高考数学专项夺标

GAOKAO
SHUXUE ZHONGDANGTI
GONGLÜE

高考数学中档题攻略

高考数学研究组 组编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高考数学中档题攻略

高考数学研究组　组编

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考数学中档题攻略 / 高考数学研究组组编. -- 杭州：浙江大学出版社，2006.3
ISBN 7-308-04658-3

Ⅰ.高... Ⅱ.高... Ⅲ.数学课－高中－解题－升学参考资料 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 018454 号

出版发行 浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com)
责任编辑 钱欣平
排　　版 浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷 杭州杭新印务有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 7.5
字　　数 150 千字
版 印 次 2006 年 3 月第 1 版 2006 年 4 月第 2 次印刷
书　　号 ISBN 7-308-04658-3/G·1036
定　　价 10.00 元

前　言

高考复习是循序渐进、不断综合、不断深入、不断提高的过程，也是再学习、再研究、再认识、再质变的过程。数学作为高考三大工具学科之首，在高考中的地位是显而易见的。那么，怎样才能学好数学呢？特别提醒考生要注意以下几点：

1. 要真正做到了解自己，要了解自己的知识薄弱环节，寻找相关题目，进行有选择性、有针对性的训练。

2. 在做题过程中，要掌握解决问题的基本方法，注重通性通法，做题要有主动意识、要及时总结和反思，力争通过做一题，得到一类问题的解决方法。

3. 在做题过程中，要注重解题的思考过程，注重研究解题的方向和策略，逐步提高自身的解题能力。

4. 在做题过程中，要有一个阶段对选择题、填空题、中档题、综合题进行专门训练，要加强准确度的训练，提高解题速度，只有这样才能在高考中取得好成绩。

5. 在做题过程中，应该学会数学思维与数学方法，数学思维方法都不是单独存在的，都有其对立面，并且两者能够在解决问题的过程中相互转换、补充，领悟数学思维中的哲学思想和在哲学思想的指导下进行数学思维，是提高学生数学素养、培养学生数学能力的重要方法。

6. 加强自身解题规范性的训练，了解试卷批改中的给分点，严格按评分标准书写解答题，熟练、准确地用文字语言、符号语言、逻辑语言表达解题过程，字迹工整，力争会做的题目不丢步骤分，不完全会做的题目也能拿到部分分数。

“高考数学专项达标丛书”以其鲜活的素材，准确的信息，新

颖的体例，独特的风格呈现给读者。丛书包括《高考数学新颖题解读》、《高考数学解题法揭秘》、《高考数学选择题突破》、《高考数学填空题巧解》、《高考数学中档题攻略》、《高考数学综合题透析》、《高考数学展望与对策》共七个分册。丛书内容全面细致，容量大，既抓住主干知识的重点、难点、热点，又不留知识死角。题型全面，题量充分，体例设计科学，构思奇巧。丛书可以带领你进入数学的殿堂，领略殿堂的美丽和奥妙，掌握更熟练的方法和技巧。

丛书由高考数学研究组组织编写。尽管在成书过程中，我们本着近乎苛刻的态度，题题推敲，层层把关，力求能够帮助读者更好地把握丛书的脉络和精华，但书中也难免有疏忽和纰漏之处，诚挚地希望广大师生批评指正。

目　　录

第 1 讲　条件的分析、转化和挖掘

数学中档题的条件往往比较复杂，内涵丰富，这对同学们提出了较高的要求，需要我们首先理清条件，从中寻找解题的线索.

1. 化繁为简，使已知条件更为明朗

化繁为简是数学教学中突破难点的重要方法，也就是通过对已知条件的化简，使复杂问题分解成简单问题. 运用这种方法不仅可解决学生常感困难、不好把握的一些问题，而且有助于学生形成良好的思维习惯.

例 1　直线 $l: y=kx+1$ 与双曲线 $C: 2x^2-y^2=1$ 的右支交于不同的两点 A、B.

