中学数学复习题解

福建人民教育出版社

中学数学复习题解
上　册
福建教育学院编
*
福建人民教育出版社出版
福建省新华书店发行
福建新华印刷厂印刷
787×1092　1/32　12印张　269千字
1980年4月第一版　1980年4月第一次印刷
印数 1—250,300
书号：7159·532　定价 0.91 元

说　明

为了帮助高中毕业班数学教师掌握我组编写的1980年高中毕业生《数学总复习纲要》中各部分练习题，以减轻备课负担，提高复习课质量；并帮助中学生和知识青年在复习中独立检查自己掌握数学基础知识情况，我们特编写这本《中学数学复习题解》（上、下册）。

本书各部分练习题的解答详略不一。为了节省篇幅，有些练习题仅仅提出解题（或证题）的思路和方向；有的解题步骤是不完整的；有的也未给出最后结果；有的仅写出答案。不言而喻，本书提供的解法并不都是最简的和最好的，解题的格式也不规范，这些解答，只供复习课选题和学生练习的参考。在复习题和总复习题中，有些题目的难度较大，仅供解题能力较好的学生选做。

限于我们的水平，本书必定还存在缺点和差错。希望使用本书的教师和同学及时提出意见，以便修改、补充。

[redacted]教育学院数学组

一九七九年十二月

目　　录

上　　册

下　　册

代 数 部 分

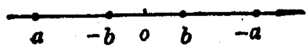
练 习 1·1

1．指出下列各数哪些是自然数、整数、有理数、无理数、实数、虚数？并将实数按从小到大的顺序排列起来：

$0,\ -1,\ 7\frac{1}{3},\ 0.3,\ \sqrt{-5},\ \pi,\ 4.52,\ 9,\ \sqrt[3]{-18}$。

2．写出绝对值不大于7，而又不小于5的所有整数，并把它们在数轴上表示出来。〔$-7,\ -6,\ -5,\ 5,\ 6,\ 7$〕

3．实数a、b在数轴上的对应点如图所示：（图中o为原点）



（1）在数轴上表示出$-a$和$-b$；

（2）决定下列式子的值是正的还是负的：

①$a-b$，　②$a+b$，　③$|a|-|b|$；

（3）化简$|a+b|+|b-a|+|a|+|b|$。

解　（1）如图；

（2）①负值，②负值，③正值；

（3）原式$=-(a+b)+(b-a)-a+b=b-3a$。

4．下列结论是否正确？在什么条件下正确？

（1）两个数中，绝对值较大的数大；

（2）$-a$是负的；　（3）a大于$-a$。

解　（1）不正确，当一个数是零，另一个数是正数，或者两个都是正数时，结论才正确；

(2) 不正确，当$a>0$时，结论才正确；

(3) 不正确，当$a>0$时，结论才正确。

5．a是实数，$|a|+a$的值能不能是负数？为什么？

$|a|-a$呢？又$a^2>0$吗？$a^2>a$吗？ $a>\frac{1}{a}$吗？

$a^2+1>1$吗？$2-a>1-a$吗？

解 $\because a$是实数，$\therefore |a|+a\geqslant 0$，$|a|-a\geqslant 0$，

故$|a|+a$和$|a|-a$都不能是负数；

$a^2>0$，$a^2>a$， $a>\frac{1}{a}$，$a^2+1>1$ 都不一定成立；

而$2-a>1-a$成立。

6．x为何值时，$\frac{|x|}{x}$的值是1？是-1？没有意义？

〔$x>0$，$x<0$，$x=0$〕

7．已知$|a|=2$，$|b|=5$，求$a+b$的值。

解 当$a=2$，$b=5$时，$a+b=7$；

当$a=2$，$b=-5$时，$a+b=-3$；

当$a=-2$，$b=5$时，$a+b=3$；

当$a=-2$，$b=-5$时，$a+b=-7$。

8．求下列方程在（1）自然数范围内的解；（2）整数范围内的解；（3）有理数范围内的解：

(1) $x^2-4=0$； 〔2；2，-2；2，-2〕

(2) $2x^2-x-15=0$。 〔3；3；3，$-\frac{5}{2}$〕

9．在（1）自然数范围内；（2）整数范围内，哪些数能满足下列关系：

(1) $-2<x<3$； 〔1，2；-1，0，1，2〕

(2) $|x-2|=3$。 〔5；-1，5〕

10. 若a和b是任意两个整数时，那么在什么数的范围内，下列方程一定可解：

(1) $x+a=b$；　　　　(2) $x-a=b$；

(3) $ax=b$；　　　　(4) $\frac{x}{a}=b$。

