 $(1,1)$ 处的法线所围平面图形为 D , 求 D 的面积。

28. 袋中有 4 张卡片, 上面分别写有从 1~4 四个整数。让甲乙两人各自从中挑选一张, 甲先挑选, 选完后卡片不放回, 同时再放入一张写有数字 5 的卡片, 接下来让乙去挑选。记乙挑得的数字为 X 。试求随机变量 X 的概率分布, 并求数学期望 $E(X)$ 。

参 考 答 案

一、选择题

1. A 2. B 3. C 4. B 5. D 6. B 7. A 8. D 9. A 10. B

二、填空题

11. $\frac{1}{2}$ 12. 1 13. $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ 14. 3 15. $\frac{1}{6}$ 16. $\frac{1}{x}$ 17. $\frac{2}{3}$ 18. $-1 < x < 1$ 且 $x+y > 0$

19. 1 20. 0

三、解答题

21. 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin ax}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{\sin ax}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin x} = a$,

又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin ax}{\sin^2 x} = 2$,

所以 $a=2$ 。

22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \cos 2x}{\sin 2x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \cos 2x \cdot \frac{x}{\sin 2x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x \cdot \frac{2x}{\sin 2x} = 1$ 。

23. $\int_0^1 \frac{x+x^2}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{1+x^2+x-1}{1+x^2} dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{x-1}{1+x^2} \right) dx$

$= x \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{2(1+x^2)} - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

$= 1 + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 - \arctan x \Big|_0^1$

$= 1 + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4}$ 。

24. $\int \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int -\frac{d(4-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} \stackrel{t=4-x^2}{=} -\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -2 \cdot \sqrt{t} + C = -2\sqrt{4-x^2} + C$ 。

25. 方程两边同时关于 x 求导得:

$y' = \cos(xy) \cdot (y + xy') - 1$,

$[1 - x \cos(xy)] y' = y \cos(xy) - 1$,

$$y' = \frac{y \cos(xy) - 1}{1 - x \cos(xy)}.$$

26. 先求导数: $f'(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt[3]{x-2}}$ ($x \neq 2$), 当 $x=2$ 时, $f(x)$ 不可导。

$$\text{令 } f'(x) = 0,$$

$$\text{得: } x = -6.$$

列表:

x	$(-\infty, -6)$	-6	$(-6, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	不存在	+
$f(x)$	$\uparrow$	极大值	$\downarrow$	极小值	$\uparrow$

所以, $f(x) = x + 3(x-2)^{\frac{2}{3}}$ 在 $(-\infty, -6)$ 上是单调递增的; 在 $(-6, 2)$ 上是单调递减的; 在 $(2, +\infty)$ 上是单调递增的。因此, $x = -6$ 为它的极大值点, 极大值为 $f(-6) = 6$; $x = 2$ 为它的极小值点, 极小值为 $f(2) = 2$ 。

27. 先求法线。

$$\text{由 } f'(x) = 2x \text{ 可知 } f'(1) = 2.$$

$$\text{所以 } y = x^2 \text{ 在 } (1, 1) \text{ 处的法线斜率为 } -\frac{1}{2},$$

因此法线方程为:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1),$$

$$\text{化简得: } y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

作出平面图形 D , 如图所示。

下面先求法线 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 与曲线 $y = x^2$ 的交点的

横坐标, 因为

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{所以 } x^2 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2},$$

$$\text{因此 } 2x^2 + x - 3 = 0,$$

$$x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = 1.$$

平面图形 D 的面积 S 为:

$$S = \int_{-\frac{3}{2}}^1 \left[\left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) - x^2 \right] dx = \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-\frac{3}{2}}^1 = \frac{125}{48}.$$

28. (1) 首先求出 X 取各个值的概率。

随机变量 X 的可能取值为: 1, 2, 3, 4, 5。

$$\text{显然 } P(X=1) = P(X=2) = P(X=3) = P(X=4), P(X=5) = \frac{1}{4}.$$

下面求 $P(X=1)$ 。

$$\text{设事件 } A \text{ 为甲挑到写有数字 1 的卡片, 则 } P(A) = \frac{1}{4}, P(\bar{A}) = \frac{3}{4}.$$