(1)求实数 k 的取值范围；

(2)是否存在实数 k，使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点 F？若存在，求出 k 的值. 若不存在，说明理由.

分析　*本题主要的难点是对已知条件"以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点 F"的化简，实际上通过圆的性质可化简成 $FA\perp FB$.*

解析　(1)将直线 l 的方程 $y=kx+1$ 代入双曲线 C 的方程 $2x^2-y^2=1$ 后，

整理得 $(k^2-2)x^2+2kx+2=0$　　①

依题意，直线 l 与双曲线 C 的右支交于不同两点，得

$$\begin{cases} k^2-2\neq 0, \\ \Delta=(2k)^2-8(k^2-2)>0, \\ -\dfrac{2k}{k^2-2}>0, \\ \dfrac{2}{k^2-2}>0. \end{cases}$$

解得 k 的取值范围为 $-2<k<-\sqrt{2}$.

(2)设 A、B 两点的坐标分别为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)，则由①得

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2k}{2-k^2}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{2}{k^2-2}. \end{cases} \quad ②$$

假设存在实数 k，使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点 $F(c,0)$，则由

$FA\perp FB$ 得

$(x_1-c)(x_2-c)+y_1y_2=0$，即 $(x_1-c)(x_2-c)+(kx_1+1)(kx_2+1)=0$

整理得

$$(k^2+1)x_1x_2+(k-c)(x_1+x_2)+c^2+1=0 \qquad ③$$

把②式及 $c=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 代入③式化简得

$5k^2+2\sqrt{6}k-6=0$.

解得 $k=-\frac{6+\sqrt{6}}{5}$ 或 $k=\frac{6-\sqrt{6}}{5}\notin(-2,-\sqrt{2})$（舍去）.

可知 $k=-\frac{6+\sqrt{6}}{5}$ 使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点.

例2 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a，公差为 b；等比数列 $\{b_n\}$ 的首项为 b，公比为 a，其中 $a,b\in\mathbf{N}^*$，且 $a_1<b_1<a_2<b_2<a_3$.

(1)求 a 的值；

(2)若对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$，总存在 $m\in\mathbf{N}^*$，使 $a_m+3=b_n$，求 b 的值；

(3)在(2)中，记 $\{c_n\}$ 是所有 $\{a_n\}$ 中满足 $a_m+3=b_n$，$m\in\mathbf{N}^*$ 的项从小到大依次组成的数列，又记 S_n 为 $\{c_n\}$ 的前 n 项和，T_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，求证：$S_n\geqslant T_n(n\in\mathbf{N}^*)$.

分析 对于数列的基本题，要正确利用条件，列出不等式和方程，抓住运算的有效性.

解析 (1) $\because a<b<a+b<ab<a+2b$，$a,b\in\mathbf{N}^*$，

$$\therefore \begin{cases}a+b<ab,\\ ab<a+2b.\end{cases}\quad \therefore \begin{cases}a>\dfrac{b}{b-1},\\ a<\dfrac{2b}{b-1}.\end{cases}\quad \therefore \begin{cases}a>1+\dfrac{1}{b-1},\\ a<2+\dfrac{2}{b-1}.\end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases}a>1,\\ a<4.\end{cases}$$

$\therefore a=2$ 或 $a=3$（$a=3$ 时不合题意，舍去）. $\therefore a=2$.

(2) $a_m=2+(m-1)b$，$b_n=b\cdot 2^{n-1}$，由 $a_m+3=b_n$ 可得

$5+(m-1)b=b\cdot 2^{n-1}$. $\therefore b(2^{n-1}-m+1)=5$. $\therefore b=5$.

(3)由(2)知 $a_n=5n-3$，$b_n=5\cdot 2^{n-1}$，$\therefore a_m=b_n-3=5\cdot 2^{n-1}-3$.

$\therefore c_n=5\cdot 2^{n-1}-3$. $\therefore S_n=5(2^n-1)-3n$，$T_n=\frac{1}{2}n(5n-1)$.

