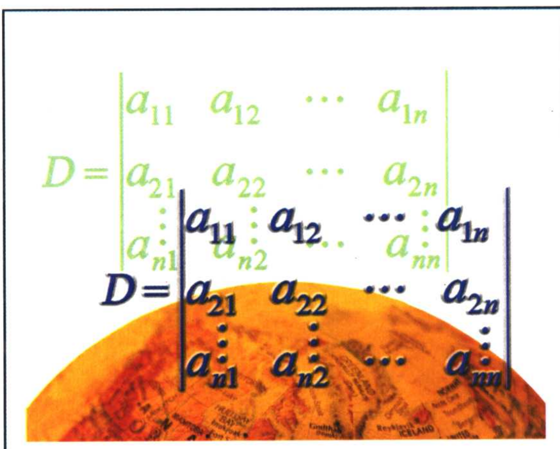
高等学校数学教材系列丛书

线性代数学习辅导



刘三阳 主编
马建荣 张鹏鸽 编著

西安电子科技大学出版社 http://www.xduph.com

高等学校数学教材系列丛书

线性代数学习辅导

刘三阳　主编

马建荣　张鹏鸽　编著

西安电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习辅导/刘三阳主编.

—西安：西安电子科技大学出版社，2005.9

(高等学校数学教材系列丛书)

ISBN 7-5606-1563-5

Ⅰ.线…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料

Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 084955 号

策　　划　夏大平

责任编辑　龙　晖　夏大平

出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)

电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　编　710071

http://www.xduph.com　　E-mail：xdupfxb@pub.xaonline.com

经　　销　新华书店

印刷单位　陕西天意印务有限责任公司

版　　次　2005 年 9 月第 1 版　2006 年 1 月第 2 次印刷

开　　本　850 毫米×1168 毫米　1/32　印张　9.625

字　　数　241 千字

印　　数　4001～8000 册

定　　价　14.00 元

ISBN 7-5606-1563-5/O·0077

XDUP　1854001-2

内 容 简 介

本书是与刘三阳、马建荣编著的教材《线性代数》(高等教育出版社 2005年出版)相配套的学习辅导与教学参考书，对于读者学习其他同类教材也同样具有参考价值和帮助作用。全书共分为七章，每章包括五个模块：要点提示、疑难解析、范例精解、习题选解和自测题及答案，书末还附有两套模拟试题及其答案。本书注重归纳总结、解难释疑、借题释理、以题示法，旨在帮助读者顺利地掌握线性代数的基本思想、基本内容和基本方法，提高实际运用能力和解题能力。

本书相对于教材有一定的独立性，可以作为理工科学生的学习辅导书，也可以作为考研学生的复习指导书和教师的教学参考书。

前　言

线性代数是理工科大学生的重要基础课，其重要作用和地位日益显现，堪与微积分媲美。然而该课程比较抽象，学起来并不容易。为了帮助学生学好这门课程，我们编写了这本《线性代数学习辅导》，作为与新出版的《线性代数》教材(刘三阳、马建荣编著，高等教育出版社 2005 年出版)相配套的学习辅导与教学参考书，旨在帮助读者理解线性代数的基本概念和基本思想，掌握线性代数的主要内容和解题方法，同时，澄清一些容易混淆和费解的问题，起到解难释疑的作用。

本书与上述《线性代数》教材相对应，共分为七章，每章包括五个模块：

一、要点提示——扼要概括本章的基本内容和基本方法。

二、疑难解析——针对本章的重点、难点和学生常犯的错误进行剖析、释疑。

三、范例精解——通过对典型例题的分析、解答和引申，介绍线性代数的解题规律、方法和技巧，借题释理，以题示法，使读者加深理解、触类旁通。

四、习题选解——挑选教材中的部分习题进行解答。

五、自测题及答案——供读者自行测试和训练。

书末另附有两套模拟试题及其答案。

本书由刘三阳教授主编，马建荣、张鹏鸽副教授参加编写。由于编者水平有限，书中缺点、错误在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2005 年 6 月

