高中数学知识、方法和实践

—— 高二（下）

◆ 上海东方激光教育文化有限公司　组编

《高中数学知识、方法和实践》丛书编委会

主　　编　袁建平　周宁医

（上海市建平中学）

编　　委（按姓氏笔画排序）

何作勇　吴惠逸　周宁医　陶志诚

袁建平　谢立竿　颜国连　戴丽君

本册编者　周宁医　戴丽君　谢立竿　何作勇

中国三峡出版社

前　言

参考书特别是一本好的参考书是学生学习中必不可少的。摆在同学们面前的《高中数学知识、方法和实践》，正是这样一套既贴近教与学，又非常实用的高中数学辅导丛书。

本丛书的特点及使用方法介绍如下：

1. 本丛书以每周的学习内容为一讲，每讲分三篇：【知识篇】、【方法篇】、【训练篇】，编写中体现三个原则：① 学法辅导与同步训练相结合；② 基础知识、方法与重难点内容相结合；③ 高一、高二的课本内容与高考的能力考查相结合。每章还附有【本章单元测试题】及【本章高考试题选】，书末有两个附录：参考答案及数学思想方法与数学解题技能技巧索引。

2. 【方法篇】是本丛书的核心内容之一，本篇分三个层次：

例题精析　以基本题型来细化本周学习的基本知识和基本方法，其所选的例题尽可能涵盖所学内容，这是每位学生都**必须学习和掌握**的内容；

重难点选讲　每周精选一到两个重难点内容以专题形式进行简要的分析、归纳和小结，这些内容往往是同学们学习中的“瓶颈”，突破了，则学习就变得轻松自如，具有“纲举目张”的作用，因此，这也是每位学生应**努力学好**的内容；

能力与发展　一些课本上涉及较少但又往往是高考能力考查的内容，我们将在这里进行简要的介绍与分析，这部分内容又分两小块：概念辨析与探究拓展，其中，概念辨析以错例的形式出现，考查学生对数学概念及方法的“错与对”的辨析能力，以及对数学概念内涵的深刻理解，这是课本上涉及很少但近几年高考频频出现的热点试题；探究拓展则精选一到两个高考热点问题进行分析和归纳。这一层次的内容虽有一定的难度，但高考却必须面对，因此，这是那些学有余力及重点中学的学生需**力争努力学习**的内容。

3. 【训练篇】是本丛书颇具特色的又一核心内容，本篇分三类：

周二基础练　精选与【方法篇】中例题精析相对应的基本内容和题型，这部分习题与教学同步，含上周三到本周二的学习内容，是学生基础达标习题，也是每位学生**必做习题**（30～45 分钟）；

周四专题练　分两个专题，其中专题一为本讲【方法篇】中重难点选讲所对应的专题训练，是学生重点强化习题，为每位学生应**努力做好**的习题（30～45 分钟）；专题二为本讲【方法篇】中能力与发展相对应的习题及一些能力题，可选作，是学有余力及重点中学的学生能力拓展习题，这部分有目的地选了最近的一些新

颖题及能力题，可选作，主要是为了学生更好地适应目前高考的能力考查，题目有一定的思维量，可放在学完本讲后或本章后再去做。力争**努力完成**（30～45分钟）。

周六实战练 这是与本讲所学全部内容相对应的测试题，其难度参照重点学校的考试要求，同学们可用此来及时检验自己对本讲内容掌握的程度，希望每位学生按规定时间完成本套习题，是每位学生**都应做**的习题（90～100分钟）。

《高中数学知识、方法和实践》为各级各类高中的莘莘学子提供了一套集知识、方法及训练于一体的翔实完备的学习资料，参加编写的都是长期奋战在教学**第一线**的名师、学科带头人、高级教师等，对同学们学好数学必将大有裨益；该丛书最大特点是针对性强，按照认知规律："知道什么"、"为什么"、"还有什么"这根主线，为学生搭建合理的知识平台，构筑数学解题能力，把学生从"课课练、天天做"中解放出来，只要每周做2～3套便可达到理想程度，使数学学习变得轻松而更加有效。使用该丛书对象为各级各类中学的高一至高三的学生，对高中数学教师也具有很好的参考价值。