$\because S_1=T_1=2$，$S_2=T_2=9$.

当 $n\geqslant 3$ 时，

$$\begin{aligned}S_n-T_n&=5\left[2^n-\frac{1}{2}n^2-1\right]-\frac{5}{2}n\\&=5\left[(1+1)^n-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-1\right]\\&=5\left[(1+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots)-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-1\right]\\&>5\left[1+n+\frac{n(n-1)}{2}-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-1\right]=0.\end{aligned}$$

$\therefore S_n>T_n$. 综上得 $S_n\geqslant T_n(n\in\mathbf{N}^*)$.

例 3　已知函数 $f(x)=x^2e^{ax}$,其中 $a\leqslant0$,e 为自然对数的底数.

(1)讨论函数 $f(x)$的单调性;

(2)求函数 $f(x)$在区间$[0,1]$上的最大值.(2004 年湖南高考)

分析　由题目的条件可知,要对函数 $f(x)=x^2e^{ax}$ 求导,然后利用指数函数恒大于零,转化讨论函数 $y=x(ax+2)$的性质,从而使思路更清晰.

解析　(1)$f'(x)=x(ax+2)e^{ax}$.

(i)当 $a=0$ 时,令 $f'(x)=0$,得 $x=0$.

若 $x>0$,则 $f'(x)>0$,从而 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;

若 $x<0$,则 $f'(x)<0$,从而 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减.

(ii)当 $a<0$ 时,令 $f'(x)=0$,得 $x(ax+2)=0$,故 $x=0$ 或 $x=-\frac{2}{a}$.

若 $x<0$,则 $f'(x)<0$,从而 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减;

若 $0<x<-\frac{2}{a}$,则 $f'(x)>0$,从而 $f(x)$在$\left(0,-\frac{2}{a}\right)$上单调递增;

若 $x>-\frac{2}{a}$,则 $f'(x)<0$,从而 $f(x)$在$\left(-\frac{2}{a},+\infty\right)$上单调递减.

(2)(i)当 $a=0$ 时,$f(x)$在区间$[0,1]$上的最大值是 $f(1)=1$.

(ii)当 $-2<a<0$ 时,$f(x)$在区间$[0,1]$上的最大值是 $f(1)=e^a$.

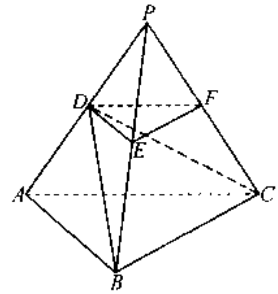
(iii)当 $a\leqslant-2$ 时,$f(x)$在区间$[0,1]$上的最大值是 $f\left(-\frac{2}{a}\right)=\frac{4}{a^2e^2}$.

2. 在众多条件中抓住主线

例 4　如图,P-ABC 是底面边长为 1 的正三棱锥,D、E、F 分别为棱长 PA、PB、PC 上的点,截面 DEF∥底面 ABC,且多面体 DEF-ABC 与棱锥 P-ABC 的棱长和相等.(棱长和是指多面体中所有棱的长度之和)

(1)求证:P-ABC 为正四面体;

(2)若 $PD=\frac{1}{2}PA$,求二面角 D-BC-A 的大小;(结果用反三角函数值表示)



(3)设多面体 $DEF\text{-}ABC$ 的体积为 V，是否存在体积为 V 且各棱长均相等的直平行六面体，使得它与多面体 $DEF\text{-}ABC$ 有相同的棱长和？若存在，请具体构造出这样的一个直平行六面体，并给出证明；若不存在，请说明理由.

分析　立体几何证明题，由于条件较多，很多同学无从入手，这时就要认真分析题目，在众多的条件中找到通往结论的一条路，抓住主线切入.

