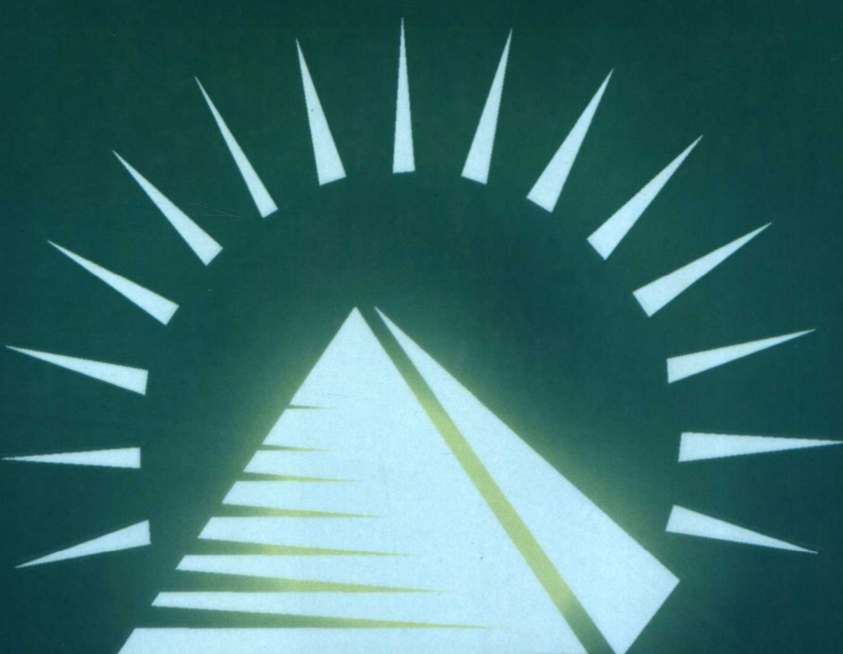
考试通

全国硕士研究生入学考试

真题

详解与样题精选

(数学四)



汪志宏　编著

清华大学出版社

全国硕士研究生入学考试
真题详解与样题精选
(数学四)

汪志宏　编著

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书参照教育部最新制定的全国硕士研究生入学考试大纲(数学四)编写而成。本书对近 16 年来全国硕士研究生入学考试(数学四)的真题进行了深入的分析，然后将真题按章节分类编排，并按考试大纲的要求逐考点地对真题进行详细的分析，对相关知识点进行详尽的介绍。通过对真题的分类、分析和相关考点的理论链接，使考生能够熟悉全国硕士研究生入学考试(数学四)的内容，并抓住考试的重点与难点，掌握考试中经常出现的题型和每种题型的解法，熟悉专家们的出题思路、命题规律，从而提高应试复习的效率和命中率。另外，本书还提供了 10 套样卷。样卷的命题形式、考点分布、难易程度等均与等级考试的真实试卷相当，便于考生考前实战冲刺，体验真实训练。

本书特别适合参加全国硕士研究生入学考试(数学四)的考生作考前复习，也可作为大专院校理工科师生数学的教学辅导和参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学考试真题详解与样题精选(数学四)/汪志宏编著. —北京：清华大学出版社，2006.5
ISBN 7-302-12902-9

Ⅰ. 全…　Ⅱ. 汪…　Ⅲ. 高等数学—研究生—入学考试—解题　Ⅳ. G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 037461 号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969
组稿编辑：章忆文
文稿编辑：张彦青
排版人员：李　欣
印 刷 者：北京嘉实印刷有限公司
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　本：185×260　**印张**：19.5　**字数**：464 千字
版　次：2006 年 5 月第 1 版　2006 年 5 月第1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-12902-9/O · 529
印　数：1～4000
定　价：28.00 元

前　言

全国硕士研究生入学考试数学试题是广大工作在第一线的数学教师和命题组专家教授集体智慧的结晶。它不仅展示了全国硕士研究生入学考试数学课程考试的全貌，也直接反映了命题的指导思想、命题规律和命题趋势。发现规律、把握试题特点、考试重点难点及命题规律，可方便读者明确复习方向，避免浪费宝贵的时间，大大有利和方便读者复习迎考。针对这样的需要，我们参照教育部最新制定的全国硕士研究生入学考试大纲(数学四)，结合在工科数学考研辅导和工科数学教学学习中遇到的实际情况，编写了这本参考书。