《高中数学知识、方法和实践》由下列系列书构成：

◆ 高中数学知识、方法和实践（高一上、下）

◆ 高中数学知识、方法和实践（高二上、下）

◆ 高中数学知识、方法和实践（高三）

本丛书由袁建平、周宁医主编策划。本册编者：何作勇（第1－4讲）、周宁医（第5－8讲）、戴丽君、谢立竿（第9－16讲），周宁医审定；这里还要特别感谢孙智峰、张继发等编辑同志为本书进行细致入微的编辑加工及审读工作。

由于本丛书立意新颖，编写难度较大，又受作者水平所限，书中难免有疏漏之处，敬请读者不吝指正。

联系地址：Email: yuanjp518@yahoo.com.cn，zhny2005@sina.com

编　者

目　录

第十三章　排列与组合

第一讲　排　列

知　识　篇

【知识要点】

1. 乘法原理

如图 1－1，小明从甲地往丙地，途中经过乙地. 从甲地往乙地有两条路径可走，从乙地往丙地有三条路径可走，则从甲地往丙地共有 $2 \times 3 = 6$(条) 路径可走.

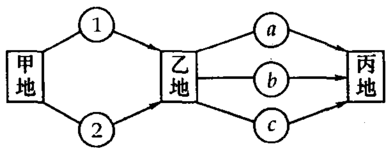

图 1－1

【析】 (1) 上述问题是乘法原理的一个简单模型，理解了该模型也就理解了乘法原理. 千万不要忽视了对此模型的理解，而去对乘法原理的一般表述作“死记硬背”.

(2) 从甲地往丙地必须经过乙地，共分两步：第一步是从甲地往乙地；第二步是从乙地往丙地. 这两步缺一不可，只有完成了这两步，才能说明完成了整个事件. 即每条途径必须经过两段路径才能到达.

(3) 第一步中的路径 ① 对应于第二步中的路径 ⓐ、ⓑ、ⓒ，即 ① → ⓐ，① → ⓑ，① → ⓒ，有 3 条路径从甲地到丙地；同理，第一步中的路径 ② 也对应于第二步中的路径 ⓐ、ⓑ、ⓒ，即 ② → ⓐ，② → ⓑ，② → ⓒ，也有 3 条路径从甲地到丙地. 由乘法的意义可知，从甲地到丙地的路径共有 $N = 3 + 3 = 3 \times 2 = 6$(种). (参见图 1－2 和图 1－3)

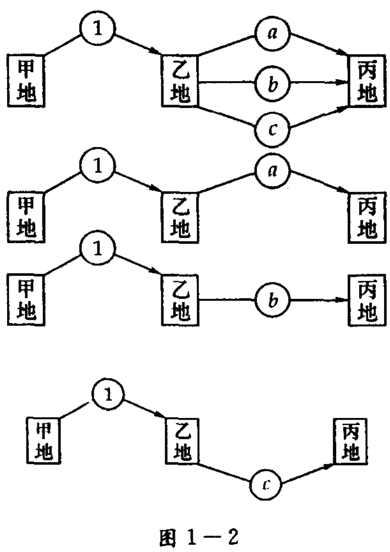

图 1－2

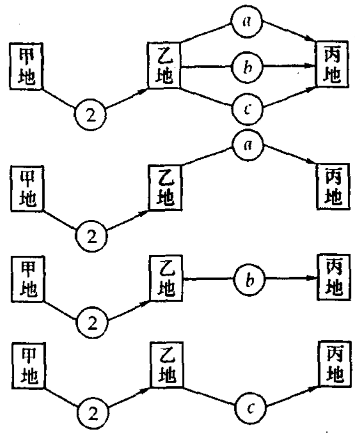

图 1－3

2. 排列的定义

从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素，按照一定的次序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

【析】 (1) 排列也就是按一定的次序排队列. 排队列当然要考虑两个最基本的要素：第一，排队列的对象(即元素)，也就是"谁"去排队列的问题；第二，排队列的位置(即次序)，也就是队列排在什么"地方"的问题.

(2) n 是用来排队列的待选元素的个数，m 是排队列时"位置"的个数，或者说是排队列过程中已经选定元素的个数. 排队列过程中，已经选定元素与位置一一对应.