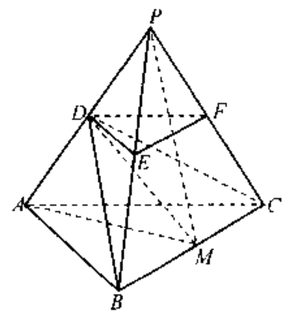
解析　(1)∵多面体 $DEF\text{-}ABC$ 与棱锥 $P\text{-}ABC$ 的棱长和相等，

$\therefore DE+EF+FD=PD+PE+PF$，

又∵截面 DEF∥底面 ABC，

$\therefore DE=EF=FD=PD=PE=PF$，$\angle DPE=\angle EPF=\angle FPD=60°$，

$\therefore P\text{-}ABC$ 是正四面体.



(2)如右图所示，取 BC 的中点 M，连接 PM，DM，AM，

$\because BC\perp PM$，$BC\perp AM$，

$\therefore BC\perp$ 平面 PAM，$BC\perp DM$，

则 $\angle DMA$ 为二面角 $D\text{-}BC\text{-}A$ 的平面角.

由(1)知，$P\text{-}ABC$ 的各棱长均为 1，

$\therefore PM=AM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，由 D 是 PA 的中点，得

$\sin\angle DMA=\dfrac{AD}{AM}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore \angle DMA=\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(3)存在满足条件的直平行六面体.

多面体 $DEF\text{-}ABC$ 的棱长和为定值 6，体积为 V.

设直平行六面体的棱长均为 $\dfrac{1}{2}$，底面相邻两边夹角为 α，

则该六面体棱长和为 6，体积为 $V=\dfrac{1}{8}\sin\alpha$.

∵正四面体 $P\text{-}ABC$ 的体积是 $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$，$\therefore 0<V<\dfrac{\sqrt{2}}{12}$，$0<8V<1$. 可知 $\alpha=\arcsin(8V)$.

故构造棱长均为 $\dfrac{1}{2}$，底面相邻两边夹角为 $\arcsin(8V)$ 的直平行六面体即满足要求.

例5　某工厂生产甲、乙两种产品，每种产品都是经过第一和第二工序加工而成，两道工序的加工结果相互独立，每道工序的加工结果均有 A、B 两个等级. 对每种产品，两道工序的加工结果都为 A 级时，产品为一等品，其余均为二等品.

(1)已知甲、乙两种产品每一道工序的加工结果为 A 级的概率如表一所示，分别求生产出的甲、乙产品为一等品的概率 $P_{甲}$、$P_{乙}$；

(2)已知一件产品的利润如表二所示，用 ξ、η 分别表示一件甲、乙产品的利润，在(1)的条件下，求 ξ、η 的分布列及 $E\xi$、$E\eta$；

(3)已知生产一件产品需用的工人数和资金额如表三所示．该工厂有工人 40 名，可用资金 60 万元．设 x、y 分别表示生产甲、乙产品的数量，在(2)的条件下，x、y 为何值时，$z=xE\xi+yE\eta$ 最大？最大值是多少？

表一

概率＼工序／产品	第一工序	第二工序
甲	0.8	0.85
乙	0.75	0.8

表二

利润＼等级／产品	一　等	二　等
甲	5(万元)	2.5(万元)
乙	2.5(万元)	1.5(万元)

表三

用量＼项目／产品	工人(名)	资金(万元)
甲	8	5
乙	2	10

解析　(1)$P_{甲}=0.8\times0.85=0.68$，

$P_{乙}=0.75\times0.8=0.6$．

(2)随机变量 ξ、η 的分布列是

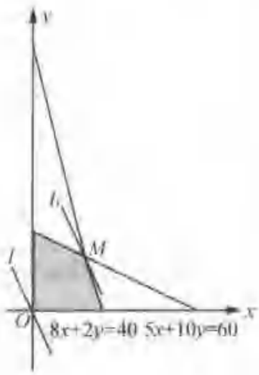
ξ	5	2.5
P	0.68	0.32

η	2.5	1.5
P	0.6	0.4

$E\xi=5\times0.68+2.5\times0.32=4.2$，

$E\eta=2.5\times0.6+1.5\times0.4=2.1$．

(3)由题设知 $\begin{cases}5x+10y\leqslant60,\\8x+2y\leqslant40,\\x\geqslant0,\\y\geqslant0.\end{cases}$



