



全国硕士研究生入学考试

真题

详解与样题精选

(数学四)

汪志宏 编著



清华大学出版社

全国硕士研究生入学考试
真题详解与样题精选
(数学四)

汪志宏 编著



清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书参照教育部最新制定的全国硕士研究生入学考试大纲(数学四)编写而成。本书对近 16 年来全国硕士研究生入学考试(数学四)的真题进行了深入的分析，然后将真题按章节分类编排，并按考试大纲的要求逐考点地对真题进行详细的分析，对相关知识点进行详尽的介绍。通过对真题的分类、分析和相关考点的理论链接，使考生能够熟悉全国硕士研究生入学考试(数学四)的内容，并抓住考试的重点与难点，掌握考试中经常出现的题型和每种题型的解法，熟悉专家们的出题思路、命题规律，从而提高应试复习的效率和命中率。另外，本书还提供了 10 套样卷。样卷的命题形式、考点分布、难易程度等均与等级考试的真实试卷相当，便于考生考前实战冲刺，体验真实训练。

本书特别适合参加全国硕士研究生入学考试(数学四)的考生作考前复习，也可作为大专院校理工科师生数学的教学辅导和参考用书。

版权所有，翻印必究。举报电话：010-62782989 13501256678 13801310933

本书封面贴有清华大学出版社激光防伪标签，无标签者不得销售。

本书防伪标签采用特殊防伪技术，可通过在图案表面涂抹清水，图案消失，水干后图案复现；或将表面膜揭下，放在白纸上用彩笔涂抹，图案在白纸上再现的方法识别真伪。

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学考试真题详解与样题精选(数学四)/汪志宏编著. —北京：清华大学出版社，2006.5

ISBN 7-302-12902-9

I. 全… II. 汪… III. 高等数学—研究生—入学考试—解题 IV. G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 037461 号

出版者：清华大学出版社 地址：北京清华大学学研大厦

http://www.tup.com.cn 邮 编：100084

社 总 机：010-62770175 客户服务：010-62776969

组稿编辑：章忆文

文稿编辑：张彦青

排版人员：李 欣

印刷者：北京嘉实印刷有限公司

装 订 者：三河市新茂装订有限公司

发 行 者：新华书店总店北京发行所

开 本：185×260 印张：19.5 字数：464 千字

版 次：2006 年 5 月第 1 版 2006 年 5 月第 1 次印刷

书 号：ISBN 7-302-12902-9/0 · 529

印 数：1 ~ 4000

定 价：28.00 元

前　　言

全国硕士研究生入学考试数学试题是广大工作在第一线的数学教师和命题组专家教授集体智慧的结晶。它不仅展示了全国硕士研究生入学考试数学课程考试的全貌，也直接反映了命题的指导思想、命题规律和命题趋势。发现规律、把握试题特点、考试重点难点及命题规律，可方便读者明确复习方向，避免浪费宝贵的时间，大大有利和方便读者复习迎考。针对这样的需要，我们参照教育部最新制定的全国硕士研究生入学考试大纲(数学四)，结合在工科数学考研辅导和工科数学教学学习中遇到的实际情况，编写了这本参考书。

本书紧密围绕帮助考生复习迎考这一中心任务，对近 16 年来的考研试题(数学四)按考点进行全面的分类，重点讲述和分析试题的解题方法及技巧，以培养考生的解题能力；对各考点进行了理论链接，直观展现了考点所涉及的知识点，归纳了所考考点及知识点中的重点难点和典型题的解法，并指出解题中易出现的错误，所以该书特别适合于备考全国硕士研究生入学考试的读者需要。

本书展现出历年试题全貌、内容叙述清楚易懂，此外还有以下特色：

1. 注重解题思路及技巧的培养。本书中对考研试题解题思路及技巧进行了重点分析，还对每一考点每类题型进行了理论链接，注意知识点的精确表述和一题多解、举一反三，有利于备考人员扩大知识面，更全面地掌握所学知识；着力培养备考人员的数学思维，提高解决问题的能力。

2. 所列考点全面，注意前后考点知识点的连贯性。这样，有利于备考人员对以往所学知识的巩固，克服了某些参考书前后知识脱节的缺点，有助于备考人员形成严密的知识体系；同时也讲解了以往容易混淆和忽略的知识点。