(3) 如果两个排列相同，也就是所排队列相同，当然是指相同的"位置"上必须占居相同的"对象"，即当且仅当两个排列的元素完全相同，且元素排列的次序也相同时，两个排列才能相同.

3. 排列数公式

$$P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

【析】 (1) 从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素，能形成许多个不同的排列. 我们感兴趣的是所有不同排列的个数(即排列数)，而不是排列本身. 注意：排列数不是排列.

(2) 在理解 P_n^m 的过程中，每个待选元素被选取的机会均等，并且每个元素只能占据一个位置.

(3) 理解具体的 P_5^3 是理解一般情形 P_n^m 的关键，不要忽视之.

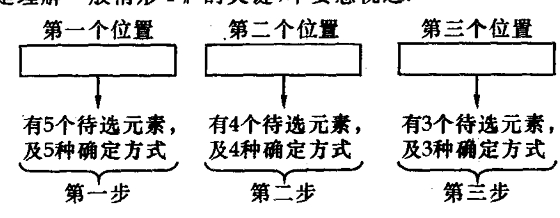

图 1－4

于是 $P_5^3 = 5\times4\times3 = 60$(种)

【学习目标】

1. 经历对背景问题的分析过程，掌握乘法原理和排列数公式原理.

2. 掌握排列的概念，理解排列过程中必须要考察的两个基本要素："对象(即元素)"、"位置(即次序)".

3. 会用计算器求 P_n^m 之值.

4. 会用乘法原理和 P_n^m 解决一些实际问题中的计数问题，为学习概率提供必要的基础.

方　法　篇

【例题精析】

1. 乘法原理问题

【例 1】　如图 1－5，用红、黄、蓝、绿、黑五种颜色给图中的 4 个区域涂色，如果每一区域涂一种颜色，并且相邻区域的颜色不能相同，共有几种不同的涂色方法？

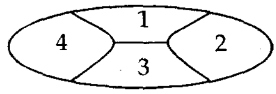

图 1－5

【解题策略】　逐步给区域涂色，分步解决.

【解】　第一步：给 1 号区域涂色，共有 5 种颜色可选，即有 5 种方法.

第二步：给 2 号区域涂色，共有 4 种 4 颜色可选，即有 4 种方法.

第三步：给 3 号区域涂色，共有 3 种颜色可选，即有 3 种方法.

第四步：给 4 号区域涂色，共有 3 种颜色可选，即有 3 种方法.

由乘法原理，给图中 4 个区域都涂妥颜色的方法共有 $5\times4\times3\times3=180$ 种.

【点评】　给 4 号区域涂色是本问题中应该注意的地方. 4 号区域可以涂 2 号区域同样的颜色.

【例 2】　问：$(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3+b_4)(c_1+c_2)$ 展开后一共有多少项？

【解题策略】　展开后多项式的项可以看作是从第一括号内取一个数，从第二个括号内取一个数，从第三个括号内取一个数相乘而得. 分步确定每一个括号内的元素的待选种数，可以统计出有多少项.

【解】　展开后的项为 $a_ib_jc_k$（其中 $i=1,2,3;j=1,2,3,4;k=1,2$），需要分成三步完成.

第一步：从第一个括号内取出 $a_i(i=1,2,3)$，有 3 种取法.

第二步：从第二个括号内取出 $b_j(j=1,2,3,4)$，有 4 种取法.

第三步：从第三个括号内取出 $c_k(k=1,2)$，有 2 种取法.

由乘法原理，原式展开后共有 $3\times4\times2=24$ 项.

【点评】　分析因式的展开过程，关注展开后项的特点（项为 $a_ib_jc_k$ 的形式，其中 $i=1,2,3;j=1,2,3,4;k=1,2$）. 确定如何分步来计数是关键.

2. 排列数公式的运用

【例 3】　求证：(1)$P_n^n=P_{n+1}^{n+1}-nP_n^n$；　(2)$P_n^m+m\cdot P_n^{m-1}=P_{n+1}^m$.

【解题策略】　利用公式 $P_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$ 作恒等变形，化等式繁的一边为简的一边.