目标函数为 $z=xE\xi+yE\eta=4.2x+2.1y$．

作出可行域(如图)：

作直线 l：$4.2x+2.1y=0$，

将 l 向右上方平移至 l_1 位置时，直线经过可行域上的点 M 点与原点距离最大，此时 $z=4.2x+2.1y$ 取最大值．解方程组 $\begin{cases}5x+10y=60,\\8x+2y=40.\end{cases}$

得 $x=4$，$y=4$．即当 $x=4$，$y=4$ 时，z 取最大值，z 的最大值为 25.2．

3．努力挖掘隐含条件

所谓隐含条件，是指题目中含而未露、不易察觉的固有条件．解题时，学生常因忽视题中的隐含条件，而使解题陷入困境，或是得出错误的结论．正确把握好隐含条件的挖掘，是解题的关键．

例6 当实数 a 为何值时，关于 x 的方程：$1+\log_2 x=2\log_2(x-a)$ 有且只有一个实数解？

分析 本题在转化过程中最重要的是考虑到方程本身的限制，可以去掉 $x>0$ 的限制条件，从而得到简化. 当然，本题还可以利用数形结合的思想考虑，比较方便.

解析 $\because 1+\log_2 x=2\log_2(x-a)$，$\therefore \begin{cases}\log_2 2x=\log_2(x-a)^2,\\ x>0,\\ x>a.\end{cases}$

从而 $\begin{cases}2x=(x-a)^2,\\ x>0,\\ x>a.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x=(x-a)^2,\\ x>a.\end{cases} \Rightarrow x^2-2(a+1)x+a^2=0$ 在 $(a,+\infty)$ 上有且只有一个解. 令 $f(x)=x^2-2(a+1)x+a^2$ 只需要 $\begin{cases}a+1>a\\ \Delta=0\end{cases}$，或者 $f(a)<0$.

从而解得 $a=-\dfrac{1}{2}$ 或者 $a>0$.

例7 已知 $3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=2\sin\alpha$，试求 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta$ 的取值范围.

解析 由条件消去 $\sin\beta$ 得到

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\dfrac{1}{2}(2\sin\alpha-3\sin^2\alpha)+\sin^2\alpha=-\dfrac{1}{2}(\sin\alpha-1)^2+\dfrac{1}{2}$，

而 $\sin^2\beta=2\sin\alpha-3\sin^2\alpha\geqslant 0$ 得 $0\leqslant\sin\alpha\leqslant\dfrac{2}{3}$.

从而 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta\in\left[0,\dfrac{4}{9}\right]$.

说明 本题容易忽略了 $\sin\alpha$ 的范围，简单的认为是 $[-1,1]$，从而导致错误. 其实，在任何时候减少变量时，都需要认真考虑剩下的变量的范围是否受到消去变量的影响和限制.

例8 已知 $a>0$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a$，$a_{n+1}=a+\dfrac{1}{a_n}$，$n=1,2,\cdots$.

(1)已知数列 $\{a_n\}$ 极限存在且大于零，求 $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$（用 a 来表示 A）；

(2)设 $b_n=a_n-A$，$n=1,2,\cdots$，求证 $b_{n+1}=-\dfrac{b_n}{A(b_n+A)}$；

(3)若 $|b_n|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$ 对 $n=1,2,\cdots$ 都成立，求 a 的取值范围.

解析 (1)由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，且 $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n(A>0)$，对 $a_{n+1}=a+\dfrac{1}{a_n}$ 两边取极限得，

$A=a+\dfrac{1}{A}$，解得 $A=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2+4}}{2}$，又 $A>0$，$\therefore A=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$.

(2)由 $a_n=b_n+A$;$a_{n+1}=a+\frac{1}{a_n}$ 得 $b_{n+1}+A=a+\frac{1}{b_n+A}$.