〔(1)、(2)、(4) 在整数范围；(3) 在有理数范围〕

11. 若a和b是任意两个有理数，方程$ax^2=b$是否在实数范围一定可解？在复数范围内呢？

解　不一定，若a和b是异号的两个有理数，则$ax^2=b$在实数范围内无解，而在复数范围内，方程$ax^2=b$一定可解。

12. 两个有理数（或无理数）的和、差、积、商（除数不为零）仍是有理数（或无理数）吗？

解　设两个有理数为$\frac{m}{n}$(m、n为互质的整数，且$n\neq0$)及$\frac{p}{q}$（p、q为互质的整数，且$q\neq0$），则

$$\frac{m}{n}\pm\frac{p}{q}=\frac{mq\pm np}{nq}\text{仍是有理数；}$$

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq}\text{仍是有理数；}$$

$$\frac{m}{n}\div\frac{p}{q}=\frac{mq}{np}\text{仍是有理数。}$$

而两个无理数的和、差、积、商（除数不为零）不一定仍是无理数，特殊情况是有理数。如：

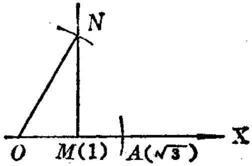
$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$，$(1+\sqrt{2})-(\sqrt{2}-1)=2$，

$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$，$3\sqrt{2}\div\sqrt{2}=3$。

13. 用几何方法在数轴上作出表示$\sqrt{3}$的点，并用代数

方法证明$\sqrt{3}$是无理数。

作图 过数轴上单位点M，作MN垂直于数轴，以原点O为心，2为半径画弧交MN于N；以O为心，MN为半径画弧交数轴于A，则A即表示$\sqrt{3}$的点；



证明 （反证法）假设$\sqrt{3}$是有理数，则

$$\sqrt{3}=\frac{p}{q}\text{（}p\text{、}q\text{为互质的正整数），}$$

$\therefore\quad 3=\dfrac{p^2}{q^2}$，$p^2=3q^2$。由此可知$p^2$能被3整除，$p$也能被3整除，设$p=3k$，则

$(3k)^2=3q^2$，$q^2=3k^2$，从而可知q^2能被3整除，q也能被3整除。

这样p与q含有公约数3，这与p、q互质的假设相矛盾。所以$\sqrt{3}$不是有理数，而是无理数。

14.（1）如果一个数的相反数比它大，这个数应该是什么样的数？比它小呢？与它相等呢？

（2）如果一个数的倒数比它大，这个数应该是什么样的数？比它小呢？与它相等？无意义呢？

〔（1）小于零；大于零；等于零，（2）大于0且小于1或小于-1；大于-1且小于0或大于1；±1；等于0〕

15.（1）有没有一个数的平方反而比这个数小？什么样的数有这种性质？

（2）有没有一个数的算术平方根反而比这个数大？什么样的数有这种性质？

〔（1）、（2）都是大于0且小于1的数〕

16. 求下列各组数的最大公约数和最小公倍数：

(1) 42，63，105； 〔21，630〕

(2) 40，64，112，88. 〔8，24640〕

17. 两个互质数的最小公倍数是648，如果这两个数都是合数，求这两个数.

解 根据互质的几个数之积就是它们的最小公倍数。因 $648=2^3\times3^4$，而8和81互质，且都是合数，故所求的两个数是8和81.

18. 计算：

(1) $3\frac{1}{7}\times\left(3\frac{1}{7}-7\frac{1}{3}\right)\times\frac{7}{22}\div1\frac{1}{21}$；

〔-4〕

(2) $1\frac{3}{5}\div\left(-\frac{4}{5}\right)^2-\left[(5\sqrt{12}-12\sqrt{3})\div\sqrt{6}+\left|\frac{2}{3}-\sqrt{2}\right|\right]$；

〔$3\frac{1}{6}$〕

(3) $\left(-3\frac{1}{3}\right)+\left(-5\frac{1}{2}\right)\div1\frac{2}{9}-\left(-5\frac{1}{3}\right)\times\frac{9}{16}$；