3. 着眼于备考人员的实际需要，10 套精选样卷均给出详细的解答，方便备考人员更快地更好地发现和解决自己学习及解题中遇到的问题。

4. 通过“真题→精解→知识点→样卷练习”这一过程的学习和训练，使备考人员更快更好地掌握全国硕士研究生入学考试数学试题的命题重点和规律，快速提高备考人员的应试解题能力。

本书由全国硕士研究生入学考试命题研究组(数学四)专项组主编，汪志宏、田玉敏、李业联、石雪梅、田俊峰执笔编写，汪志宏统稿汇总而成，何光明负责本书的策划与整体框架设计。另外，潘保国、王家杰、胡贵安、彭宜青、李文军、姜海波、李文涛、杨明、杨萍、赵传申、王国全、陈智等同志参与了资料整理工作，并提出了很多宝贵意见，谨在此一并表示感谢。

由于水平有限，书中难免出现疏漏及不妥之处，敬请读者及数学界同仁批评指正。

编著



读者回执卡

欢迎您立即填写回函

您好！感谢您购买本书，请您抽出宝贵的时间填写这份回执卡，并将此页剪下寄回我公司读者服务部。我们会在以后的工作中充分考虑您的意见和建议，并将您的信息加入公司的客户档案中，以便向您提供全程的一体化服务。您享有的权益：

- ★ 免费获得我公司的新书资料；
- ★ 寻求解答阅读中遇到的问题；

- ★ 免费参加我公司组织的技术交流会及讲座；
- ★ 可参加不定期的促销活动，免费获取赠品；

读者基本资料

姓 名 _____ 性 别 男 女 年 龄 _____
 电 话 _____ 职 业 _____ 文化程度 _____
 E-mail _____ 邮 编 _____
 通讯地址 _____

请在您认可处打√（6至10题可多选）

1. 您购买的图书名称是什么：_____
2. 您在何处购买的此书：_____
3. 您对电脑的掌握程度： 不懂 基本掌握 熟练应用 精通某一领域
4. 您学习此书的主要目的是： 工作需要 个人爱好 专业水平
5. 您希望通过学习达到何种程度： 基本掌握 熟练应用 办公软件
6. 您想学习的其他电脑知识有： 电脑入门 操作系统 网页设计
7. 影响您购买图书的因素： 编程知识 图像设计 出版机构
8. 您比较喜欢哪些形式的学习方式： 书名 作者 图书定价
9. 您可以接受的图书的价格是： 内容简介 网络宣传 多媒体设计
10. 您从何处获知本公司产品信息： 封面、插图及版式 知名作家（学者）的推荐或书评
11. 您对本书的满意度： 看图书 上网学习 用教学光盘
12. 您对我们的建议： 20元以内 30元以内 50元以内
13. 您对我们的建议： 报纸、杂志 广播、电视 同事或朋友推荐
14. 您对我们的建议： 很满意 较满意 一般
15. 您对我们的建议： 网站 书店宣传 印刷、装帧质量
16. 您对我们的建议： 其他 参加培训班 100元以内
17. 您对我们的建议： 不满意的 其他

←
请剪下本页填写清楚，放入信封寄回，谢谢！

1 0 0 0 8 4

北京100084—157信箱

读者服务部

收

邮政编码：□ □ □ □ □ □

贴
票
处

目 录

第1章 函数 极限与连续	1
考点1 复合函数 ★★★	1
考点2 极限四则运算法则 ★★★★★	1
考点3 两个基本重要极限 ★★★★★★	4
考点4 夹逼定理 ★★★	7
考点5 无穷小的阶 ★★★★★	8
考点6 间断点类型 ★★★★★	10
考点7 闭区间上连续函数的性质 ★★★★★	12
第2章 导数与微分	14
考点1 导数的定义 ★★★★★★	14
考点2 导数的几何意义 ★★★★★★	16
考点3 复合函数的求导 ★★★★★★	18
考点4 隐函数求导数 ★★★★★	21
考点5 导数的极限与函数极限关系 ★★★	21
考点6 一元函数的微分 ★★★	22
第3章 导数的应用	23
考点1 导数在经济中的应用 ★★★★★★	23
考点2 极值、最值与曲线的凹凸性和拐点 ★★★★★★	28
考点3 不等式的证明 ★★★★★★	32
考点4 方程的根 ★★★★★	35
考点5 洛必达法则 ★★★★★★	36
考点6 微分中值定理 ★★★★★★	38
考点7 渐近线及函数作图 ★★★★★★	41
第4章 不定积分	44
考点1 一般函数的不定积分 ★★★★★★	44
考点2 含有待求函数的不定积分 ★★★★★★	47
第5章 定积分及其应用	49
考点1 变上限积分 ★★★★★★	49
考点2 定积分计算 ★★★★★★	54
考点3 广义积分 ★★★★★★	58
考点4 定积分应用 ★★★★★★	61