【证明】　(1)$P_{n+1}^{n+1}-nP_n^n=(n+1)!-n\cdot n!=(n+1)\cdot n!-n\cdot n!=n\cdot n!+n!-n\cdot n!=n!=P_n^n$

故 $P_n^n=P_{n+1}^{n+1}-nP_n^n$.

$$(2)P_n^m+m\cdot P_n^{m-1}=\frac{n!}{(n-m)!}+m\cdot\frac{n!}{[n-(m-1)]!}=\frac{n!}{(n-m)!}+\frac{m\cdot n!}{(n-m+1)(n-m)!}$$

$$=\frac{n!}{(n-m)!}(1+\frac{m}{n-m+1})=\frac{n!}{(n-m)!}\cdot\frac{n-m+1+m}{n-m+1}$$

$$=\frac{(n+1)n!}{(n-m+1)(n-m)!}=\frac{(n+1)!}{[(n+1)-m]!}=P_{n+1}^m$$

故 $P_n^m+m\cdot P_n^{m-1}=P_{n+1}^m$.

【点评】　(1)$(n+1)!=(n+1)\cdot n!$ 是一个最简单的变形，它是排列数公式变形的基础，千万不要忽视它；

(2) 有关排列数公式恒等变形的问题，一般选用公式 $P_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$. 有关排列数的计算问题，一般选用公式 $P_n^m=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)$.

【重难点选讲】排列问题的常用方法、技巧

排列问题必须考虑两个基本要素：元素及其所占的位置．对排列问题所设置的限制条件，也无非是对元素设置或者对元素所占的位置设置．解决排列的计数问题必须从这两个基本要素出发，限元排列、限位排列以及相邻排列和相间排列（即：对位置的限制是“动态”的排列）．

1．排列的应用问题

排列的实际应用主要反映在利用排列数公式来处理计数问题．

【例 4】 为适应旅游的需要，一铁路线在原有车站的基础上新增加了若干个（至少两个）旅游车站，客运车票因此增加了 62 种，问铁路线现有车站多少个？

【解题策略】 车站由原有车站和新增车站两部分组成，车票也因此由两部分组成．可以分设车站个数，列方程求解．

【解】 设原有车站为 n 个，新增车站为 m 个，则原有车票为 P_n^2 种，现有车票为 P_{m+n}^2 种．

于是：$P_n^2+62=P_{m+n}^2$

即：$n(n-1)+62=(m+n)(n+m-1)\Rightarrow 2mn+m^2-m=62$

$\Rightarrow m(2n+m-1)=62=2\times 31$

又由于 m,n 都为自然数，且 $m\geqslant 2$，

则：$\begin{cases}m=2\\2n+m-1=31\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=31\\2n+m-1=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=2\\n=15\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=31\\n=-14\text{（舍去）}\end{cases}$

故该铁路线上有车站 17 个．

【点评】 (1) 本题为一个实际应用问题，车票的种类与车站的起始有关，是排列问题，不要与票价问题混淆；(2) $2mn+m^2-n=62$ 是一个含有两个未知量的不定方程，必须关注相关的辅助条件才能求解．

2．枚举法

依据题设条件把所有的排列一个一个地列举出来，然后计算个数的一种方法称为枚举法．这种方法一般是题设限制条件较多，但数值不大的排列计数问题．

【例 5】 四位先生去参加舞会，他们进门时都把帽子放在门口的衣帽架上，舞会结束后又各自拿回自己的帽子．试问这四位先生所拿的帽子都不是自己的帽子的方式共有多少种？

【解题策略】 本问题受到的限制条件较多，但涉及的数值不大，可以用枚举法．

【解】 设人的编号分别为：一、二、三、四，他们各自帽子的编号分别为：1，2，3，4．则他们所戴的帽子都不是自己的帽子的排列图如下：

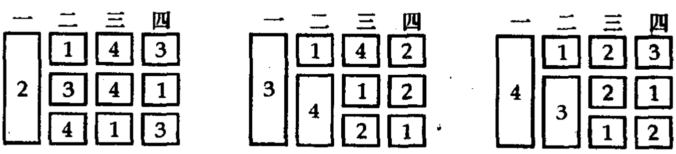

图 1－6

从上图可知，都戴了别人帽子的方式共有 9 种．

【点评】 枚举法一般用来解决计数数值不大，排列受限较多，难以用 P_n^m 计数的问题．

3．限元排列与限位排列

对排列的元素设置限制条件的排列称为限元排列，解决这类问题是优先考察设限的元素，对排列的元素所占的位置设置限制条件的排列称为限位排列，解决这类问题是优先考察设限的位置．前者以元素为考察分类或分步的对象，后者以位置为考察分类或分步的对象，侧重点不同而已．