目　　录

第一章　行列式……………………………………………………… 1

第二章　线性方程组 ……………………………………………… 36

第三章　矩阵 ……………………………………………………… 61

第四章　向量空间…………………………………………………… 122

第五章　矩阵的特征值与特征向量………………………………… 185

第六章　二次型……………………………………………………… 222

第七章　线性空间与线性变换……………………………………… 255

附录………………………………………………………………… 296

模拟试题Ⅰ ……………………………………………………… 296

模拟试题Ⅰ答案…………………………………………………… 300

模拟试题Ⅱ ……………………………………………………… 304

模拟试题Ⅱ答案…………………………………………………… 306

第一章　行　列　式

行列式产生于解线性方程组，它是线性代数的一个重要组成部分，在数学和其它学科中有着广泛的应用. 要理解行列式的概念，掌握行列式的性质及行列式按行(列)展开定理. 行列式的计算是本章的重点，要能熟练运用各种方法准确迅速地计算行列式的值.

一、要点提示

1. n 阶行列式的定义： n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & n_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和，即

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中，$j_1j_2\cdots j_n$ 为自然数 1，2，…，n 的一个 n 元排列，求和符号 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 是对所有 n 元排列求和.

2. 行列式的性质：

(1) 行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等.

(2) 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

(3) 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘以此行列式，或者说，行列式的某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式外面.

(4) 若行列式中有两行(列)对应元素成比例，或有一行(列)元素全为零，则行列式的值为零.

(5) 如果行列式的某一行(列)的元素是两个数之和，那么行列式可分成两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(6) 把行列式的某一行(列)各元素乘以同一个数后加到另一行(列)的对应元素上去，行列式的值不变.

3. 行列式按行(列)展开：

(1) 行列式的值等于它的任意一行(列)的元素与其对应的代数余子式乘积之和，即按第 i 行展开：

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

或按第 j 列展开：

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

(2) 行列式中任意一行(列)的各元素与另一行(列)的对应元

素的代数余子式乘积之和为零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j)$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i\neq j)$$

(3) 拉普拉斯定理. 行列式按 k 行(列)($1<k\leqslant n-1$)展开：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=N_1A_1+N_2A_2+\cdots+N_tA_t$$

其中 $t=C_n^k$，而 $N_i(i=1, 2, \cdots, t)$ 为取定 k 行(列)所得的 k 阶子式，A_i 为 N_i 对应的代数余子式.

任意选定 n 阶行列式 D 的 k 行 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 与 k 列 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ ($1\leqslant k<n$)，位于这 k 行 k 列交叉处的 k^2 个元素构成的 k 阶行列式称为行列式 D 的一个 k 阶子式，记为 N. 划去这 k 行 k 列元素后，由剩下的元素构成的 $n-k$ 阶行列式称为这个 k 阶子式 N 的余子式，记为 M.

$$A=(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}M$$

称为这个 k 阶子式 N 的代数余子式.

4. 范德蒙(Vandermonde)行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant j>i\geqslant 1}(x_j-x_i)$$

5. 克莱姆(Cramer)法则： 含有 n 个未知量的 n 个线性方程的方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{Ⅰ}$$

当常数项 b_1，b_2，…，b_n 全为零时，称为齐次线性方程组；否则，称为非齐次线性方程组.

(1) 如果方程组(Ⅰ)的系数行列式 $D\neq 0$，则它有惟一解：

$$x_j=\frac{D_j}{D} \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

其中，$D_j(j=1, 2, \cdots, n)$是把 D 中第 j 列元素用方程组(Ⅰ)的右端常数项代替后所得的 n 阶行列式.

(2) 如果方程组(Ⅰ)无解或有两个不同的解，那么，它的系数行列式 $D=0$.

(3) 如果齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq 0$，则它只有零解；如果齐次线性方程组有非零解，那么，它的系数行列式必定等于零.

6. 一些常用的行列式：

(1) 对角行列式等于其主对角线上各元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

(注：未标明的元素均为零，下同.)

上、下三角形行列式等于其主对角线上的元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

(2) 设 $D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$，$D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$，则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & & & \\ \vdots & & \vdots & & \boldsymbol{O} & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = D_1D_2$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ & \boldsymbol{O} & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}D_1D_2$$

二、疑难解析

1. 行列式的定义除逆序法以外还有什么形式的定义?

