教育部高校学生司推荐

2006年版

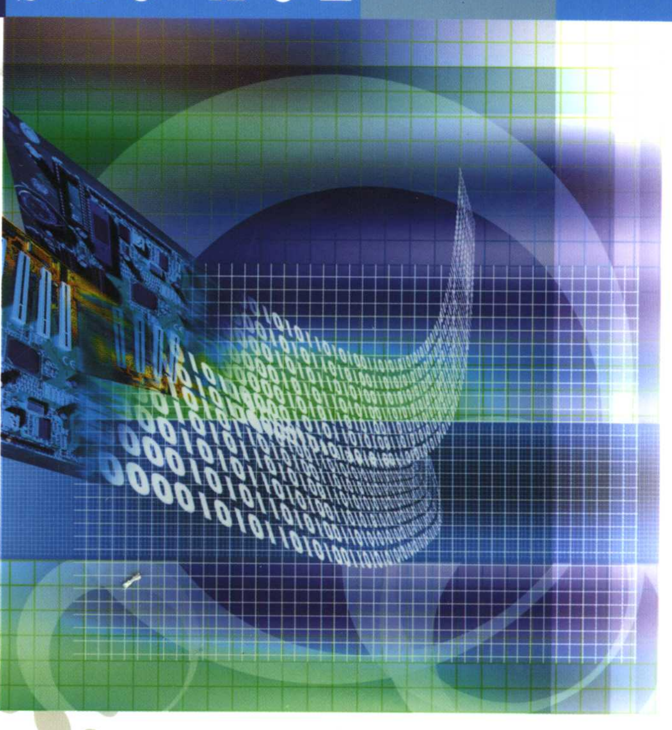
全国各类成人高等学校招生考试丛书

专科起点升本科

高等数学（一）

成人高考《高等数学》编写组 编

GAO DENG SHU XUE



人民教育出版社

全国各类成人高等学校招生考试丛书（专科起点升本科）

高等数学（一）

● 成人高考《高等数学》编写组　编

人民教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

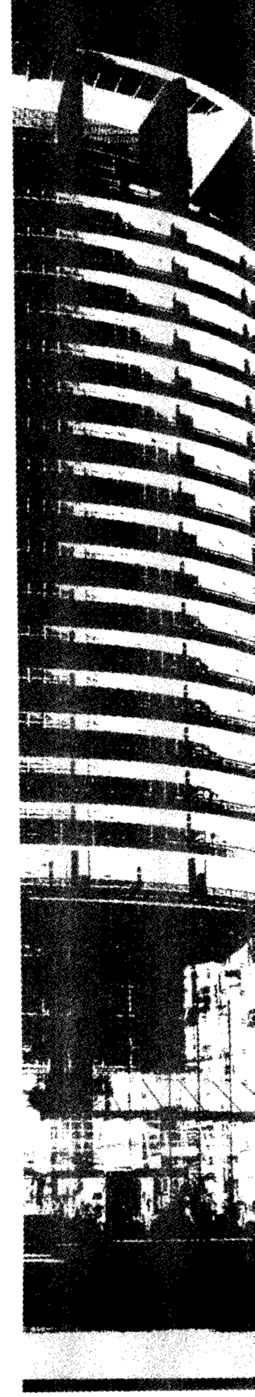
高等数学. 1/刘加霞编. —北京：人民教育出版社，2006
（全国各类成人高等学校招生考试丛书）
专科起点升本科
ISBN 7－107－19350－3

Ⅰ. 高...
Ⅱ. 刘...
Ⅲ. 高等数学—成人教育：高等教育—升学参考资料
Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 003963 号

人民教育出版社出版发行
网址：http：//www.pep.com.cn
人民教育出版社印刷厂印装　全国新华书店经销
2006 年 1 月第 1 版　2006 年 2 月第 1 次印刷
开本：787 毫米×1 092 毫米　1/16　印张：15.5
字数：360 千字　　印数：0 001～5 000 册
定价：17.00 元

前言



近年来，在终身教育思想的影响下，成人高等教育事业蓬勃发展. 为了适应这一要求，教育部组织重新修订并颁布了2006年《全国各类成人高等学校复习考试大纲》(专科起点升本科). 为了尽可能地给广大成人考生提供帮助，使其适应新的考试大纲，深入理解考试要求，人民教育出版社组织长期从事成人高考复习辅导工作的学者、教师编写了《全国各类成人高等学校招生考试丛书》(专科起点升本科)，本书是其中的一本.