〔$-4\frac{5}{6}$〕

(4) $\left(-1\frac{2}{7}\right)\times\frac{5}{7}\div\left(-\frac{3}{4}\right)\times(-2.5)\div(-0.25)\times\frac{2}{5}\times2\frac{1}{3}\div\left(-\frac{5}{7}\right)$；

〔-16〕

19. 用代数式表示：

（1）a的相反数与a的$\frac{1}{2}$的和； $\left[-a+\frac{a}{2}\right]$

（2）比x的3倍小1的数； 〔$3x-1$〕

（3）浓度为15%的盐水m公斤和浓度为25%的盐水n公斤混合，所得混合液的浓度是多少？$\left[\frac{15m\%+25n\%}{m+n}\right]$

（4）百位数字是a，十位数字是b，个位数字是c的三位数； 〔$100a+10b+c$〕

（5）男生a人，每10人分为一组，其中有两组各少1人；女生b人，每8人分为一组，其中有3组各多2人，男女生各有多少组？ $\left[\frac{a+2}{10},\ \frac{b-6}{8}\right]$

20．化简：

（1）$\{3x-[x-1-(2x+1)+3]-3\}+(x+1)$；

〔$5x-3$〕

（2）$3x-2\{1-3(2x-a-3)-5[a-(3x-2a)-4]\}$； 〔$24a-15x-60$〕

（3）$2x^2(-3y)+7xy(-y)-\left[\frac{1}{5}xy(-3x)+\frac{x}{3}\cdot 2y^2\right]$． $\left[-5\frac{2}{5}x^2y-7\frac{2}{3}xy^2\right]$

21．已知$a=-2.25$，$b=\sqrt{3}$，

求$5ab^2-\{2a^2b-[3ab^2-(4ab^2-2a^2b)]\}$的值。

解 $5ab^2-\{2a^2b-[3ab^2-(4ab^2-2a^2b)]\}$

$=5ab^2-ab^2=4ab^2$

$=4\times\left(-2\frac{1}{4}\right)\times(\sqrt{3})^2=-27$．

22．化简：

(1) $\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}y^3\right)\left(\frac{1}{2}y^3-\frac{2}{3}x^2\right)$;

$\left[\frac{1}{4}y^6-\frac{4}{9}x^4\right]$

(2) $(x+y-z)^2+(x-y-z)(x+y-z)$;

$[2x^2+2z^2-4xz+2xy-2yz]$

(3) $(x^2+y^2)^2(x+y)^2(y-x)^2$;

解 原式 $=[(x^2+y^2)(y^2-x^2)]^2=(y^4-x^4)^2$

$=x^8-2x^4y^4+y^8$.

(4) $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

解 原式 $=(x^3-1)(x^3+1)=x^6-1$.

23. 化简：

(1) $\left(\frac{3}{4}a^4b^7-0.5a^3b^8-\frac{1}{9}a^2b^6\right)\div\left(-\frac{1}{3}ab^3\right)^2$;

$\left[6\frac{3}{4}a^2b-4\frac{1}{2}ab^2-1\right]$

(2) $[(3x^ny^{m+1})^2\cdot(-x^ny^m)^3]^2$.

$[81x^{10n}y^{10m+4}]$

24. 在有理数范围内分解下列各多项式的因式：

(1) $m^3-3n^2+3mn-m^2n$;

$[(m-n)(m^2+3n)]$

(2) x^3+ax^2-x-a;

$[(x+a)(x+1)(x-1)]$

(3) $x^2-70y+10xy-49$;

$[(x-7)(x+10y+7)]$

(4) $7x-x^2-21y+6xy-9y^2$;

解 原式 $=7(x-3y)-x(x-3y)+3y(x-3y)$

$=(x-3y)(7-x+3y)$.

(5) $x^2-4xy+4y^2-4z^2$;

$$[(x-2y+2z)(x-2y-2z)]$$

(6) ax^3-1+x^3-a;

$$[(a+1)(x-1)(x^2+x+1)]$$

(7) $8x^3(a-b)-2x^2y(b-a)-10xy^2(a-b)$;

$$[2x(a-b)(4x+5y)(x-y)]$$

(8) $a^5-a^3-a^2+1$;

$$[(a+1)(a-1)^2(a^2+a+1)]$$

(9) $a^2+b^2-c^2-d^2-2ab+2cd$;

$$[(a-b+c-d)(a-b-c+d)]$$

(10) $(x+1)^2-9(x-1)^2$;

$$[-4(x-2)(2x-1)]$$

(11) $x^{n+5}+9x^{n+3}-162x^{n+1}$;

解 原式 $=x^{n+1}(x^4+9x^2-162)$

$=x^{n+1}(x^2-9)(x^2+18)$

$=x^{n+1}(x+3)(x-3)(x^2+18)$.