行列式的定义除逆序法以外，还有递归定义，如清华大学出版社出版的居余马等编写的《线性代数》，就采用的是递归定义.

定义 由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$组成的 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个算式. 当 $n=1$ 时，定义 $D=a_{11}$；当 $n>2$ 时，定义

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

其中

$$A_{1j}=(-1)^{i+j}M_{1j}$$

M_{1j}是 D 去掉第 1 行第 j 列全部元素后，按原顺序排列的 $n-1$ 阶行列式.

还有公理化定义，请参见由张贤科、许甫华编著的《高等代数学》(清华大学出版社出版)等.

可以证明，这几种定义，其本质属性是一样的.

2. 计算行列式有哪些基本方法?

(1) 定义法. 二阶和三阶行列式常用定义计算. 上(下)三角形行列式、对角行列式、副对角行列式(副对角线以上或以下的元素全为 0)等都可以用定义求值. 这种方法对于一般的 $n(n>3)$ 阶行列式计算量较大，不宜采用.

(2) 利用行列式的性质简化运算. 例如，将行列式化为上(下)三角形行列式.

(3) 降阶法. 把行列式按 i 行(或 j 列)展开，为了计算简便，通常先把第 i 行(j 列)的较多元素化成零，然后再展开.

(4) 递推法. 利用行列式的性质建立递推公式，然后求解.

(5) 升降(加边)阶法.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

在“*”处加上所需要的元素，可以简化行列式的计算。注意，这里升阶是为了更快地降阶.

(6) 数学归纳法.

(7) 利用范德蒙行列式等已知行列式的结果.

(8) 利用矩阵的一些性质计算，如：

$$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$$

$$|\boldsymbol{E} \pm \boldsymbol{CD}| = |\boldsymbol{E} \pm \boldsymbol{DC}|$$

其中 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{C}$ 为 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{D}$ 为 $n \times m$ 矩阵. (请参见第三章.)

3. 余子式与代数余子式有什么特点？它们之间有什么关系？

n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 的第 i 行第 j 列元素 a_{ij} 的余子式为 M_{ij}，代数余子式 A_{ij} 与元素 a_{ij} 所处位置有关，而与行列式 D 的第 i 行与第 j 列元素的数值大小无关.

它们之间的关系为：$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$，即当 $i+j$ 为偶数时，它们相等；当 $i+j$ 为奇数时，二者绝对值相等，符号相反.

三、范例精解

例 1 已知 n 元排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数为 τ，求排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_1$ 的逆序数.

解法一 若 x_i 与 x_j 在排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 中构成逆序，则在排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_1$ 中一定不构成逆序，反之亦然. 排列中任意两个元素 x_i 与 x_j 要么在 $x_1x_2\cdots x_n$ 中构成逆序，要么在排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_1$ 中构成逆序，二者必居其一，而且只居其一. 由于排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数与排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_1$ 的逆序数之和为 C_n^2，故排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_1$ 的逆序数为 $C_n^2-\tau$.

解法二 在排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 中，设位于 x_1 后且比 x_1 小的数有 τ_1 个，则位于 x_1 后比 x_1 大的数有 $n-1-\tau_1$ 个，于是，排列 $x_2\cdots x_nx_1$ 的逆序数比排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_1$ 的逆序数多 $(n-1-\tau_1)-\tau_1$，故排列 $x_2\cdots x_nx_1$ 的逆序数为 $\tau+(n-1-\tau_1)-\tau_1$. 同理，在排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 中位于 x_2 后比 x_2 小的数有 τ_2 个，即在排列 $x_2x_3\cdots x_n$ 中位于 x_2 后比 x_2 小的数有 τ_2 个，则排列 $x_3\cdots x_nx_2$ 的逆序数比排列 $x_2x_3\cdots x_n$ 的逆序数多 $(n-2)-\tau_2$，从而排列 $x_3\cdots x_nx_2x_1$ 的逆序数比 $x_2x_3\cdots x_nx_1$ 的逆序数多 $(n-2-\tau_2)-\tau_2$，因而排列 $x_3\cdots x_nx_2x_1$ 的逆序数为

$$\tau+(n-1-\tau_1)-\tau_1+(n-2-\tau_2)-\tau_2$$

依次类推，$x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数为

$$\tau+(n-1-\tau_1)-\tau_1+(n-2-\tau_2)-\tau_2+\cdots+(1-\tau_n)-\tau_n$$

又 $\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n=\tau$，故 $x_nx_{n-1}\cdots x_1$ 的逆序数为 $\dfrac{n(n-1)}{2}-\tau$.

