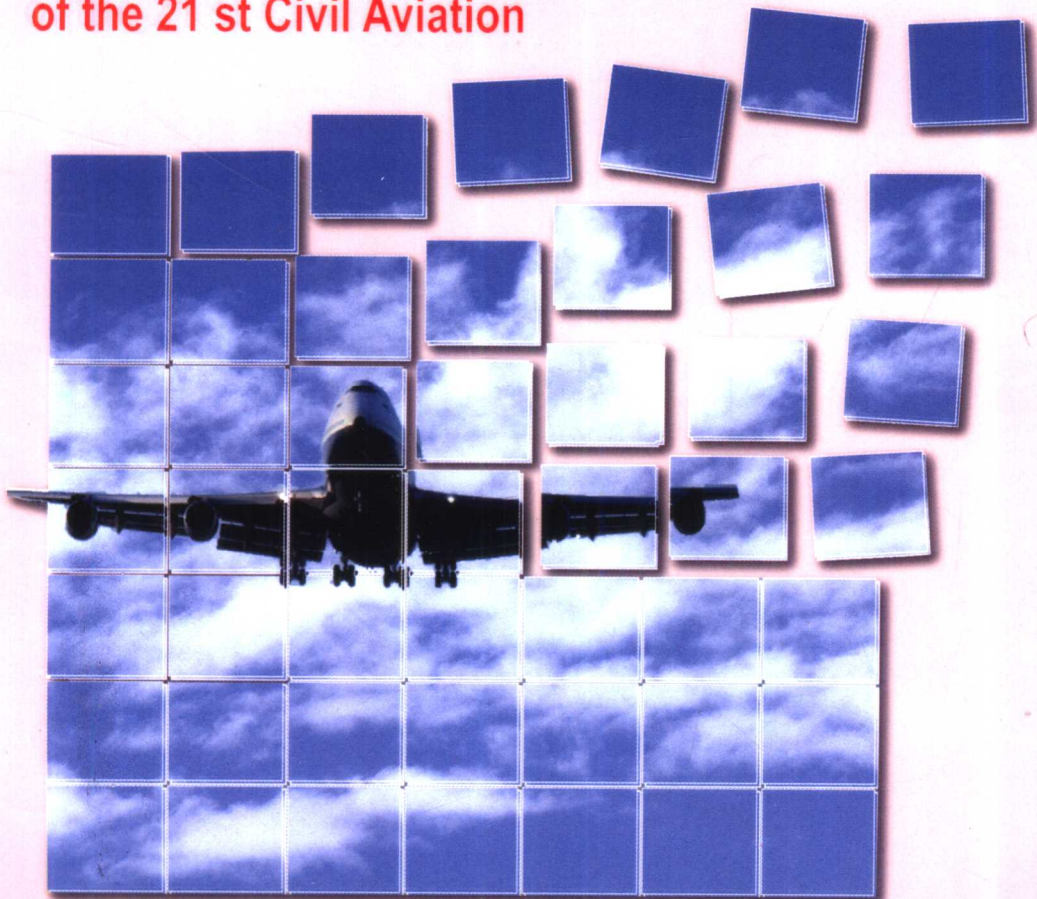


21 世纪民航高等教育系列教材

文科数学学习指导

王克健 刘广瑄 编

Textbook Series of the Higher Education
of the 21 st Civil Aviation



兵器工业出版社

文科数学学习指导

王克健 刘广瑄 编

兵器工业出版社

内 容 简 介

本书是为文科专业学生编写的数学学习参考书. 内容包括初等微积分、线性代数简介、概率初步三个部分, 共 11 章. 每章由目标要求、要点提示、例题选讲、目标检测四项内容组成. 书中对涉及基本概念和基本方法的重点、难点作了比较详细的讲述, 分析解答了 150 余道典型例题, 精选了 460 余道习题. 解决这些例题和习题所需要的数学知识和方法, 都在本书目标要求所设定的范围内.