《高等数学(一)》的编写者有比较深厚的高等数学知识，对数学有比较深刻的理解，多年来一直在从事高等数学的考前辅导工作，对历届高等数学的考试题都做过比较详细的分析. 作者在编写本书时遵循以下原则：首先，尽量以通俗、直观的方式揭示数学概念的本质；其次，强调各知识点之间的联系，不仅使考生能够应试，更重要的是使考生掌握高等数学的基本思想和方法.

本书严格按照2006年《考试大纲》规定的考试内容和考试要求编写，并根据成人的认知特点，强调在一章之内以及各章之间的逻辑联系. 本书有以下几个特点：

1. 在每章之前首先呈现本章导读，揭示本章核心概念的内涵和价值，并根据考试大纲明确标出本章在试卷中的分值比例以及可能出现的考试题型，然后明确指出本章复习考试的重点和难点.

2. 在每章的正文呈现上，首先分析本章所涉及的数学概念和数学定理，紧接着就配以考试中可能出现的试题，并且通过习题来巩固读者对基本概念、定理的深入理解.

3. 本书配有大量的练习题，以使读者能方便地利用习题来强化所学知识，并附有参考答案以方便读者来检验自己的学习效果.

4. 在每章结束时，以“小结”的方式强调该章的基本知识点，尤其是本章所涉及的数学问题的解决方法。

本书由刘加霞主编，具体编写情况如下：顿继安（第一、二章），刘加霞（第三、四、五章），范小明（第六、七章）.

本书责任编辑王鑫，绘图郭威.

由于编写时间比较仓促，不当之处还望专家及广大读者提出宝贵意见.

成人高考《高等数学》编写组

2006年1月

目录

第一章 极限与连续

极限刻画的是在自变量的某种变化过程中，函数值的一种变化趋势. 极限中逼近的思想贯穿整个高等数学特别是微积分部分的始终，函数的许多重要性质和研究内容，如连续性、导数、积分等都是借助于极限来刻画和解决的.

本章的内容是高等数学的基础，2006 年修订的理工类高等数学“专升本”《复习考试大纲》中确定这部分内容约占试卷总分的 13%. 通过对历年考试题分析可以知道，选择题、填空题、解答题三类题型都涉及，基本属于容易及中等难度题.

重点：

1. 求极限. 这是本章的核心问题，包括求左极限和右极限问题.
2. 无穷小量阶的比较转化为求极限问题.
3. 对函数连续性的理解. 一般通过判断分段函数在分段点处的连续性来考查.

难点：

根据函数的特点选择适当的方法求函数的极限.

第一节 极 限

一、数列

1. 数列的概念

按照某种规律排列的一列数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots,$$

称为一个**数列**，常记为 $\{x_n\}$ 或者 x_n，其中每一个数称作数列的项.

数列可以看作定义域为正整数集 $\mathbf{N}_+$（或它的有限子集）上的函数，即当自变量从小到大依次取值时对应的一列**函数值**.

如果数列 $\{x_n\}$ 的第 n 项 x_n 与 n 之间的函数关系可以用一个式子表示成 $x_n=f(n)$，那么这个式子就叫做这个数列的**通项公式**，数列的通项公式就是相应函数的解析式.

例如，

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 2n-1,\ \cdots;$$
$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \cdots,\ 2^{n-1},\ \cdots;$$
$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots,\ (-1)^n,\ \cdots$$

都是数列，它们的通项公式分别为 $2n-1$，2^{n-1} 和 $(-1)^n$.

2. 数列的性质

（1）数列的单调性.

对于数列 $\{x_n\}$，如果满足

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots,$$

则称这个数列为**递增数列**；如果满足

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant \cdots,$$

则称这个数列为**递减数列**. 递增数列和递减数列统称单调数列.

（2）数列的有界性.