【例 6】 要安排五名工人分别当车工、钳工、刨工、铣工和油漆工．已知工人李明不会做钳工和油漆工，其他工人都能胜任这五种工作．问共有多少种安排工作的方法？

【解题策略】 优先考察特殊的元素或优先考察特殊的位置．

【解】 方法一：（限元排列）优先考察特殊的元素——李明．

第一步：安排李明的工作，他可以当车工、刨工、铣工，有 3 种方法.

第二步：安排其他工人的工作，相当于油漆工、钳工或车工、铣工、刨工中的两者，作为“位置”与四名工人之间的排列有 $P_4^4 = 24$ 种方法.

由乘法原理，安排这五名工人的工作方法共有 $24 \times 3 = 72$ 种.

方法二：(限位排列)优先考察特殊的“位置”—— 油漆工和钳工(如图 1－7).

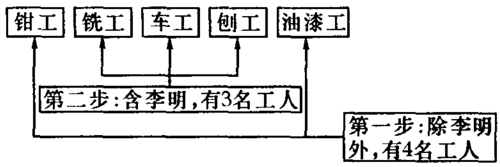

图 1－7

第一步：安排油漆工与钳工，除李明外，共有四名工人可安排这些工作，有 $P_4^2 = 12$ 种.

第二步：安排其他工种，有 $P_3^3 = 6$ 种.

由乘法原理，安排这五项工种的方法共有 $12 \times 6 = 72$ 种.

方法三：从李明这个元素的反面考察问题：$P_5^5 - P_2^1 P_4^4 = 120 - 48 = 72$ 种

故安排这五名工人的工作方法共有 72 种.

【点评】 有限制条件的排列问题，最根本的是抓住条件对元素的限制，或者抓住条件对位置的限制. 方法三抓住的是条件对元素 —— 李明的限制，是从反面去解决问题的，称为淘汰法(或间接法). 以上这些都是分析“元素”或“位置”的特征，也被称为特征分析法.

4. 相邻问题与相间问题

对排列的元素设置限制条件也可以是“动态”的. 常常是要求元素之间必须相邻或者不相邻(即相间)，解决这类问题的方法是“视一法”或“插空法”.

【例 7】 3 名女同学和 6 名男同学站成一排照相，在下列条件要求下分别有几种不同的排列方式：(1)3 名女同学要求相邻；(2)3 名女同学要求两两不相邻.

【解题策略】 3 名女同学要求相邻，可以把她们看作一个整体来考虑，她们要求不相邻，则可以把她们插入到已经排好位置的任两个男同学之间去.

【解】 (1) 第一步：把 3 名女同学看作一个整体与男同学一起的排列共有 $P_7^7 = 5040$ 种方法.

第二步：3 名女同学内部相互之间可以交换位置，共有 $P_3^3 = 6$ 种方法.

由乘法原理，总的排列方法共有 30240 种.

(2) 第一步：6 名男同学排妥队列共有 $P_6^6 = 720$ 种方法.

第二步：把 3 名女同学插入到已排妥队列的男同学之间去，由于每两个男同学之间可以插入一个女同学，且队伍的两端也可以各插入一个女同学，共有七个位置供女同学插入，插入方法有 $P_7^3 = 210$ 种.

由乘法原理，总的排列方法共有 151200 种.

【点评】 本问题是元素相邻与相间问题.“相邻”可以把要求相邻的诸元素看作一个整体与其他元素一起参与排列，这种解题手段称为“视一法”(也称团体排列法)，用“视一法”处理问题时，请注意视作一个整体的内部诸元素之间是否还要相互排列.“相间”可以把要求不相邻的诸元素插入到已经事先排列妥当的其他任意两个元素之间去. 这种解题手段称为“插空法”，用“插空法”处理问题时请注意队列的两端位置是否还可插入元素.

【能力与发展】

1. 概念辨析

【例 8】 (1) 将三封不同的信投入 4 个不同的邮箱，共有________种不同的投法；

(2) 书架上原来有 5 本不同的书排成一列，现在要求在不改变原有书的相对位置的条件下再新放入 3

本不同的书，共有________种不同的放法.