$\therefore b_{n+1}=a-A+\frac{1}{b_n+A}=-\frac{1}{A}+\frac{1}{b_n+A}=-\frac{b_n}{A(b_n+A)}$.

即 $b_{n+1}=-\frac{b_n}{A(b_n+A)}$对 $n=1,2,\cdots$都成立.

(3)令 $|b_1|\leqslant\frac{1}{2}$,得 $|a-\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+4})|\leqslant\frac{1}{2}$.

$\therefore |\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4}-a)|\leqslant\frac{1}{2}$.

$\therefore \sqrt{a^2+4}-a\leqslant 1$,解得 $a\geqslant\frac{3}{2}$.

现证明当 $a\geqslant\frac{3}{2}$时,$|b_n|\leqslant\frac{1}{2^n}$,对 $n=1,2,\cdots$都成立.

(i)当 $n=1$ 时结论成立(已验证).

(ii)假设当 $n=k(k\geqslant 1)$时结论成立,即 $|b_k|\leqslant\frac{1}{2^k}$,那么

$|b_{k+1}|=\frac{|b_k|}{|A(b_k+A)|}\leqslant\frac{1}{A|b_k+A|}\times\frac{1}{2^k}$.

故只须证明$\frac{1}{A|b_k+A|}\leqslant\frac{1}{2}$,即证 $A|b_k+A|\geqslant 2$ 对 $a\geqslant\frac{3}{2}$成立.

由于 $A=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}=\frac{2}{\sqrt{a^2+4}-a}$,

而当 $a\geqslant\frac{3}{2}$时,$\sqrt{a^2+4}-a\leqslant 1$,$\therefore A\geqslant 2$.

$\therefore |b_k+A|\geqslant A-|b_k|\geqslant 2-\frac{1}{2^k}\geqslant 1$,即 $A|b_k+A|\geqslant 2$.

故当 $a\geqslant\frac{3}{2}$时,$|b_{k+1}|\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{k+1}}$,即当 $n=k+1$ 时结论成立.

根据(i)和(ii),可知结论对一切正整数都成立.

故$|b_n|\leqslant\frac{1}{2^n}$对 $n=1,2,\cdots$都成立的 a 的取值范围为$\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$.

能力过关测试

一、选择题

1. 已知 $A=\{x|x+1\geqslant 0\}$,$B=\{y|y^2-2>0\}$,全集 $I=\mathbf{R}$,则 $A\cap C_IB=$　　(　　)

A. $\{x|x\geqslant\sqrt{2}$ 或 $x\leqslant-\sqrt{2}\}$　　B. $\{x|x\geqslant-1$ 或 $x\leqslant-\sqrt{2}\}$

C. $\{x|-1\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\}$　　D. $\{x|-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant-1\}$

2. 不等式 $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>-1$ 的解集为　（　　）

A. $\{x|x>4\}$　　B. $\{x|x<4\}$　　C. $\{x|1<x<4\}$　　D. $\{x|1<x<\frac{2}{3}\}$

3. 已知函数 $y=x^3-3x$，则它的单调增区间是　（　　）

A. $(-\infty,0)$　　B. $(0,+\infty)$

C. $(-1,1)$　　D. $(-\infty,-1)$及$(1,+\infty)$

4. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+1}{x+1}-ax+b\right)=2$，则 b 的值为　（　　）

A. 0　　B. 4　　C. -4　　D. 不确定

5. 设 $f(x)$，$g(x)$ 在$[a,b]$上可导，且 $f'(x)>g'(x)$，则当 $a<x<b$ 时，有　（　　）

A. $f(x)>g(x)$　　B. $f(x)<g(x)$

C. $f(x)+g(a)=g(x)+f(a)$　　D. $f(x)+g(b)>g(x)+f(b)$

6. 函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & (|x|\leqslant1)\\ |x| & (|x|>1)\end{cases}$，如果方程 $f(x)=a$ 有且只有一个实根，那么 a 满足　（　　）