本书紧密围绕帮助考生复习迎考这一中心任务，对近16年来的考研试题(数学四)按考点进行全面的分类，重点讲述和分析试题的解题方法及技巧，以培养考生的解题能力；对各考点进行了理论链接，直观展现了考点所涉及的知识点，归纳了所考考点及知识点中的重点难点和典型题的解法，并指出解题中易出现的错误，所以该书特别适合于备考全国硕士研究生入学考试的读者需要。

本书展现出历年试题全貌、内容叙述清楚易懂，此外还有以下特色：

1．注重解题思路及技巧的培养。本书中对考研试题解题思路及技巧进行了重点分析，还对每一考点每类题型进行了理论链接，注意知识点的精确表述和一题多解、举一反三，有利于备考人员扩大知识面，更全面地掌握所学知识；着力培养备考人员的数学思维，提高解决问题的能力。

2．所列考点全面，注意前后考点知识点的连贯性。这样，有利于备考人员对以往所学知识的巩固，克服了某些参考书前后知识脱节的缺点，有助于备考人员形成严密的知识体系；同时也讲解了以往容易混淆和忽略的知识点。

3．着眼于备考人员的实际需要，10套精选样卷均给出详细的解答，方便备考人员更快地更好地发现和解决自己学习及解题中遇到的问题。

4．通过“真题→精解→知识点→样卷练习”这一过程的学习和训练，使备考人员更快更好地掌握全国硕士研究生入学考试数学试题的命题重点和规律，快速提高备考人员的应试解题能力。

本书由全国硕士研究生入学考试命题研究组(数学四)专项组主编，汪志宏、田玉敏、李业联、石雪梅、田俊峰执笔编写，汪志宏统稿汇总而成，何光明负责本书的策划与整体框架设计。另外，潘保国、王家杰、胡贵安、彭宜青、李文军、姜海波、李文涛、杨明、杨萍、赵传申、王国全、陈智等同志参与了资料整理工作，并提出了很多宝贵意见，谨在此一并表示感谢。

由于水平有限，书中难免出现疏漏及不妥之处，敬请读者及数学界同仁批评指正。

编著

读者回执卡

欢迎您立即填妥回函

您好！感谢您购买本书，请您抽出宝贵的时间填写这份回执卡，并将此页剪下寄回我公司读者服务部。我们会在以后的工作中充分考虑您的意见和建议，并将您的信息加入公司的客户档案中，以便向您提供全程的一体化服务。您享有的权益：

★ 免费获得我公司的新书资料；
★ 寻求解答阅读中遇到的问题；
★ 免费参加我公司组织的技术交流会及讲座；
★ 可参加不定期的促销活动，免费获取赠品；

读者基本资料

姓　　名＿＿＿＿＿＿＿＿ 性　　别□男　□女 年　　龄＿＿＿＿＿＿
电　　话＿＿＿＿＿＿＿＿ 职　　业＿＿＿＿＿＿ 文化程度＿＿＿＿＿＿
E-mail＿＿＿＿＿＿＿＿ 邮　　编＿＿＿＿＿＿
通讯地址＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

请在您认可处打✓（6至10题可多选）

1、您购买的图书名称是什么：＿＿＿＿＿＿＿＿

2、您在何处购买的此书：＿＿＿＿＿＿＿＿

3、您对电脑的掌握程度：□不懂　□基本掌握　□熟练应用　□精通某一领域

4、您学习此书的主要目的是：□工作需要　□个人爱好　□获得证书

5、您希望通过学习达到何种程度：□基本掌握　□熟练应用　□专业水平

6、您想学习的其他电脑知识有：□电脑入门　□操作系统　□办公软件　□多媒体设计　□编程知识　□图像设计　□网页设计　□互联网知识

7、影响您购买图书的因素：□书名　□作者　□出版机构　□印刷、装帧质量　□内容简介　□网络宣传　□图书定价　□书店宣传　□封面，插图及版式　□知名作家（学者）的推荐或书评　□其他