学生小明的解答为：(1)$3^4=81$ (2)$P_6^3=120$

请判断上述解法是否正确?若不正确，请予以指正.

【辨析与解】 小明对(1)(2)的解法都是错误的.

(1)的解法没有抓住完成该事件是使3封信投完，而不是每个信箱都投入三封信.正确解法是分三步完成：第一步投入第一封信，共有4个信箱；第二步投入第二封信，还有4个信箱；第三步投入第三封信，仍然有4个信箱.由乘法原理，投妥三封信的方法共有$4\times4\times4=64$(种).

(2)的解法是错误地认为在原有两本书的间隙中至多只能插入一本新书，任意两本新放入的新书都不能相邻.实际上，两本或三本新放入的新书是可以相邻的.正确的解法还是抓住放入新书的三步：第一步，放入第一本书时，原有排成一列的5本书相互之间共有六个间隙，放入新书则有6种方法；第二步，放入第二本书时，原有排成一列的书变成了6本，相互之间共有七个间隙，放入新书则有7种方法；第三步，放入第三本书时，原有排成一列的书变成了7本，相互之间共有八个间隙，放入新书则有8种方法.由乘法原理，放妥三本书的方法共有$6\times7\times8=336$(种).

2.探究拓展：有重复元素的排列问题

我们前面研究了从n个不同的元素中取出m个不同元素的排列，待选的n个元素和已经选出的m个元素都是不同的，在排列过程中元素不能重复.即在不同的"位置"上的元素不能相同.这里再介绍两种元素可以重复排列的问题.

(1)从n个不同的元素中，每次取出k个元素，元素允许重复出现，按照一定的顺序排成一列，称为从n个不同的元素中每次取出k个元素，且允许重复的排列.

这里的k个元素，实际上是排列过程的k个位置.n个不同的待选元素，每个元素最多能被选排k次.

由乘法原理，该排列公式为$V(n,k)=n^k$.

(2)在n个元素中，有n_1个元素相同，又有n_2个元素相同，再有n_3个元素相同，…，一直到另有n_k个元素相同，并且$n_1+n_2+n_3+\cdots+n_k=n$.这n个元素的全排列称为不尽相同的n个元素的全排列.其排列数记为$X(n_1,n_2,n_3,\cdots,n_k)$.

如果将这几个元素看作是都不相同的元素，则它的排列数为$n!$；如果将n_1个元素看作是都不相同的元素，则它的排列数为$n_1!$；如果将n_2个元素看作是都不相同的元素，则它的排列数为$n_2!$；…；如果将n_k个元素看作是都不相同的元素，则它的排列数为$n_k!$.由乘法原理和乘法逆运算为除法的意义可知：$X(n_1,n_2,n_3,\cdots,n_k)=\dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!\cdot\cdots\cdot n_k!}$.

【例9】 在一幢二十层高的大厦的电梯内，保安人员从摄像头中发现有3名形迹可疑的人，他们在第一层至第十五层都没有走出电梯.在电梯将要经过后面的五层楼面时，摄像镜头发生故障，保安人员无法监视他们的行为.问这3名可疑人走出电梯的方法有多少种?

【解题策略】 注意到每层楼面可以下来一个人，两个人或者三个人，因此是一个重复排列问题，宜直接用乘法原理解决.

【解】 第一步：第一个人走出电梯进入楼面的方式有5种，因为他可以在十五层以上的任何一层走出电梯.

第二步：第二个人走出电梯进入楼面的方式还有5种，因为两个人可以进入同一层楼面.

第三步：第三个人走出电梯进入楼面的方式仍然有5种，因为两个人或者三个人可以进入同一层楼面.

由乘法原理，这三个可疑人走出电梯的方式共有$5\times5\times5=125$种.

【点评】 (1)允许元素重复的排列直接用乘法原理分步考察比用所谓的公式好.用计数公式$V(n,k)=n^k$难以分清楚n与k的实际意义.本题是典型的"轻结论，重过程"的数学问题；

(2)解决本题的关键是抓住完成该事件是3个可疑人都走出电梯，分三步考察.如果考察每层楼面走入几个人，问题将复杂得多，读者不妨一试.