对于数列 $\{x_n\}$，若存在正数 M，对任意的 n，恒有 $|x_n| \leqslant M$，则称数列 $\{x_n\}$ 为有界数列；如果这样的 M 不存在，则称数列 $\{x_n\}$ 为无界数列.

例如，数列 $\{(-1)^n\}$，$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 是有界的；数列 $\{2^{n-1}\}$，$\{2n-1\}$ 是无界的.

二、数列的极限

1. 数列极限的概念

对于数列 $\{x_n\}$，如果随着项数 n 的无限增大（记为 $n \to \infty$），数列中的项 x_n 在变化过程中与某常数 A 无限趋近，则称 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限，记为：$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$，并且称数列 $\{x_n\}$ 是收敛的.

例如，对于数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$，当 $n \to \infty$ 时，$\frac{1}{n}$ 无限趋近于 0，所以数列的极限就为 0，即 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

对于数列 $\left\{1-\frac{1}{n^2}\right\}$，当 $n \to \infty$ 时，$1-\frac{1}{n^2}$ 无限趋近于 1，所以数列的极限就为 1，即 $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = 1$.

对于数列 $\{2n-1\}$，当 $n \to \infty$ 时，$2n-1$ 也无限增大，不能无限趋近于任何一个常数，所以数列 $\{2n-1\}$ 不存在极限，我们称这样的数列为发散的.

对于数列 $\{(-1)^n\}$，当 $n \to \infty$ 时，$(-1)^n$ 时而取 -1，时而取 1，不能无限趋近于任何一个常数，所以数列 $\{(-1)^n\}$ 不存在极限，它是一个发散的数列.

2. 数列极限的四则运算法则

如果 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n \to \infty} y_n = B$，则

$\lim\limits_{n \to \infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n \to \infty} x_n \pm \lim\limits_{n \to \infty} y_n = A \pm B$；

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty}y_n=A \cdot B$;

如果 $B\neq0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\frac{A}{B}$.

3. 数列极限的性质

定理 1 （**唯一性**）如果数列$\{x_n\}$收敛，那么它的极限值一定是唯一的.

定理 2 （**有界性**）若数列$\{x_n\}$收敛，则它一定是有界数列.

定理 2 的逆命题不成立，比如数列$\{(-1)^n\}$就是一个有界数列，但它并不是收敛的，一般情况下，数列的有界性并不能保证它的收敛性.

定理 3 如果数列$\{x_n\}$是单调有界的，则该数列必有极限.

定理 4 （**两边夹定理或称夹逼定理**）如果数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\}$满足不等式

$$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n,$$

且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$.

三、函数的极限

函数 $y=f(x)$的极限描述的是在自变量 x 的变化过程中函数值 $f(x)$的变化趋势，比如对于函数$f(x)=\frac{1}{x}$（如图1-1所示）.

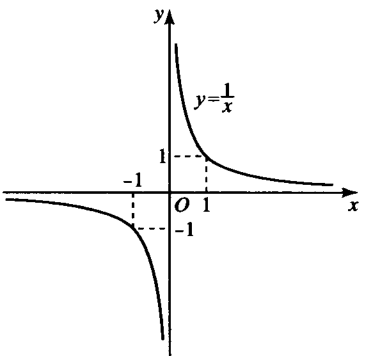


图 1-1

当自变量 x 无限趋近于 1 时，函数值 $f(x)$趋近于 1，当自变量 x 趋近于∞时，函数值趋近于 0.

根据自变量变化趋势的不同，我们通常将函数的极限分为以下几种情况来讨论.

1. 函数 $y=f(x)$在 $x\to\infty$时的极限

(1) $x\to+\infty$时，函数 $f(x)$的极限.

对于函数 $y=f(x)$，如果当自变量 $x\to+\infty$时，函数值 $f(x)$与一个常数 A 无限趋近，则称当 $x\to+\infty$时，函数 $y=f(x)$的极限为 A，记为：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

例如，对于函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，当 $x\to+\infty$时，$\frac{1}{x}$无限趋近于 0，所以当 $x\to+\infty$时函数的极限为 0，记为：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

(2) $x\to-\infty$时，函数 $f(x)$的极限.