8、您比较喜欢哪些形式的学习方式：□看图书　□上网学习　□用教学光盘　□参加培训班

9、您可以接受的图书的价格是：□ 20 元以内　□ 30 元以内　□ 50 元以内　□ 100 元以内

10、您从何处获知本公司产品信息：□报纸、杂志　□广播、电视　□同事或朋友推荐　□网站

11、您对本书的满意度：□很满意　□较满意　□一般　□不满意

12、您对我们的建议：＿＿＿＿＿＿＿＿

请剪下本页填写清楚，放入信封寄回，谢谢！

1 0 0 0 8 4

贴邮票处

北京100084—157信箱

读者服务部　　收

邮政编码：□□□□□□

目　　录

第 1 章　函数　极限与连续

考点 1　复合函数　★★★

考点点拨　考查复合函数的求法.利用复合函数的性质，采用代入法或分析法解题. 求复合函数值域及定义域.

【试题 1】(1992 年，3 分)已知 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)=$_______的定义域为_______.

分析　已知 $f(x)$，求 $f[\varphi(x)]$ 就是将 $\varphi(x)$ 直接代换 $f(x)$ 里的 x，即运用代入法. 然后根据等式推出结果.

解答　由于 $f(x)=\sin x$，所以 $f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)=1-x^2$，则 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$，此时应有 $-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$，则 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

所以填 $\arcsin(1-x^2)$，$\{x|-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\}$.

理论链接　求复合函数的一般方法：在利用函数有界性、单调性、周期性、奇偶性等性质的同时，对于初等函数与初等函数的复合，可采用代入法，如试题 1；对于初等函数与分段函数或分段函数之间的复合，可采用分析法.

如 $f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$，求 $f[f(x)]$. 当 $x>0$ 时，$f(x)=1>0$，所以此时 $f[f(x)]=1$；当 $x<0$ 时，$f(x)=0$，所以此时 $f[f(x)]=0$. 故 $f[f(x)]=f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$

注意：g 与 f 构成复合函数 $f\cdot g$ 的条件是函数 g 在 D 上的值域 $g(D)$必须含在 f 的定义域 D_f内，即 $g(D)\subset D_f$.否则，不能构成复合函数.

考点 2　极限四则运算法则　★★★★★

考点点拨　考查数列和函数极限的求法. 结合数列前 n 项求和公式等常用公式，将数列或函数通过适当变形，使得数列或函数满足四则运算法则的条件然后计算.

【试题 2】(1990 年，3 分)极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$_______.

分析　已知极限是 $\infty-\infty$ 型，不能直接利用极限四则运算法则. 将数列一般项上下同时乘以 $\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}$，即可将数列一般项变成适当形式.

解答

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}=\frac{4}{2}=2.$$

【试题 3】(1993 年，3 分) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right)=$_______.

分析　先求和，再类似上题进行计算.

解答　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【试题 4】(1999 年，3 分)设函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq1)$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=$_______.

分析　先求和，再计算.

解答　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\ln a+2\ln a+\cdots+n\ln a)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}\ln a=\frac{\ln a}{2}.$$

【试题 5】(2006 年，4 分) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$_________.

分析　利用“数列$\{x_n\}$的奇数项子列和其偶数项子列收敛于同一值，则数列$\{x_n\}$的极限就是该值”结论计算.

解答　$\lim\limits_{2m\to\infty}\left(\frac{2m+1}{2m}\right)^{(-1)^{2m}}=\lim\limits_{m\to\infty}\frac{2m+1}{2m}=1$，

$$\lim_{2m+1\to\infty}\left(\frac{2m+1+1}{2m+1}\right)^{(-1)^{2m+1}}=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{2m+1+1}{2m+1}\right)^{-1}=\frac{1}{1}=1$$

又由于数列$\{x_n\}$的奇数项子列和其偶数项子列收敛于同一值，则数列$\{x_n\}$的极限就是该值，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=1$.

理论链接

1. 收敛数列的运算法则：

设有数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，那么

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=A\pm B$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=A\cdot B$；

(3) 当$y_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$且$B\neq 0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{A}{B}$.

2. 函数极限四则运算法则：

设$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$，$(B\neq 0)$

3. 必须牢牢记住运算法则的前提条件是已知的数列极限存在：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，或函数的极限存在：$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，并且分母不为零.