答案：$P_5^3+3P_5^2+P_5^1=125$.

【例 10】 求$(x+y+z)^7$展开式里含$x^3y^2z^2$项的系数.

【解题策略】 关注$x^3y^2z^2$项是如何形成的.$(x+y+z)^7$展开式是分别在七个括号内任取一个字母作积并合并同类项后得到展开后的多项式.

【解】 $(x+y+z)^7=(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)\cdots(x+y+z)$共七个.展开后的项的一般形式为$x^ky^nz^m$(其中$k+n+m=7$,$k$,$n$,$m$都为自然数).

因为在第一个括号内取x,第二个括号内取y,第三个括号内取x,第四个括号内取z,第五个括号内取x,第六个括号内取z,第七个括号内取y,对应的项为$xyxzxzy=x^3y^2z^2$;反之,项$yxxyxzz$对应的项为第一个括号内取y,第二个括号内取x,第三个括号内取x,第四个括号内取y,第五个括号内取x,第六个括号内取z,第七个括号内取z,这七个数相乘.因此项$x^3y^2z^2$可以看作3个x,2个y,2个z这七个元素的任一个排列.由于$x^3y^2z^2$项的系数是$(x+y+z)^7$展开后的多项式合并同类项后而得到,所以$x^3y^2z^2$项的系数应该是这七个不尽相同元素全排列的个数.故$x^3y^2z^2$项的系数为$X(3,2,2)=\frac{7!}{3!\times2!\times2!}=210$.

【点评】 (1)$(x+y+z)^7$展开后各项形如$x^ky^nz^m$(其中$k+n+m=7$,k、n、m都为自然数).把$x^3y^2z^2$看作是3个x,2个y,2个z这七个字母的一个不尽相同的全排列,是解决本问题的关键,体现了等价转化的思想;(2)进一步思考可知:$(a+b)^n$展开后,项a^kb^{n-k}的系数为$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$;$(a+b+c)^n$展开后,项$a^kb^mc^{n-k-m}$的系数为$\frac{n!}{k!\cdot m!\cdot(n-k-m)!}$.读者可类比得出$(a+b+c+d)^n$展开后项$a^kb^ic^jd^{n-k-i-j}$的系数.

【例 11】 某市有7条纵街和5条横街(如图1—8).举行全市中学生运动会时,运动员要将市吉祥物从西南角A点处送到东北角B点处,路程最短时共有几种走法?

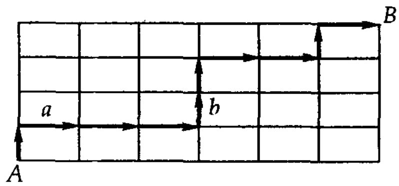

图 1—8

【解题策略】 从A处到B处,路程最短时必须走过4条纵街和6条横街,走法的不同只是纵街和横街的先后排列次序不同而已,是一个不尽相同的10个元素全排列问题.

【解】 设运动员走过横街用a表示,走过纵街用b表示.路程最短时运动员必须且只需走过6条横街和4条纵街,每一种走法对应于6个a和4个b的一个全排列.

于是运动员不同走法的种数就是这10个不尽相同元素全排列的个数,共有$\frac{10!}{6!\times4!}=210$种走法.

【点评】 (1)路程最短时运动员必须走过6条横街和4条纵街,这是解决本问题的关键;

(2)走法的不同就是6条横街和4条纵街先后走的次序不同,发现这一规律则为解决问题找到了方法;

(3)每一种走法对应于6个相同的a和4个相同的b的一个全排列,这是一种等价转化的思想,即把“走法”问题转化成构造排列的问题.