考点 5 定积分性质及积分中值定理 ★★★★★	66
第 6 章 常微分方程	70
考点 1 一阶微分方程 ★★★★	70
考点 2 线性微分方程解的结构 ★★★	72
第 7 章 多元函数微分学	73
考点 1 简单显函数微分法 ★★★★★	73
考点 2 复合函数微分法 ★★★★★	76
考点 3 多元隐函数微分法 ★★★★★	79
考点 4 多元函数最值及其应用 ★★★★★	82
第 8 章 二重积分	89
考点 1 二重积分的概念与性质 ★★★	89
考点 2 二重积分计算 ★★★★★	90
第 9 章 行列式	98
考点 1 行列式的性质	98
考点 2 降阶法计算行列式	99
考点 3 三对角线型行列式的计算	100
考点 4 各行(列)元素和相等行列式的计算	102
考点 5 余子式或代数余子式	103
第 10 章 矩阵	105
考点 1 方阵的行列式	105
考点 2 矩阵运算	108
考点 3 逆矩阵	109
考点 4 矩阵方程	116
考点 5 矩阵的秩	120
考点 6 分块矩阵	121
第 11 章 向量组	125
考点 1 向量的线性表示	125
考点 2 线性相关与线性无关	127
考点 3 已知向量组相关性求未知参数	130
考点 4 极大无关组与秩	131
考点 5 等价向量组	133
第 12 章 线性方程组	135
考点 1 求线性方程组中的参数	135
考点 2 判断线性方程组解的存在性	136
考点 3 线性方程组解的结构	137

考点 4 带参数线性方程组的求解	138
考点 5 同解方程组	144
第 13 章 矩阵的特征值和特征向量	148
考点 1 特征值和特征向量	148
考点 2 求矩阵或特征向量中的参数	150
考点 3 相似矩阵的概念、性质及计算	152
第 14 章 随机事件和概率	162
考点 1 事件的关系和运算 ★★★★	162
考点 2 概率的性质 ★★★★	163
考点 3 古典概率和几何概率 ★★★	165
考点 4 条件概率、乘法公式、全概率公式及贝叶斯公式 ★★★★★	166
考点 5 事件的独立性 ★★★★★	168
考点 6 独立重复试验 ★★★	170
第 15 章 一维随机变量及其分布	172
考点 1 一维随机变量 ★★★	172
考点 2 一维随机变量函数的分布 ★★★★	173
考点 3 常见分布计算概率 ★★★★★	176
考点 4 分布函数的性质及计算 ★★★★★	180
第 16 章 多维随机变量及其分布	185
考点 1 多维离散型随机变量及其边缘分布、随机变量相互独立性 ★★★★★	185
考点 2 多维连续型随机变量及其边缘分布、随机变量相互独立性 ★★★★	188
考点 3 多维随机变量函数的分布 ★★★★	190
第 17 章 随机变量的数字特征	195
考点 1 期望、方差、标准差的计算和性质 ★★★★★	195
考点 2 一维随机变量的函数的期望和方差 ★★★★★	198
考点 3 多维随机变量函数的期望和方差 ★★★★	202
考点 4 矩、协方差、相关系数的计算和性质和不相关性 ★★★★★	204
第 18 章 大数定律与中心极限定理	213
考点 1 契比雪夫不等式、大数定律 ★★★	213
考点 2 中心极限定理 ★★★★	213
附录 1 全国硕士研究生入学统一考试(数学四)样卷	217
附录 2 全国硕士研究生入学统一考试(数学四)样卷参考解答	245
参考文献	302

第1章 函数 极限与连续

考点1 复合函数 ★★★

考点点拨 考查复合函数的求法. 利用复合函数的性质, 采用代入法或分析法解题. 求复合函数值域及定义域.