4. 实际往往是将极限四则运算法则同洛必达法则求极限、化成定积分求极限、夹逼定理等混合运用.

【试题 6】(1990 年，3 分)设函数$f(x)=x\tan xe^{\sin x}$，则$f(x)$是

(A) 偶函数　(B) 无界函数　(C) 周期函数　(D) 单调函数

( )

分析　由于$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=+\infty$，而$x$，$e^{\sin x}$当$x\to\dfrac{\pi}{2}$时极限都存在，可直接判断.

解答　因为$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{x\tan xe^{\sin x}}=0$，所以$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}x\tan xe^{\sin x}=+\infty$，所以函数$f(x)$是无界函数，选(B).

理论链接　函数的四大特性是函数的四个基本属性，必须对此非常熟悉. 这部分内容实际是解决函数许多问题的基础.

1. 函数的有界性

如果存在正数M，使对任一$x\in X$，有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数$f(x)$在X上有界. 其图形特点是，函数$y=f(x)$的图形在直线$y=-M$和$y=M$的之间. 如果这样的M不存在，则称函数$f(x)$在X上无界. 函数$f(x)$无界，就是说对任何M，总存在$x_1\in X$，使$|f(x)|>M$.

注意：必须说明函数$f(x)$“在数集X上”是有界还是无界；若单纯说函数有界或无界，则指的是函数在它的定义域内有界还是无界. 如试题 5 函数$f(x)=x\tan xe^{\sin x}$在其定义域$\left\{x\,|\,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}$无界.

2. 函数的单调性

设函数$y=f(x)$的定义域为D，区间$I\subset D$. 如果对于区间I上任意两点x_1及x_2，当

$x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调递增的. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调递减的.

单调递增和单调递减的函数统称为单调函数.

函数单调性还可利用导数判断，详见第三章的考点3.

3. 函数的奇偶性

(1) 定义：设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$，则 $-x\in D$). 如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

(2) 非奇非偶函数就是既不是奇函数又不是偶函数. 证明的方法有多种，如证明函数不是定义在对称区间上、取特殊值法、反证法等.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个正数 l，使得对于任意 $x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期. 一般直接利用定义证明某一函数是否是周期函数.

考点3　两个基本重要极限　★★★★★

考点点拨　考查两个重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 及其简单变形，在变形过程中应注意四则运算法则的条件.

【试题7】(2004年，4分)若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$______，$b=$______.

分析　本题属于已知极限求参数的反问题. 先由已知 $\lim\limits_{x\to0}\sin x\cdot(\cos x-b)=0$ 确定 a，再确定 b.

解答　因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x-a}(\cos x-b)=5$，且 $\lim\limits_{x\to0}\sin x\cdot(\cos x-b)=0$，所以

$\lim\limits_{x\to0}(\mathrm{e}^x-a)=0$，得 $a=1$. 极限化为

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\mathrm{e}^x-1}(\cos x-b)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}(\cos x-b)$$

而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，令 $u=\mathrm{e}^x-1$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}=\lim\limits_{u\to0}\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}=\ln\left[\lim\limits_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]=1$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x-1}(\cos x-b)=\lim\limits_{x\to0}1\times1\times(\cos x-b)=1-b=5$

因此 $a=1$，$b=-4$.

【试题8】(2006年，12分)设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\arctan x}$，$x>0$，$y>0$. 求：

(1) $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$ (2) $\lim\limits_{y\to0^+}g(x)$

分析 (1)求 $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$ 是将 x 看作常数而对 y 求极限. (2)直接利用洛必达法则和等价无穷小量代换求 $\lim\limits_{y\to0^+}g(x)$.

解答

$$(1)\quad g(x)=\lim_{y\to+\infty}f(x,y)=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{y}+x}-\left(\frac{1-\dfrac{\sin\frac{\pi x}{y}}{\frac{\pi x}{y}}\cdot\pi x}{\arctan x}\right)$$

而 $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{y}+x}=\dfrac{1}{x}$，$\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi x}{y}}{\frac{\pi x}{y}}=1$，所以 $g(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1-\pi x}{\arctan x}$

$$(2)\quad \lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x\arctan x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1+2x\pi}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{-x+2\pi(1+x^2)}{2(1+x^2)}=\pi$$

理论链接

1. 两个重要极限在使用时可以变形，如

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\arcsin x}=1$，当 $\varphi(x)\to0$ 时，$\lim\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$.