训　练　篇

周二基础练——排列与乘法原理

一、选择题

1. 七名运动员参加 3 项比赛，则这七名运动员获得这 3 项冠军的不同方法种数为　（　）

A. P_7^3　　B. 3^7　　C. 7×3　　D. 7^3

2. 已知集合 A 含有 5 个元素，集合 B 含有 7 个元素，集合 $C=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$，则集合 C 的元素的个数为　（　）

A. 12　　B. P_{12}^2　　C. 7×5　　D. P_7^5

3. $n(n-1)(n-2)\cdots9\times8\times7$ 可以表示为　（　）

A. P_n^7　　B. P_n^{n-1}　　C. $n!-7!$　　D. P_n^{n-6}

4. 两排座位，第一排有 4 个座位，第二排也有 4 个座位，若 8 名同学入座，则坐法种数是　（　）

A. $P_4^4P_4^4$　　B. P_8^8　　C. $2P_4^4P_4^4$　　D. $2P_8^4P_4^4$

5. 用 0，1，2，3，4，5 这六个数字，可以组成无重复数字的五位数的个数为　（　）

A. $P_5^1P_5^4$　　B. P_6^5　　C. P_5^5　　D. $P_4^1P_5^4$

6. 七人站两排照相，前排 3 人，后排 4 人，若甲不能站前排且乙不能站后排，则站法种数有　（　）

A. 1200 种　　B. 1440 种　　C. 3600 种　　D. 5040 种

二、填空题

7. 书架上层有 5 本不同的数学书，下层有 4 本不同的语文书，若任取数学书和语文书各一本，共有不同的取法为__________种.（结果用数值表示）

8. 在一张节目单中，原有 6 个节目已排好顺序，现要求插入三个节目进去，若原来的 6 个节目的相对前后次序不变，则共有__________种安排节目的方法.

9. 设 $x=1+2!+3!+4!+\cdots+100!$，则 x 的个位数字是__________.

10. 有 3 名男同学和 4 名女同学排成一行，其中女同学既不站在最左边，也不站在最右边，其排法种数为__________.（结果用数值表示）

11. 由 1，2，3，4，5，6，7 共七个数字组成有重复数字的四位数，其中偶数共有__________个.（结果用数值表示）

12. a,b,c,d 排成一行，其中 a 不排在第一位，b 不排在第二位，c 不排在第三位，d 不排在第四位，则不同的排法共有__________种.（结果用数值表示）

三、解答题

13. 解方程：$P_{2x+1}^4=140P_x^3$.

14. 所有无重复数字的四位数中，千位上的数字比个位上的数字大 2 的四位数共有多少个？

15. 学校星期二的课程表中，上午安排有四节课，下午安排也有四节课. 如果有物理、数学、语文、英语、体育、历史、化学和地理共八门功课要安排，由于教师要外出参加教研活动，要求下午不能安排数学和化学，并且体育课只能安排在下午最后两节. 以利于学生的个人生理卫生. 试问课程表不同的排课方法共有多少种？

16. 用 1，2，3，4，5，6，7，9 共八个数组成没有重复数字的八位数，如果要求偶数数字相邻，共有几个不同的八位数？如果要求偶数数字不相邻，共有几个不同的八位数？

周四专题练

（一）限元排列与限位排列、相邻问题与相间问题

1. 从 1，2，3，4，5，6，7，9 中任取 4 个数字，组成无重复数字的四位偶数有__________个.

2. 由 1，2，3，4，5 组成比 40000 小的无重复数字的五位数有__________个.

3. 由 1，2，3，4，5，6，7，8，9 组成比 40000 小的无重复数字的五位数中，如果任意相邻两个数位上的数字之和为奇数，则这样的五位数字共有__________个.

4. 从张、周、何、谢、李、赵六名短跑运动员中选出 4 人参加 4×100 米接力赛，如果张、周两人由于起跑速度比较慢而都不能跑第一棒，那么不同的参赛方案共有（　　）

A. 180 种　　B. 240 种　　C. 300 种　　D. 360 种

5. 三个人坐一排有 8 个位置的座位，如果每个人的左、右两边都留有空座位，则不同的坐法总数有（　　）

A. 56 种　　B. 18 种　　C. 20 种　　D. 24 种

6. 有三张卡片的正反面分别写着 1 和 2，3 和 4，5 和 6，如果用它们并排组成三位数，而且 6 还可以当 9 用，那么可以组成多少个不同的三位数？

7. 有十名同学组成一个小型旅游团队去“东方绿洲”旅游，由于其中的三名同学在组团时迟报名，没有购买到进入公园的电子门票智能卡，后来在学校帮助下购得一张可重复使用的优惠卡供这三名“无卡”学生使用，但优惠卡在刷卡时不能连刷，以免计费错误. 试确定这十名同学在排队经过刷卡机时的不同排法共有多少种？