A. $a<0$　　B. $0\leqslant a<1$　　C. $a=1$　　D. $a>1$

7. 要得到函数 $y=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2x+1$ 的图象，只要将函数 $y=2\sin2x$ 的图象　（　　）

A. 向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位　　B. 向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位

C. 向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位　　D. 向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位

8. 若三棱锥 P-ABC 的三条侧棱两两垂直，$PA=PB=1$，$PC=2$，则 P 到底面 ABC 的距离为　（　　）

A. 2　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{5}{6}$　　D. $\frac{2}{3}$

9. 曲线 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数，$-\pi\leqslant\theta\leqslant-\frac{\pi}{3}$）的长度为　（　　）

A. $\frac{4\pi}{3}$　　B. $\frac{2}{3}\pi$　　C. $\frac{5\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

10. 使得 $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n<2005$ 成立的最大的正整数 n 的值为　（　　）

A. 11　　B. 10　　C. 9　　D. 8

二、填空题

11. 事件 A,B,C 相互独立，如果 $P(A\cdot B)=\frac{1}{6}$，$P(\overline{B}\cdot C)=\frac{1}{8}$，$P(A\cdot B\cdot \overline{C})=\frac{1}{8}$，则 $P(B)=$________；$P(\overline{A}\cdot B)=$________.

12. 设函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，当 $x\leqslant 1$ 时，$y=-x^2+1$，则 $f(4)=$________；当 $x>1$ 时，$f(x)=$________.

13. 函数 $f(x)=(1+\sin x)^{10}+(1-\sin x)^{10}$ 的最大值是________.

14. 已知 $f(x)=-\log_{\cos\varphi}(x^2-ax+3a)$（$\varphi$ 为锐角且为常数），在区间 $[2,+\infty)$ 为增函数，则实数 a 的取值范围为________.

15. 已知动圆 P 与定圆 C：$(x+2)^2+y^2=1$ 相外切，又与定直线 L：$x=1$ 相切，那么动圆的圆心 P 的轨迹方程是________.

三、解答题

16. 化简 $f(x)=\cos\left(\frac{6k+1}{3}\pi+2x\right)+\cos\left(\frac{6k-1}{3}\pi-2x\right)+2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)$（$x\in\mathbf{R}$，$k\in\mathbf{Z}$），并求函数 $f(x)$ 的值域和最小正周期.

17. 已知二次函数 $f(x)$ 的二次项系数为 a，且不等式 $f(x)>-2x$ 的解集为 $(1,3)$.

(1) 若方程 $f(x)+6a=0$ 有两个相等的根，求 $f(x)$ 的解析式；

(2) 若 $f(x)$ 的最大值为正数，求 a 的取值范围.

18. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\boldsymbol{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值；

(2) 若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，且 $\sin\beta=-\frac{5}{13}$，求 $\sin\alpha$ 的值.

19. 已知 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，且 a_1,a_3,a_2 成等差数列.

(1) 求 q 的值；

(2) 设 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项，q 为公差的等差数列，其前 n 项和为 S_n，当 $n\geqslant 2$ 时，比较 S_n 与 b_n 的大小，并说明理由.

20. 9 粒种子分别种在 3 个坑内，每坑 3 粒，每粒种子发芽的概率为 0.5，若一个坑内至少有 1 粒种子发芽，则这个坑不需要补种，若一个坑内的种子都没发芽，则这个坑需要补种. 假定每个坑至多补种一次，每补种 1 个坑需 10 元，用 ξ 表示补种费用，写出 ξ 的分布列并求 ξ 的数学期望.（精确到 0.01）

21. 已知函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 的图象过点 $P(0,2)$，且在点 $M(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $6x-y+7=0$.

(1) 求函数 $y=f(x)$ 的解析式；

(2)求函数 $y=f(x)$ 的单调区间.