【试题1】(1992年, 3分)已知 $f(x)=\sin x$, $f[\varphi(x)]=1-x^2$, 则 $\varphi(x)=$ _____ 的定义域为 _____.

分析 已知 $f(x)$, 求 $f[\varphi(x)]$ 就是将 $\varphi(x)$ 直接代换 $f(x)$ 里的 x , 即运用代入法. 然后根据等式推出结果.

解答 由于 $f(x)=\sin x$, 所以 $f[\varphi(x)]=\sin \varphi(x)=1-x^2$, 则 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$, 此时应有 $-1 \leq 1-x^2 \leq 1$, 则 $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

所以填 $\arcsin(1-x^2)$, $\{x | -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$.

理论链接 求复合函数的一般方法: 在利用函数有界性、单调性、周期性、奇偶性等性质的同时, 对于初等函数与初等函数的复合, 可采用代入法, 如试题1; 对于初等函数与分段函数或分段函数之间的复合, 可采用分析法.

如 $f(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$, 求 $f[f(x)]$. 当 $x>0$ 时, $f(x)=1>0$, 所以此时 $f[f(x)]=1$; 当 $x<0$ 时, $f(x)=0$, 所以此时 $f[f(x)]=0$. 故 $f[f(x)]=f(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$

注意: g 与 f 构成复合函数 $f \circ g$ 的条件是函数 g 在 D 上的值域 $g(D)$ 必须含在 f 的定义域 D_f 内, 即 $g(D) \subset D_f$. 否则, 不能构成复合函数.

考点2 极限四则运算法则 ★★★★★

考点点拨 考查数列和函数极限的求法. 结合数列前 n 项求和公式等常用公式, 将数列或函数通过适当变形, 使得数列或函数满足四则运算法则的条件然后计算.

【试题2】(1990年, 3分)极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) =$ _____.

分析 已知极限是 $\infty - \infty$ 型, 不能直接利用极限四则运算法则. 将数列一般项上下同时乘以 $\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}$, 即可将数列一般项变成适当形式.

解答

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}})(\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}} + \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \frac{4}{2} = 2.\end{aligned}$$

【试题 3】(1993 年, 3 分) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{1+2+\dots+n} - \sqrt{1+2+\dots+(n-1)}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

分析 先求和, 再类似上题进行计算.

$$\begin{aligned}\text{解答 } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{1+2+\dots+n} - \sqrt{1+2+\dots+(n-1)}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2n}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

【试题 4】(1999 年, 3 分) 设函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$), 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln[f(1)f(2)\cdots f(n)] = \underline{\hspace{2cm}}.$$

分析 先求和, 再计算.

$$\begin{aligned}\text{解答 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln[f(1)f(2)\cdots f(n)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (\ln a + 2\ln a + \cdots + n\ln a) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} \ln a = \frac{\ln a}{2}.\end{aligned}$$

【试题 5】(2006 年, 4 分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = \underline{\hspace{2cm}}.$

分析 利用“数列 $\{x_n\}$ 的奇数项子列和其偶数项子列收敛于同一值, 则数列 $\{x_n\}$ 的极限就是该值”结论计算.

$$\text{解答 } \lim_{2m \rightarrow \infty} \left(\frac{2m+1}{2m} \right)^{(-1)^{2m}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2m+1}{2m} = 1,$$

$$\lim_{2m+1 \rightarrow \infty} \left(\frac{2m+1+1}{2m+1} \right)^{(-1)^{2m+1}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{2m+1+1}{2m+1} \right)^{-1} = \frac{1}{1} = 1$$

又由于数列 $\{x_n\}$ 的奇数项子列和其偶数项子列收敛于同一值, 则数列 $\{x_n\}$ 的极限就是该值, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = 1$.

理论链接

1. 收敛数列的运算法则:

设有数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, 那么

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = A \pm B;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = A \cdot B;$$

$$(3) \text{当 } y_n \neq 0 (n=1,2,\dots) \text{ 且 } B \neq 0 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}.$$

2. 函数极限四则运算法则:

设 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 则

$$(1) \lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$$

$$(2) \lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$$

$$(3) \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}, (B \neq 0)$$

3. 必须牢牢记住运算法则的前提条件是已知的数列极限存在: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$,

或函数的极限存在: $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 并且分母不为零.

4. 实际往往是将极限四则运算法则同洛必达法则求极限、化成定积分求极限、夹逼定理等混合运用.