图书在版编目 (CIP) 数据

文科数学学习指导/王克健, 刘广瑄编. —北京:
兵器工业出版社, 2005. 8
ISBN 7-80172-464-X

I. 文... II. ①王... ②刘... III. 高等数学 - 高等
学校 - 教学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 053031 号

出版发行: 兵器工业出版社
发行电话: 010-68962596, 68962591
邮 编: 100089
社 址: 北京市海淀区车道沟 10 号
经 销: 各地新华书店
印 刷: 北京瑞达方舟印务有限公司
版 次: 2005 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
印 数: 1 - 1050

责任编辑: 朱丽均
封面设计: 底晓娟
责任校对: 全 静
责任印制: 赵春云
开 本: 787 × 1092 1/16
印 张: 13.5
字 数: 300 千字
定 价: 30.00 元

(版权所有 翻印必究 印装有误 负责调换)

前 言

1999年,我校为英语、法学专业开设了文科数学课.本书编者在从事这一课程的教学过程中,感到对于适合文科专业使用的教学参考书的需求,由此萌生了编写本书的想法.

本书依据中国民航学院英语、法学专业数学课程的教学基本要求编写,书中内容与教学内容对应,包括初等微积分、线性代数简介、概率初步三个部分,共11章.每章由目标要求、要点提示、例题选讲、目标检测四项内容组成.

第一部分初等微积分,内容有初等函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的简单应用、积分.

第二部分线性代数简介,内容有矩阵、行列式、线性方程组.

第三部分概率初步,内容有样本空间 随机事件的概率、条件概率 独立性、一维随机变量及其分布.

在目标要求中,根据教学基本要求提出具体目标,以使学生在学习中明确自己所应达到的学习要求.

在要点提示中,对一章内容中涉及定义、定理、概念、方法等方面的重点、难点以及学生容易产生的疑点给出比较详细的讲解,以帮助学生正确理解有关概念,掌握基本方法.

在例题选讲中,题目的选取注意了以下几个方面:一是有利于掌握基本概念和基本方法;二是具有一定的典型性;三是具有一定的综合性和难度.通过对例题的分析解答,阐明解题的思路与方法,以提高学生的解题能力.

在目标检测中,客观型题有判断题、填空题及单项选择题,主观型题有运算与解答题及证明题.在选编这些题目时,着眼于巩固和深化概念以及解题能力训练.

在书末给出了全书目标检测题的答案与提示,提供了部分常用的数学公式,以备查用.

全书内容和题目的编选,结合了编者多年的教学积累,特别是近几年来自文科数学的教学体会.希望本书能对文科专业学生的数学学习有所帮助.

本书第一部分、第二部分由王克健编写,第三部分由刘广瑄编写.由王克健统稿.

本书的出版得到了诸多同行、教务处和有关部门的大力支持,在此编者谨向他们表示衷心的感谢.

由于编者水平所限,书中的错误及不妥之处在所难免,敬请使用本书的同行和读者提出宝贵意见.

编 者

2005年2月

目 录

第一部分 初等微积分	(1)
第一章 初等函数	(3)
第二章 极限与连续	(10)
第三章 导数与微分	(24)
第四章 中值定理与导数的简单应用	(44)
第五章 积分	(60)
第二部分 线性代数简介	(89)
第一章 矩阵	(91)
第二章 行列式	(101)
第三章 线性方程组	(116)
第三部分 概率初步	(127)
第一章 样本空间 随机事件的概率	(129)
第二章 条件概率 独立性	(139)
第三章 一维随机变量及其分布	(149)
目标检测题答案与提示	(160)
附录 部分数学公式	(182)
参考文献	(183)

第一部分 初等微积分

第一章 初等函数

目标要求

1. 识记

- (1) 记住函数、函数定义域、函数值及函数值域的定义；
- (2) 记住单调函数的定义及其几何意义；
- (3) 记住有界函数的定义；
- (4) 记住奇、偶函数和周期函数的定义以及它们的图形特点；
- (5) 记住基本初等函数的解析式、定义域、值域、图形及其奇偶性、单调性、有界性等主要性质；
- (6) 记住反函数的定义；
- (7) 记住复合函数的定义；
- (8) 记住初等函数的定义；
- (9) 记住分段函数的定义。

2. 领会

- (1) 领会邻域可以用开区间表示；
- (2) 领会函数的概念,领会自变量与变量的对应关系及函数的定义域是函数的两个最基本的要素；
- (3) 领会函数符号的意义；
- (4) 领会分段函数是自变量在不同范围内有不同表示式的一个函数,它的定义域就是不同表示式所限自变量取值范围的全体；
- (5) 领会单调函数,有界函数,奇、偶函数和周期函数的特性；
- (6) 领会直接函数与其反函数的概念及反函数的表示法；
- (7) 领会复合函数的概念,弄清中间变量与自变量的关系,注意并不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数。

3. 运用

- (1) 能列出简单实际问题的函数关系；
- (2) 会求函数的定义域(包括分段函数的定义域)；
- (3) 会求函数值和函数的值域；

(4) 会用定义验证函数是否为单调函数, 有界函数, 奇、偶函数和周期函数等;

(5) 会求一些用解析式表示的函数的反函数, 并会确定反函数的定义域;

(6) 能将几个函数复合成一个复合函数, 也会将一个复合函数表示成几个简单函数的复合;

(7) 会利用奇、偶函数, 周期函数的图形特点以及图形平移方法作出一些简单函数的图形.