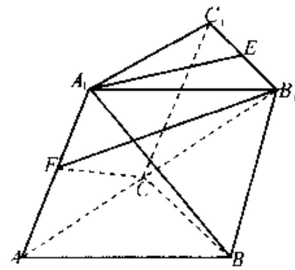
22. 已知一物体做圆周运动,出发后 t 分钟内走过的路程 $s=at^2+bt$,最初用 5 分钟走完第一圈,接下去用 3 分钟走完第二圈.

(1)试问:该物体走完第三圈用了多长时间?(结果可用无理数表示);

(2)试问:从第几圈开始,走完一圈的时间不超过 1 分钟?

23. 设 $a>0$,求函数 $f(x)=\sqrt{x}-\ln(x+a)(x\in(0,+\infty))$ 的单调区间.

24. 如图,在斜三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,$\angle A_1AB=\angle A_1AC$,$AB=AC$,$A_1A=A_1B=a$,侧面 B_1BCC_1 与底面 ABC 所成的二面角为 $120°$,E、F 分别是棱 B_1C_1、A_1A 的中点.



(1)求 A_1A 与底面 ABC 所成的角;

(2)求证:A_1E∥平面 B_1FC;

(3)求经过 A_1、A、B、C 四点的球的体积.

25. M 是抛物线 $y^2=x$ 上的一点,动弦 ME,MF 分别交 x 轴于 A,B 两点,且 $MA=MB$.

(1)若 M 为定点,求证:直线 EF 的斜率为定值;

(2)若 M 为动点,且 $\angle EMF=90°$,求 $\triangle EMF$ 的重心 G 的轨迹.

第 2 讲　从结论的需求中寻找解题思路

所谓分析法，很多时候不仅要从条件中去分析，更应该对问题的结论作一番分析，看看想要得出结论需要做一些什么工作，然后联系条件去寻找解决问题的突破口.

例 1　数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n，已知 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}S_n(n=1,2,3,\cdots)$.

求证：(1)数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 是等比数列；

(2) $S_{n+1}=4a_n$.

证明　(1) $\because a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$，$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}S_n$，

$\therefore (n+2)S_n=n(S_{n+1}-S_n)$，整理得 $nS_{n+1}=2(n+1)S_n$，

$\therefore \dfrac{S_{n+1}}{n+1}=2\dfrac{S_n}{n}$. 故 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 是以 2 为公比的等比数列.

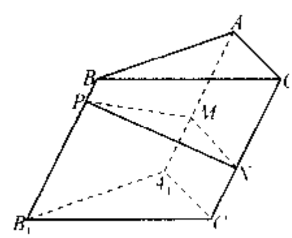
(2)由(1)知 $\dfrac{S_{n+1}}{n+1}=4\cdot\dfrac{S_{n-1}}{n-1}(n\geqslant 2)$. 于是 $S_{n+1}=4(n+1)\cdot\dfrac{S_{n-1}}{n-1}=4a_n(n\geqslant 2)$.

又 $a_2=3S_1=3$，故 $S_2=a_1+a_2=4$.

因此对于任意正整数 $n\geqslant 1$，都有 $S_{n+1}=4a_n$.

说明　从所需证明的结论出发，分析 $\dfrac{S_n}{n}$ 与 $\dfrac{S_{n+1}}{n+1}$ 之间的关系，联系条件 a_{n+1} 与 S_n 的关系进行变形.

例 2　如图，点 P 为斜三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 的侧棱 BB_1 上一点，$PM\perp BB_1$ 交 AA_1 于点 M，$PN\perp BB_1$ 交 CC_1 于点 N.



(1)求证：$CC_1\perp MN$；

(2)在任意 $\triangle DEF$ 中有余弦定理：$DE^2=DF^2+EF^2-2DF\cdot EF\cos\angle DFE$. 拓展到空间，类比三角形的余弦定理，写出斜三棱柱的三个侧面面积与其中两个侧面所成的二面角之间的关系式，并予以证明.

分析　从所需证明的结论出发，考虑结论的充分条件是什么？通过找充分条件，慢