对于函数 $y=f(x)$，如果当自变量 $x\to-\infty$时，函数值 $f(x)$与一个常数 A 无限趋近，则称当 $x\to-\infty$时，函数 $y=f(x)$的极限为 A，记为：$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

例如，对于函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，当 $x\to-\infty$时，$\frac{1}{x}$无限趋近于 0，所以当 $x\to-\infty$时函数的极限为 0，记为：$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

（3）$x\to\infty$时，函数 $f(x)$的极限.

对于函数 $y=f(x)$，如果无论自变量 $x\to+\infty$时，还是 $x\to-\infty$时，函数值 $f(x)$都与一个常数 A 无限趋近，则称当 $x\to\infty$时函数 $y=f(x)$的极限为 A，记为：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

例如，对于函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，由上面的分析可知$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

2. 函数 $y=f(x)$在 $x\to x_0$ 时的极限

（1）函数 $y=f(x)$在 $x\to x_0$ 时的极限.

对于函数 $y=f(x)$，如果当 x 无限趋近于 x_0 时，相应的函数值 $f(x)$无限趋近于常数 A，则称当 $x\to x_0$ 时，函数 $y=f(x)$以 A 为极限，记为：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

例如，对于函数 $f(x)=x^2$，当 x 无限趋近于 1 时，对应的函数值 $f(x)$无限趋近于 1，所以$\lim\limits_{x\to1}x^2=1$；当 x 无限趋近于 2 时，对应的函数值 $f(x)$无限趋近于 4，所以$\lim\limits_{x\to2}x^2=4$；当 x 无限趋近于-1时，对应的函数值 $f(x)$无限趋近于 1，所以 $\lim\limits_{x\to-1}x^2=1$.

对于常数函数 $f(x)=0$，给定任意一点 x_0，当 x 无限趋近于 x_0 时，对应的函数值$f(x)$始终都是 0，所以函数无限趋近于 0，故$\lim\limits_{x\to x_0}0=0$.

对于函数 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\geqslant0\\ -x-1 & x<0\end{cases}$如图 1-2 所示，当 x 从左边趋近于 0 时，我们看到，函数值无限趋近于-1；当 x 从右边趋近于 0 时，函数值无限趋近于 1. 所以当 x 无限趋近于 0 时，函数值不能无限趋近于任何一个固定的实数 A，故当 $x\to0$时函数的极限不存在.

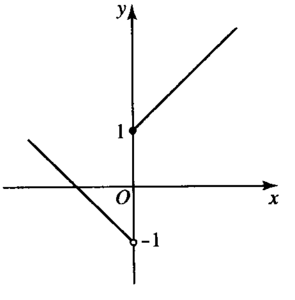


图 1-2

（2）函数 $y=f(x)$在 $x\to x_0$ 时的左极限与右极限.

对于函数 $y=f(x)$，如果当 x 从左边无限趋近于 x_0 时（即在 x 的变化过程中始终有 $x<x_0$，记为 $x\to x_0^-$ 或 $x\to x_0-0$），相应的函数值 $f(x)$无限趋近于常数 A，则称当$x\to x_0^-$时，函数 $y=f(x)$的左极限为 A，记为：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

对于函数 $y=f(x)$，如果当 x 从右边无限趋近于 x_0 时（即在 x 的变化过程中始终有 $x>x_0$记为 $x\to x_0^+$，或 $x\to x_0+0$），相应的函数值 $f(x)$无限趋近于常数 A，则称当$x\to x_0^+$时，函数 $y=f(x)$的右极限为 A，记为：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

例如，对于上面的函数$f(x)=\begin{cases}x+1 & x\geqslant0\\ -x-1 & x<0\end{cases}$就有

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(-x-1)=-1,$$
$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x+1)=1.$$

左极限和右极限是考查自变量从某一确定方向趋于 x_0 时，函数的变化趋势. 它的用途主要有两个方面：

（1）研究自变量趋于某区间的端点时，函数的极限问题；

(2) 研究分段函数在分段点两侧表达式不相同的情形，考查在分段点处的极限问题.

3. 函数极限的性质

定理 5 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则极限值是唯一的.

定理 6 对于函数 $y=f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在的充要条件是当 $x\to x_0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都存在，且$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

这个定理说明，如果$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都存在，但两者不相等，或者两者中至少有一个不存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$必定不存在.