2. 试题 7 也可采用等价无穷小量计算，简化运算，由于

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，且 $\lim\limits_{x\to0}\sin x(\cos x-b)=0$，所以

$\lim\limits_{x\to0}(e^x-a)=0$，得 $a=1$. 原极限化为

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^x-1}(\cos x-b)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x}(\cos x-b)=1-b=5$，得 $b=-4$.

3. 一般地，已知 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$，若 $g(x)\to0$，则 $f(x)\to0$；若 $f(x)\to0$，且 $A\neq0$，则 $g(x)\to0$.

【试题 9】 若 $a>0$，$b>0$ 均为常数，则 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=$ ______.

分析 极限是1^∞形式，所以要用特殊极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$的转化形式来求解.

解答 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{a^x+b^x-2}{2}\right)^{\frac{2}{a^x+b^2-2}}\right]^{\frac{3(a^x+b^x-2)}{2x}}$，而

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3(a^x+b^x-2)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3(a^x\ln a+b^x\ln b)}{2}=\dfrac{3}{2}\ln(ab)$，所以

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\ln(ab)}=(ab)^{\frac{3}{2}}$.

【试题 10】(2002年，3分)设常数$a\neq\dfrac{1}{2}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$________.

分析 此极限是1^∞形式，所以要用特殊极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$的转化形式来求解.

解答 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\ln\left[1+\dfrac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)}\right\}^{\frac{n}{n(1-2a)}}$.

而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n(1-2a)}=\dfrac{1}{1-2a}$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\dfrac{1}{1-2a}$.

【试题 11】(2003年，4分)极限$\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=$________.

分析 极限是1^∞形式，所以要用特殊极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$的转化形式来求解.

解答 $\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{2}{x}\ln[1+\ln(1+x)]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln[1+\ln(1+x)]}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)}{x}}=\mathrm{e}^2$.

理论链接

1. 常用公式有$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，

当$\varphi(x)\to\infty$时，$\lim\left(1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$；$\varphi(x)\to 0$时，$\lim(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$等.

还可导出以下结论：若$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=A$时，有$\lim\limits_{x\to 0}[(1+x)^{\frac{1}{x}}]^{f(x)}=\mathrm{e}^A$；

若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$时，有$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^{f(x)}=\mathrm{e}^A$.

2. 更一般地，对于1^∞型未定式的极限$\lim f(x)^{g(x)}$，也可直接利用公式

$\lim f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{\lim(f(x)-1)g(x)}$进行计算，因此试题9也可这样求解：

$\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}\cdot\ln(1+x)}=\mathrm{e}^2$.

另外，求1^∞型未定式的极限还可利用洛必达法则求解，试题11还可这样求解：

令 $y=1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}$，则 $\ln y=\dfrac{2+2\ln(1+x)}{x}$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{2+2\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{1+x}}{1}=2，则\lim_{x\to0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=e^2 .$$

【试题 12】(1991 年，3 分)下列各式中正确的是

(A) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$　　(B) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=-e$　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=e$

(　)

分析　$\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 不是 1^∞ 型未定式的极限，而是 ∞^0 型未定式的极限，所以不能用重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 来计算.

解答　令 $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$，则 $\ln y=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

而 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{1+u}=0$，

即 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$，故选(A).

考点 4　夹逼定理　★★★

考点点拨　考查利用夹逼定理求数列或函数的极限.

【试题 13】(2000 年，3 分)设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$

(A) 存在且一定等于零　　(B) 存在但不一定等于零

(C) 一定不存在　　(D) 不一定存在

(　)

分析　利用举例排除法求解.

解答　设 $\varphi(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$，$f(x)=1$，$g(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，但 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$，所以排除(A)，(C).

设 $\varphi(x)=x^2-\dfrac{1}{x^2}$， $f(x)=x^2$， $g(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，但 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2=+\infty$，所以排除(B)，故应选(D).