【试题 6】(1990 年, 3 分) 设函数 $f(x) = x \tan x e^{\sin x}$, 则 $f(x)$ 是

- (A) 偶函数 (B) 无界函数 (C) 周期函数 (D) 单调函数

()

分析 由于 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$, 而 x , $e^{\sin x}$ 当 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时极限都存在, 可直接判断.

解答 因为 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{x \tan x e^{\sin x}} = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x \tan x e^{\sin x} = +\infty$, 所以函数 $f(x)$ 是无界函数,

选(B).

理论链接 函数的四大特性是函数的四个基本属性, 必须对此非常熟悉. 这部分内容实际是解决函数许多问题的基础.

1. 函数的有界性

如果存在正数 M , 使对任一 $x \in X$, 有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 其图形特点是, 函数 $y = f(x)$ 的图形在直线 $y = -M$ 和 $y = M$ 之间. 如果这样的 M 不存在, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界. 函数 $f(x)$ 无界, 就是说对任何 M , 总存在 $x_1 \in X$, 使 $|f(x_1)| > M$.

注意: 必须说明函数 $f(x)$ “在数集 X 上”是有界还是无界; 若单纯说函数有界或无界, 则指的是函数在它的定义域内有界还是无界. 如试题 5 函数 $f(x) = x \tan x e^{\sin x}$ 在其定义域 $\left\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right\}$ 无界.

2. 函数的单调性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当

$x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调递增的. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调递减的.

单调递增和单调递减的函数统称为单调函数.

函数单调性还可利用导数判断, 详见第三章的考点 3.

3. 函数的奇偶性

(1) 定义: 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x \in D$, 则 $-x \in D$). 如果对于任一 $x \in D$, 有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数; 如果对于任一 $x \in D$, 有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.

(2) 非奇非偶函数就是既不是奇函数又不是偶函数. 证明的方法有多种, 如证明函数不是定义在对称区间上、取特殊值法、反证法等.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D . 如果存在一个正数 l , 使得对于任意 $x \in D$ 有 $(x \pm l) \in D$, 且 $f(x+l) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, l 称为 $f(x)$ 的周期. 一般直接利用定义证明某一函数是否是周期函数.

考点 3 两个基本重要极限 ★★★★★

考点点拨 考查两个重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 或 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 及其简单变形, 在变形过程中应注意四则运算法则的条件.

【试题 7】(2004 年, 4 分) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

分析 本题属于已知极限求参数的反问题. 先由已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot (\cos x - b) = 0$ 确定 a , 再确定 b .

解答 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot (\cos x - b) = 0$, 所以

$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - a) = 0$, 得 $a = 1$. 极限化为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} (\cos x - b) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1} (\cos x - b)$$

而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 令 $u = e^x - 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = \ln \left[\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} \right] = 1$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} (\cos x - b) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 \times 1 \times (\cos x - b) = 1 - b = 5$

因此 $a=1$, $b=-4$.

【试题 8】(2006 年, 12 分) 设 $f(x, y) = \frac{y}{1+xy} - \frac{1-y \sin \frac{\pi x}{y}}{\arctan x}$, $x > 0$, $y > 0$. 求:

$$(1) g(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y) \quad (2) \lim_{y \rightarrow 0^+} g(x)$$

分析 (1)求 $g(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y)$ 是将 x 看作常数而对 y 求极限. (2)直接利用洛必达法则和等价无穷小量代换求 $\lim_{y \rightarrow 0^+} g(x)$.

解答

$$(1) g(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{y} + x} - \left(\frac{\sin \frac{\pi x}{y}}{\arctan x} \right)$$

$$\text{而 } \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{y} + x} = \frac{1}{x}, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{\pi x}{y}}{\frac{\pi x}{y}} = 1, \quad \text{所以 } g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1 - \pi x}{\arctan x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1 - \pi x}{\arctan x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x - x + \pi x^2}{x \arctan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x - x + \pi x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1 + 2x\pi}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x + 2\pi(1+x^2)}{2(1+x^2)} = \pi$$

理论链接

1. 两个重要极限在使用时可以变形, 如

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1, \quad \text{当 } \varphi(x) \rightarrow 0 \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1.$$

2. 试题 7 也可采用等价无穷小量计算, 简化运算, 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (cos x - b) = 5, \quad \text{且 } \lim_{x \rightarrow 0} \sin x (cos x - b) = 0, \quad \text{所以}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - a) = 0, \quad \text{得 } a = 1. \quad \text{原极限化为}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} (cos x - b) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} (cos x - b) = 1 - b = 5, \quad \text{得 } b = -4.$$

3. 一般地, 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, 若 $g(x) \rightarrow 0$, 则 $f(x) \rightarrow 0$; 若 $f(x) \rightarrow 0$, 且 $A \neq 0$,

则 $g(x) \rightarrow 0$.