(12) $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$;

解 原式 $=b^2c+bc^2+ac^2-a^2c-ab(a+b)$

$=c^2(a+b)-c(a^2-b^2)-ab(a+b)$

$=(a+b)[c^2-c(a-b)-ab]$

$=(a+b)[c(c-a)+b(c-a)]$

$=(a+b)(c-a)(c+b)$.

(13) $6x-6y-9x^2+18xy-9y^2+3$;

解 原式 $=-3(3x^2-6xy+3y^2-2x+2y-1)$

$=-3[3(x-y)^2-2(x-y)-1]$

$=-3(3x-3y+1)(x-y-1)$.

(14) $x^2-6xy+9y^2-5x+15y+6$;

解　原式 $= (x-3y)^2 - 5(x-3y) + 6$

$= (x-3y-2)(x-3y-3)$。

(15)　$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3$；

解　原式 $= (x^2-2x)^2 - 2(x^2-2x) - 3$

$= (x^2-2x-3)(x^2-2x+1)$

$= (x-1)^2(x-3)(x+1)$。

(16)　$2x^2+5xy-3y^2-3x+5y-2$；

解法1　原式 $= 2x^2 + (5y-3)x - (3y^2-5y+2)$。

$$\because \quad x = \frac{-(5y-3) \pm \sqrt{(5y-3)^2 + 8(3y^2-5y+2)}}{4}$$

$$= \frac{(3-5y) \pm (7y-5)}{4},$$

$$x_1 = \frac{y-1}{2}, \qquad x_2 = 2-3y.$$

$\therefore \quad 2x^2+5xy-3y^2-3x+5y-2$

$= 2\left(x - \dfrac{y-1}{2}\right)(x+3y-2)$

$= (2x-y+1)(x+3y-2)$.

解法2　原式 $= (2x-y)(x+3y) - 3x + 5y - 2$

$= (2x-y+1)(x+3y-2)$.

(17)　x^4+x^2+1；

解　原式 $= (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$。

(18)　$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$。

解法1　原式 $= (b^3-3b^2c+3bc^2-c^3) + (c^3-3c^2a$

$+ 3ca^2 - a^3) + (a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$

$= 3\,[ab(b-a) + c^2(b-a)$

$+ c(a+b)(a-b)]$

$= 3(a-b)(ac+bc-ab-c^2)$

$$=3(a-b)(b-c)(c-a).$$

解法2 原式 $=(b-c)^3+(a-b)^3-[(b-c)+(a-b)]^3$

$$=-[3(b-c)^2(a-b)+3(b-c)(a-b)^2]$$

$$=3(a-b)(b-c)(c-a).$$

25. 在实数或复数范围内，把下列各多项式分解因式：

(1) $3x^2-9x+4\frac{1}{2}$;

$$\left[\frac{3}{4}(2x-3+\sqrt{3})(2x-3-\sqrt{3})\right]$$

(2) x^4-4x^2+3;

$$[(x+1)(x-1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})]$$

(3) x^3-4x^2+2x-8;

$$[(x-4)(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)]$$

(4) $x^4-\frac{1}{9}y^4$.

解 原式 $=\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)\left(x^2-\frac{y^2}{3}\right)$

$$=\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}y\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}y\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}yi\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}yi\right).$$

26. 分解因式：

(1) $(a^2-3a+2)x^2+(2a^2-4a+1)xy+(a^2-a)y^2$;

(2) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

解 (1)原式 $=(a-1)(a-2)x^2+(2a^2-4a+1)xy+a(a-1)y^2$

$$= [(a-1)x+ay][(a-2)x+(a-1)y].$$

(2)原式$=c^2(a-b)+a^2b-ca^2+b^2c-ab^2$

$$=c^2(a-b)+ab(a-b)-c(a^2-b^2)$$

$$=(a-b)(c^2+ab-ca-bc)$$

$$=(a-b)[c(c-a)-b(c-a)]$$

$$=-(a-b)(b-c)(c-a).$$

27. 证明：(1)奇数的平方必是奇数；

(2)两个连续整数的平方差是奇数；

(3)四个连续整数的积加1必是一个整数的平方.