有必要强调指出，极限描述了在给定过程下函数的变化形态，而极限值表示一个确定的常数值. $y=f(x)$当 $x\to x_0$ 时是否有极限，与 $f(x)$在点 x_0 处是否有定义无关.

定理 7（夹逼定理） 如果函数 $y=f(x)$，$y=g(x)$，$y=h(x)$在 x_0 的某邻域内(可不包括 x_0)满足

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),$$

且

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=A,\quad \lim_{x\to x_0}h(x)=A,$$

那么$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，且等于 A，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

定理 8（函数极限的四则运算法则） 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]$必定存在，且

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x)=A\pm B;$$

(2) 则$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$.

推论 如果 n 为自然数，则有$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]^n=A^n$.

(3) 若 $B\neq 0$，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

上述定理对于 $x\to\infty$的情形也成立.

求极限的问题是高等数学中的常见问题，但需要指出，极限的定义指明了概念，并指明了极限值是个固定的常数值，它并没有提供求极限的方法. 人们利用极限定义验证了$\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$，$\lim\limits_{x\to x_0}C=C$，将此作为公式，并利用下列方法求极限.

(1) 利用极限的四则运算法则.

使用极限的四则运算法则必须注意要满足运算条件. 当把一个函数分解为几个函数的“和、差、积、商”求极限时，必须使得每个“函数”都有极限，且作为分母的“函数”的极限不能为 0.

(2) 分式的极限.

如果分母的极限为 0，而分子的极限不为 0，则分式的极限为∞；若分子和分母极限都为

0 的情况，可考虑能否消去分子与分母的 0 因式，化为分母极限不为 0 的情况；对于不能消去的情况，我们后面的学习中还会继续研究其极限的求法，即用洛必达法则求极限.

（3）对于$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $P(x)$，$Q(x)$为 x 的多项式，可利用公式

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0} & m=n\\ 0 & m>n\\ \infty & m<n\end{cases}$$

（4）分段函数在分段点处的极限.

应该注意所给函数在分段点两侧的表达式是否相同，若相同，则直接求$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$. 如果在分段点的两侧函数的解析式不相同，则应该利用左极限与右极限讨论极限是否存在，并求极限值.

上面关于求极限的方法适用于数列.

例 1 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to2}(x^2-2x-3)$；　　（2）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^3+2x+4}{x^2-x+3}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+5}{3x^2-x+1}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+3}{3x^3+2x+4}$.

解：（1）$\lim\limits_{x\to2}(x^2-2x-3)=\lim\limits_{x\to2}x^2-\lim\limits_{x\to2}2x-\lim\limits_{x\to2}3=(\lim\limits_{x\to2}x)^2-2\lim\limits_{x\to2}x-3=4-4-3=-3$；

（2）
$$\lim_{x\to1}\frac{3x^3+2x+4}{x^2-x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to1}3x^3+\lim\limits_{x\to1}2x+\lim\limits_{x\to1}4}{\lim\limits_{x\to1}x^2-\lim\limits_{x\to1}x+\lim\limits_{x\to1}3}=\frac{3+2+4}{1-1+3}=3;$$

（3）
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+5}{3x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1+0+0}{3+0+0}=\frac{1}{3};$$

（4）
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+3}{3x^3+2x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}{3+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}}=0.$$

例 2 求下列各分段函数在 $x=0$ 点的极限.

(1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x+\dfrac{1}{2} & x>0 \end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

解：(1) 由于 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$，

所以，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{1}{2}$.

(2) 当 $x>0$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{x}=1$，因此 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 1=1$；

当 $x<0$ 时，$f(x)=\dfrac{-x}{x}$，因此 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} -1=-1$.

左极限与右极限不相等，因此 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

例 3 若 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 存在，且 $f(x)=x^3+\dfrac{2x^2+1}{x+1}+2\lim\limits_{x\to 1} f(x)$，求 $f(x)$.

解：由极限的定义可知，如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则它表示一个确定的数值，设 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=A$，由题设有

$$f(x)=x^3+\frac{2x^2+1}{x+1}+2A,$$

因此

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(x^3+\frac{2x^2+1}{x+1}+2A\right),$$

从而 $A=1+\dfrac{3}{2}+2A$，解得 $A=-\dfrac{5}{2}$，

故 $f(x)=x^3+\dfrac{2x^2+1}{x+1}-5$.