例 2 (1) 在五阶行列式中，项 $a_{23}a_{35}a_{41}a_{12}a_{54}$ 应带什么符号？

(2) 写出四阶行列式中带正号且包含因子 a_{32} 与 a_{13} 的项.

解 (1) 因 $a_{23}a_{35}a_{41}a_{12}a_{54}=a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54}$，此时列下标排列为 23514，而 $\tau(23514)=4$，故应带正号.

(2) 由行列式的定义可知，包含因子 a_{32} 与 a_{13} 的项必为 $a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$ 及 $a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$，其列下标排列的逆序数分别为 $\tau(3124)=2$，$\tau(3421)=5$. 从而，$a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$ 应带正号，$a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$ 应带负号. 于是所求项为 $a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$.

例 3 已知

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 3 & 1 & 2 \\ x & x & 0 & 1 \\ 2 & 1 & x & 4 \\ x & 2 & 1 & 4x \end{vmatrix}$$

求 $f(x)$ 中 x^2、x^3 的系数.

解 因为行列式各项是既不同行又不同列的四个元素的积，并按符号法则冠以“+”或“−”号，所以，含 x^3 的项只能是

$$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-3\cdot x\cdot x\cdot 4x=-12x^3$$

和

$$(-1)^{\tau(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-2\cdot x\cdot x\cdot x=-2x^3$$

于是 $f(x)$ 中含 x^3 的项为

$$-12x^3-2x^3=-14x^3$$

故 x^3 的系数为 −14.

含 x^4 的项只能是

$$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=2x\cdot x\cdot x\cdot 4x=8x^4$$

故 x^4 的系数为 8.

例 4 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 在 D 中只有 $1, 2, \cdots, n$ 这 n 个元素不为零，而它们恰好位于不同行不同列，所以 D 中不为零的项只有

$$a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}=1\cdot 2\cdots n=n!$$

且 $\tau(23\cdots n1)=n-1$，故

$$D=(-1)^{n-1}n!$$

在行列式的计算中，常常采用以下一些简单记号表示行列式的运算，这些记号及意义列举如下：

$r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$表示交换第 i 行(列)与第 j 行(列).

$r_i\times k(c_i\times k)$表示以数 k 乘第 i 行(列)各元素.

$r_i+kr_j(c_i+kc_j)$表示把第 j 行(列)各元素的 k 倍加到第 i 行(列)的对应元素上去.

$r_i-kr_j(c_i-kc_j)$表示第 i 行(列)各元素减去第 j 行(列)对应元素的 k 倍.

例 5 已知 $\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=0$，求 λ.

解 这个三阶行列式的展开式是 λ 的三次多项式，所以本题是一元三次方程的求根问题. 如果按对角线法则，自然易得 λ 的三次多项式. 但一般来说，三次多项式的因式分解是比较困难的，最好用行列式的性质化简行列式，有时会出现它的一种因式分解. 在第五章中常常会遇到这类行列式的计算问题.

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_3} \begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & \lambda+3 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-2r_1]{r_2+2r_1}(\lambda+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda+4 & -3 \\ 0 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+3)\begin{vmatrix} \lambda+4 & -3 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+3)[(\lambda+4)(\lambda-1)-6]$$

$$=(\lambda+3)(\lambda^2+3\lambda-10)$$

$$=(\lambda+3)(\lambda+5)(\lambda-2)=0$$

所以 $\lambda=-3$，-5，2 是这个 λ 的三次方程的三个根.

例 6 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 4 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

分析 对于三阶以上的数字行列式，计算办法有两种. 一是利用性质将其化为上(下)三角形行列式再求其值. 化为上三角形行列式的步骤是规范化的. 首先利用第一行第一列的非零元将第一列其它元素全化为零，然后利用第二行第二列的非零元将第二列以下的元素化为零，如此下去，直到化为上三角形行列式. 特别地，如果化的过程中出现某一行全为零，则行列式的值等于