理论链接

1. 数列极限的夹逼定理：设有数列 $\{x_n\}$， $\{y_n\}$， $\{z_n\}$ 满足 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$， $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，以 a 为极限，记作： $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

2. 函数极限的夹逼定理：在同一极限过程中，函数 $f(x)$， $g(x)$， $h(x)$ 满足 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ 且有 $\lim g(x)=A$， $\lim h(x)=A$，则 $\lim f(x)$ 存在，且 $\lim f(x)=A$.

3. 注意由 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$ 推不出夹逼定理的条件： $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$、 $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$ 均存在且 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$，如试题 13.

考点 5 无穷小的阶 ★★★★

考点点拨 考查高阶无穷小量、同阶无穷小量、等价无穷小量，重点考查等价无穷小量在求极限中的应用.

【试题 14】(1992 年，3 分)当 $x\to 0$ 时，下列四个无穷小量中，比其他三个更高阶的无穷小量是

(A) x^2 (B) $1-\cos x$ (C) $\sqrt{1-x^2}-1$ (D) $x-\sin x$

( )

分析 直接利用高阶无穷小量、同阶无穷小量和等价无穷小量的定义进行判断.

解答 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2}=0$，所以 $x-\sin x$ 是 x^2 的高阶无穷小. 而 $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$， $\sqrt{1-x^2}-1\sim-\dfrac{x^2}{2}$，所以 $x-\sin x$ 是比其他三个更高阶的无穷小量，其余三个是同阶无穷小量，所以选(D).

【试题 15】(2005 年，4 分)极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$ ______.

分析 直接利用无穷小量的等价代换公式进行计算即可.

解答 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}x\dfrac{2x}{x^2+1}=2.$

理论链接

1. 高阶无穷小

(1) 定义：如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，就说 β 是比 α 高阶的无穷小，记为 $\beta=o(\alpha)$；

(2) 举例说明：若 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x-3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=0$.

2. 同阶无穷小

(1) 定义：如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，就说 β 与 α 是同阶无穷小；

(2) 举例说明：若 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=A\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=0$.

3. 等价无穷小

(1) 定义：如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，就说 β 与 α 是等价无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$.

(2) 等价代换定理：设 α，α'，β，β' 是同一极限过程中的无穷小，且满足 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，及 $\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在或为无穷大，则：$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$.

也有：若在某变化过程下，$\alpha(x)\sim\bar{\alpha}(x)$，则 $\lim f(x)\alpha(x)=\lim f(x)\bar{\alpha}(x)$.

(3) 等价无穷小量在极限运算中占有重要地位，常见的等价无穷小量有：当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$ 等.

常见的等价无穷小量可以推广为：如当 $\varphi(x)\to 0$ 时，有 $\sin\varphi(x)\sim\varphi(x)$，$\sqrt[n]{1+\varphi(x)}-1\sim\frac{\varphi(x)}{n}$，$1-\cos\varphi(x)\sim\frac{\varphi^2(x)}{2}$，$\ln(1+\varphi(x))\sim\varphi(x)$ 等.

(4) 关于无穷小的等价代换定理应注意的问题

① 在求无穷小的商的极限时，可将分子、分母通过等价代换，将函数化简后再求极限；

② 等价代换可以只对分子或分母进行，即 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\beta'}$，也可以只对部分乘积因子进行；但对于加、减中的每一项不能分别作代换. 如 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}\neq\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$.

【试题 16】(1991 年，3 分)设数列 $x_n=\begin{cases}\frac{n^2+\sqrt{n}}{n} & 若n为奇数\\ \frac{1}{n} & 若n为偶数\end{cases}$，则当 $n\to\infty$ 时，x_n 是

(A) 无穷大量　(B) 无穷小量　(C) 有界变量　(D) 无界变量

(　)

分析　利用极限的定义来判断.

解答　当 n 为奇数时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+\sqrt{n}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1}=+\infty$；当 n 为偶数时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. 所以当 $n\to\infty$ 时，x_n 是无界变量，故应选(D).

【试题 17】(2006 年，12 分)确定常数 A，B，C 之值，使 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$，其中 $o(x^3)$ 为 $x\to 0$ 时 x^3 的高阶无穷小.

分析　利用泰勒公式及无穷小量的计算解题.