例 4 设 $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=3$，$\lim\limits_{x\to 1} h(x)=3$，且 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，求 $\lim\limits_{x\to 1}[3x^2+4f(x)]$.

解：由极限性质可知

$$\lim_{x\to 1}[3x^2+4f(x)]=\lim_{x\to 1} 3x^2+\lim_{x\to 1} 4f(x)=3+4\lim_{x\to 1} f(x),$$

由夹逼定理可知

$$\lim_{x\to 1} f(x)=3,$$

所以，$\lim\limits_{x\to 1}[3x^2+4f(x)]=\lim\limits_{x\to 1} 3x^2+\lim\limits_{x\to 1} 4f(x)=15$.

例 5 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a，b.

解：所给极限为“$\infty-\infty$”型，不能利用极限的和差运算法则，可考虑先将所给式子通

分，得

$$\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b=\frac{x^2+1-ax^2-ax-bx-b}{x+1}$$
$$=\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-(b-1)}{x+1}.$$

当 $x\to\infty$时，只有当分子的幂次低于分母的幂次时，极限才能为 0，因此必有

$$1-a=0，且-(a+b)=0，$$

解得 $a=1$，$b=-1$.

四、两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

关于这个极限，需要说明的是：

第一，这里 x 的单位为弧度；

第二，这个结果适用于所有具有结构特点为$\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1$ 的函数极限，也即分母与分子 sin 后的变量完全相同，且分母趋于 0.

例如，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x^2}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)}{\tan x}=1$；

而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}3\cdot\dfrac{\sin(3x)}{3x}=3$.

例 6 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 mx}{x^2}$（$m$ 为非零常数）；（2）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$.

解：（1）
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 mx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin mx}{mx}\right)^3 m^3x\right]$$
$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{mx}\right)^3\cdot\lim_{x\to 0}(m^3x)$$
$$=1\times 0$$
$$=0；$$

（2）
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{1}{2}.$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

这个极限的结构特点是$\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}$，凡是具有这种结构特点的函数的极限都具有这

个结果，例如，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e},\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}=\mathrm{e},\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}=\mathrm{e},$$

它还有如下常用的等价形式

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

例 7 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}$；(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x-1}$；(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x}$；(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解：(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}]^{6}=\mathrm{e}^{6}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-1}=\mathrm{e}^{2}\cdot 1=\mathrm{e}^{2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{(-x)(-1)}=\mathrm{e}^{-1}$.

(4) 解法一 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-x)^{\frac{1}{x}}}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}}{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}}=\mathrm{e}^{-2}$；

解法二 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1-\frac{2x}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{-2x}}\right]^{-\frac{2}{1+x}}=\mathrm{e}^{-2}$.

例 8 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2-x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$； (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$.

解：(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{-2}}\right)^{\frac{x+1}{-2}\cdot(-2)-1}$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{-2}}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right]^{-2}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{-2}}\right)^{-1}=\mathrm{e}^{-2},$$

本题也可采用下面变形处理

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^{x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}}=\mathrm{e}^{-2};$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2-x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]^{\sqrt{x}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}$$

$$=\mathrm{e}^{-1}\cdot\mathrm{e}=1.$$

五、无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量与无穷大量

对于函数 $y=f(x)$，如果当自变量 x 具有某种变化趋向时，函数 $f(x)$的极限为 0，则称在 x 的这种变化过程中，$f(x)$为无穷小量，一般记为：$\lim f(x)=0$.

若当自变量 x 具有某种变化趋向时，$|f(x)|$越来越大且无限增大，它可以大于预先给定的任意大的正数，则称在 x 的这种变化过程中，$f(x)$为无穷大量，记为：$\lim f(x)=\infty$.

注意　这里“自变量 x 具有某种变化趋向时”包括如下几种情况：

$x\to x_0$，$x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$.

必须指出，只有在指明自变量的变化趋势时才能讨论一个函数是无穷小量还是无穷大量.