【试题 9】若 $a > 0$, $b > 0$ 均为常数, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{3}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

分析 极限是 1^∞ 形式, 所以要用特殊极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 的转化形式来求解.

解答 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{a^x + b^x - 2}{2} \right)^{\frac{2}{a^x + b^x - 2}} \right]^{\frac{3(a^x + b^x - 2)}{2x}},$ 而
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(a^x + b^x - 2)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(a^x \ln a + b^x \ln b)}{2} = \frac{3}{2} \ln(ab),$ 所以
 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{3}{x}} = e^{\frac{3}{2} \ln(ab)} = (ab)^{\frac{3}{2}}.$

【试题 10】(2002 年, 3 分) 设常数 $a \neq \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)} \right]^n = \underline{\hspace{2cm}}$.

分析 此极限是 1^∞ 形式, 所以要用特殊极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ 的转化形式来求解.

解答 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)} \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \ln \left[1 + \frac{1}{n(1-2a)} \right]^{n(1-2a)} \right\}^{\frac{n}{n(1-2a)}}.$
而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(1-2a)} = \frac{1}{1-2a},$ 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)} \right]^n = \frac{1}{1-2a}.$

【试题 11】(2003 年, 4 分) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \ln(1+x)]^{\frac{2}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

分析 极限是 1^∞ 形式, 所以要用特殊极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 的转化形式来求解.

解答 $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \ln(1+x)]^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{2 \ln[1 + \ln(1+x)]}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln[1 + \ln(1+x)]}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1+x)}{x}} = e^2.$

理论链接

1. 常用公式有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$

当 $\varphi(x) \rightarrow \infty$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\varphi(x)} \right)^{\varphi(x)} = e;$ 当 $\varphi(x) \rightarrow 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \varphi(x) \right)^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e$ 等.

还可导出以下结论: 若 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$ 时, 有 $\lim_{x \rightarrow 0} [(1+x)^{\frac{1}{x}}]^{f(x)} = e^A;$

若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 时, 有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right]^{f(x)} = e^A.$

2. 更一般地, 对于 1^∞ 型未定式的极限 $\lim f(x)^{g(x)}$, 也可直接利用公式

$\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim(f(x)-1)g(x)}$ 进行计算, 因此试题 9 也可这样求解:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \ln(1+x)]^{\frac{2}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1+x)}{x}} = e^2.$$

另外, 求 1^∞ 型未定式的极限还可利用洛必达法则求解, 试题 11 还可这样求解:

令 $y = [1 + \ln(1+x)]^x$, 则 $\ln y = \frac{2+2\ln(1+x)}{x}$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+2\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{1} = 2, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow 0} [1 + \ln(1+x)]^x = e^2.$$

【试题 12】(1991 年, 3 分) 下列各式中正确的是

(A) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1$ (B) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

(C) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = -e$ (D) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x} = e$

()

分析 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 不是 1^∞ 型未定式的极限, 而是 ∞^0 型未定式的极限, 所以不能用重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 来计算.

解答 令 $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, 则 $\ln y = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+u)}{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{1+u} = 0,$$

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0, \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1, \text{ 故选(A).}$$

考点 4 夹逼定理 ★★★

考点点拨 考查利用夹逼定理求数列或函数的极限.

【试题 13】(2000 年, 3 分) 设对任意的 x , 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

- (A) 存在且一定等于零 (B) 存在但不一定等于零
 (C) 一定不存在 (D) 不一定存在

()

分析 利用举例排除法求解.

解答 设 $\varphi(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $f(x) = 1$, $g(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 但 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, 所以排除(A), (C).

设 $\varphi(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 但 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = +\infty$, 所以排除(B), 故应选(D).