证明 (1) 设奇数为$2n+1$（n为任意整数），

则 $(2n+1)^2=4n^2+4n+1$,

∵ $4n^2$和$4n$都是偶数，∴$(2n+1)^2$是奇数.

(2)设两个整数为n和$n+1$（n为任意整数），

则$(n+1)^2-n^2=2n+1$,

∵ $2n$是偶数，∴$(n+1)^2-n^2$是奇数.

(3)设四个连续整数为n，$n+1$，$n+2$，$n+3$（n为任意整数），

则 $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=n^4+6n^3+11n^2+6n+1$

$$=(n^2+3n+1)^2,$$

∵ n^2+3n+1 是整数，∴ 命题得证.

28. 当实数x为何值时，下列各分式有意义：

(1) $\dfrac{1}{|x|-1}$; 〔$x\neq\pm1$〕

(2) $\dfrac{3x-2}{x^2-2x+3}$;

解 ∵ $x^2-2x+3>0$,

∴ x为任何实数，原分式都有意义.

(3) $\dfrac{1}{6x^2-5x-6}$;

解 令$6x^2-5x-6=0$，解得 $x=\dfrac{3}{2}$或$x=-\dfrac{2}{3}$。

∴ 当 $x\neq\dfrac{3}{2}$或$x\neq-\dfrac{2}{3}$时，原分式有意义。

(4) $\dfrac{\lg(x+1)}{x-5}$。

解 $\begin{cases}x+1>0,\\x-5\neq0.\end{cases}$ 得$-1<x<5$ 或 $x>5$。

29. 先化简下列各式，再求它们的值：

(1) $\dfrac{b^2-1}{(1+ab)^2-(a+b)^2}$。其中$a=-25, b=1025$;

解 原式$=\dfrac{b^2-1}{(1+ab+a+b)(1+ab-a-b)}$

$$=\frac{b^2-1}{(b^2-1)(a^2-1)}=\frac{1}{a^2-1}$$

($\because$ $b^2-1\neq0$)。

∴ 原式$=\dfrac{1}{(-25)^2-1}=\dfrac{1}{624}$。

(2) $\dfrac{2}{a}\left(\dfrac{a+1}{a^3-1}-\dfrac{1}{a^2+a+1}-\dfrac{2}{1-a}\right)$

$\div\dfrac{a^3+a^2+2a}{a^3-1}$。 其中$a=-0.8$。

解 原式$=\dfrac{2}{a}\left[\dfrac{a+1-(a-1)+2(a^2+a+1)}{a^3-1}\right]$

$$\times\frac{a^3-1}{a(a^2+a+2)}=\frac{4}{a^2}=\frac{4}{(-0.8)^2}$$

$=6.25$。

30. 化简：

(1) $\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}-\dfrac{2ab}{b^2-a^2}$； $\left[\dfrac{a+b}{a-b}\right]$

(2) $\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a^2}{a^2+2ab+b^2}\right)$

$\div\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a^2}{a^2-b^2}\right)$； $\left[\dfrac{b-a}{a+b}\right]$

(3) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}$

$+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$； 〔0〕

(4) $a-a\div\left\{\dfrac{a^2-b^2}{a^3+b^3}\left[\left(a-\dfrac{a^2+b^2}{b}\right)\right.\right.$

$\left.\left.\div\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\right]\right\}$；

解 原式 $=a-a\div\left\{\dfrac{(a+b)(a-b)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}\right.$

$\left.\left[\left(\dfrac{ab-a^2-b^2}{b}\right)\times\left(\dfrac{ab}{b-a}\right)\right]\right\}$

$=a-a\div a=a-1$。

(5) $\left(2a+\dfrac{1}{a}-3\right)\cdot\dfrac{2a}{(a-1)(2a-1)}$；

解 原式 $=\dfrac{2a^2-3a+1}{a}\cdot\dfrac{2a}{(a-1)(2a-1)}=2$。

(6) $\left[\dfrac{x-1}{3x+(x-1)^2}-\dfrac{1-3x+x^2}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right]$

$\div\dfrac{x^2+1}{1-x}$；

解 原式 $=\dfrac{(x-1)^2-(1-3x+x^2)-(1+x+x^2)}{(x-1)(x^2+x+1)}$