例如，对于函数 $f(x)=x^2$，当 $x\to 0$ 时，函数是无穷小量，当 $x\to\infty$时，函数是无穷大量；对于函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时，函数是无穷大量，当 $x\to\infty$时，函数是无穷小量.

关于无穷大量与无穷小量，有以下几点需要注意.

第一，无穷小量描述的是在某个过程中函数趋于 0 的这种特殊变化趋势，而不是一个绝对值很小的常数.

第二，无穷大量也是描述在某个变化过程中函数的绝对值无限增大的变化趋势，而不是一个绝对值很大的常数.

第三，无穷小量与无穷大量之间具有如下关系：

在某一变化过程中，如果 $f(x)$是无穷小量，且 $f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷大量；如果 $f(x)$是无穷大量，则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷小量.

因此，无穷大量的问题经常可以转化为无穷小量的问题讨论.

2. 无穷小量的性质

为了简便，我们约定，下列性质中所讲的无穷小量与无穷大量都是对同一过程而言. 在性质的叙述中省略不提.

性质 1　两个无穷小量之和仍为无穷小量.

性质 2　有界函数与无穷小量之积仍为无穷小量.

性质 3　两个无穷小量之积仍为无穷小量.

性质 4　若 $f(x)$为无穷大量，则其倒数$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小量；若 $f(x)$为无穷小量，且 $f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大量.

性质 5　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$，其中 α 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

性质 5 常称为极限基本定理.

性质 4 表明，可以说“无穷大量的倒数为无穷小量”，但是不能笼统地说“无穷小量的倒数为无穷大量”.

3. 无穷小量的比较

设函数 $\alpha(x)$，$\beta(x)$都是自变量 x 在同一个变化过程中的两个无穷小量，$\lim\alpha(x)=0$，$\lim\beta(x)=0$：

若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$是比 $\beta(x)$高阶的无穷小量，记为：$\alpha(x)=o(\beta(x))$；

若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$是比 $\beta(x)$低阶的无穷小量；

若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C$，其中 C 不等于 0，则称 $\alpha(x)$是与 $\beta(x)$同阶的无穷小量，特别当 $C=1$ 时，称 $\alpha(x)$是与 $\beta(x)$等价的无穷小量，记为：$\alpha(x)\sim\beta(x)$.

例 9 选择题：

(1) 当 $n\to\infty$时，下列变量为无穷小量的有（　　）.

A. $\dfrac{1}{n}$　　B. $\dfrac{(-1)^n+1}{2}$　　C. 2^n　　D. $n[(-1)^n+1]$

(2) 当 $x\to2$ 时，下列变量为无穷大量的有（　　）.

A. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & x\neq2\\ 0 & x=2\end{cases}$　　B. $f(x)=2^{\frac{1}{x-2}}$

C. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-2} & x\neq2\\ 0 & x=2\end{cases}$　　D. $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$

(3) 当 $x\to0$ 时，$x^2-\sin x$ 是 x 的（　　）.

A. 高阶无穷小　　B. 等价无穷小

C. 同阶无穷小，但不是等价无穷小　　D. 低阶无穷小

分析

(1) 由无穷小量定义可知，只需判定是否有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

若 $a_n=\dfrac{1}{n}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，可知应选 A.

若 $a_n=\dfrac{(-1)^n+1}{2}$，对于数列$\{a_n\}$，考查其子列$\{a_{2n}\}=\{1\}$，可知$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$；而其子列$\{a_{2n-1}\}=\{0\}$，可知$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$；因此知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在，故应排除 B.

若 $a_n=2^n$，可知随着 n 的增大，$a_n=2^n$ 的值也增大，当 n 足够大时，$a_n=2^n$ 可大于任意给定的值，因此应排除 C.

若 $a_n=n[(-1)^n+1]$，对于数列$\{a_n\}$的子列$\{a_{2n}\}=\{2n\}$没有极限，因此也应排除 D.

故本例应当选 A.

(2) 由无穷大量的定义可知，只需判定是否有$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\infty$. 这里有必要指出，$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\infty$只是一种形式符号，它并不说明 $f(x)$当 $x\to2$ 时有极限，而且意味着，当$x\to2$时，$|f(x)|$将大于任意给定的正数.