理论链接

- 数列极限的夹逼定理: 设有数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 满足 $y_n \leq x_n \leq z_n$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 以 a 为极限, 记作: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.
- 函数极限的夹逼定理: 在同一极限过程中, 函数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 满足 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ 且有 $\lim g(x) = A$, $\lim h(x) = A$, 则 $\lim f(x)$ 存在, 且 $\lim f(x) = A$.
- 注意由 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ 推不出夹逼定理的条件: $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$ 均存在且 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$, 如试题 13.

考点 5 无穷小的阶 ★★★★

考点点拨 考查高阶无穷小量、同阶无穷小量、等价无穷小量, 重点考查等价无穷小量在求极限中的应用.

【试题 14】(1992 年, 3 分)当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列四个无穷小量中, 比其他三个更高阶的无穷小量是

- (A) x^2 (B) $1 - \cos x$ (C) $\sqrt{1-x^2} - 1$ (D) $x - \sin x$

()

分析 直接利用高阶无穷小量、同阶无穷小量和等价无穷小量的定义进行判断.

解答 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2} = 0$, 所以 $x - \sin x$ 是 x^2 的高阶无穷小. 而 $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $\sqrt{1-x^2} - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$, 所以 $x - \sin x$ 是比其他三个更高阶的无穷小量, 其余三个是同阶无穷小量, 所以选(D).

【试题 15】(2005 年, 4 分)极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2 + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

分析 直接利用无穷小量的等价代换公式进行计算即可.

解答 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{2x}{x^2 + 1} = 2$.

理论链接

1. 高阶无穷小

- 定义: 如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 就说 β 是比 α 高阶的无穷小, 记为 $\beta = o(\alpha)$;
- 举例说明: 若 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$.

2. 同阶无穷小

(1) 定义: 如果 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 就说 β 与 α 是同阶无穷小;

(2) 举例说明: 若 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = A \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$.

3. 等价无穷小

(1) 定义: 如果 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 就说 β 与 α 是等价无穷小, 记为 $\alpha \sim \beta$.

(2) 等价代换定理: 设 $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ 是同一极限过程中的无穷小, 且满足 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 及 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha'}{\beta'} = 1$ 存在或为无穷大, 则: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha'}{\beta'}$.

也有: 若在某变化过程中, $\alpha(x) \sim \bar{\alpha}(x)$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)\bar{\alpha}(x)$.

(3) 等价无穷小量在极限运算中占有重要地位, 常见的等价无穷小量有: 当 $x \rightarrow 0$ 时,
 $\sin x \sim x, \tan x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, \sqrt[3]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n},$
 $\ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x$ 等.

常见的等价无穷小量可以推广为: 如当 $\varphi(x) \rightarrow 0$ 时, 有 $\sin \varphi(x) \sim \varphi(x)$,

$$\sqrt[3]{1+\varphi(x)} - 1 \sim \frac{\varphi(x)}{n}, \quad 1 - \cos \varphi(x) \sim \frac{\varphi^2(x)}{2}, \quad \ln(1+\varphi(x)) \sim \varphi(x) \text{ 等.}$$

(4) 关于无穷小的等价代换定理应注意的问题

① 在求无穷小的商的极限时, 可将分子、分母通过等价代换, 将函数化简后再求极限;

② 等价代换可以只对分子或分母进行, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha'}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha'}{\beta'}$, 也可以只对部分乘积因子进行; 但对于加、减中的每一项不能分别作代换. 如 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$.

【试题 16】(1991 年, 3 分) 设数列 $x_n = \begin{cases} \frac{n^2 + \sqrt{n}}{n} & \text{若 } n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{n} & \text{若 } n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, x_n 是

- (A) 无穷大量 (B) 无穷小量 (C) 有界变量 (D) 无界变量

()

分析 利用极限的定义来判断.

解答 当 n 为奇数时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sqrt{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \frac{1}{\sqrt{n}}}{1} = +\infty$; 当 n 为偶数时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. 所以当 $n \rightarrow \infty$ 时, x_n 是无界变量, 故应选(D).

【试题 17】(2006 年, 12 分) 确定常数 A, B, C 之值, 使 $e^x(1+Bx+Cx^2) = 1+Ax+o(x^3)$, 其中 $o(x^3)$ 为 $x \rightarrow 0$ 时 x^3 的高阶无穷小.

分析 利用泰勒公式及无穷小量的计算解题.