4. 分析与综合

能综合运用复合函数的定义及定义域的求法, 求抽象函数的复合函数及分段函数的复合函数, 并确定它们的定义域.

要点提示

1. 函数 f 与函数值 $f(x)$

函数 $f: X \rightarrow R$ 与函数值 $f(x)$ 是两个截然不同的概念. 前者是集合 X 到 R 的一个单值对应规律 (即映射), 后者是实数值. 由于在数学中也用 $y = f(x)$ 表示函数 $f: X \rightarrow R$. 因此, 当遇到记号 $f(x)$ 时, 要根据上下文弄清楚它是代表函数值还是代表函数 $f: X \rightarrow R$.

2. 函数的相等与不等

我们把“函数 f 与 g 相等”定义为 f 与 g 是同一个映射, 即它们有相同的定义域 X 和相同的对应规律. 而有相同的对应规律是指对 X 中的每个实数 x , 都有 $f(x) = g(x)$. 这里 $f(x) = g(x)$ 就是函数值相等. 而“函数 f 与 g 不等”的意思就是 f 与 g 不是同一个映射, 即或者它们的定义域不同, 或者虽然定义域相同, 但对应规律不同 (对应规律不同的意思是: 至少在定义域 X 中有一个 x , 使 $f(x) \neq g(x)$, 这里 $f(x) \neq g(x)$ 就表示函数值不等).

一定要分清“函数的相等与不等”与“函数值的相等与不等”.

3. 复合函数

如同对函数 f 与 g , 可以通过四则运算构成新的函数, 例如 $F(x) = f(x) + g(x)$. 类似地, 考虑将一个函数“代入”到另一个函数中, 这种运算称为函数的复合运算, 由此 (在一定条件下) 得到的函数即为复合函数. 例如函数 $y = \ln(x^2 + 1)$ 可以认为是将 $u = x^2 + 1$ “代入”到 $y = \ln u$ 中所得到的复合函数.

这就像若干简单的机器串联起来可以形成一个复杂的机器一样, 函数通过“运算”构成新的函数, 通过复合运算构成复合函数 (在一定条件下).

对于复合函数, 提出以下几点注意:

① 不是任何两个函数都可以通过复合运算构成复合函数. 两个函数能够复合成一个复合函数是有条件的. 如果中间变量 $u = \varphi(x)$ 的值域是函数 $y = f(x)$ 的定义域的子集, 那么函数 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ 可以复合成复合函数 $y = f[\varphi(x)]$;

② 复合运算 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 不是一回事;

③ 要正确掌握复合函数的复合过程. 分解复合函数时, 每一步都必须是基本初等函数或是基本初等函数的四则运算. 熟练地分解一个复合函数, 对今后求复合函数的导数是非常重要的.

例题选讲

例1 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, $f(x) \neq 0$, $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, 试求 $f(2001)$.

解 令 $x=2001, y=0$, 则 $f(0) = f(2001) \cdot f(0)$, 因为 $f(0) \neq 0$, 所以 $f(2001) = 1$.

例2 已知 $f(e^x + 1) = e^{2x} + e^x + 1$, 求 $f(x)$ 的表达式.

解 令 $e^x + 1 = u$, 解得 $x = \ln(u-1)$, 因 $u-1 > 0$, 于是原式成为

$$f(u) = e^{2\ln(u-1)} + e^{\ln(u-1)} + 1 = (u-1)^2 + (u-1) + 1 = u^2 - u + 1,$$

将 u 换成 x , 得 $f(x) = x^2 - x + 1$.

此题也可直接将 $f(e^x + 1)$ 的表达式凑成 $(e^x + 1)$ 的函数

$$f(e^x + 1) = e^{2x} + e^x + 1 = (e^x + 1)^2 - (e^x + 1) + 1,$$

故 $f(x) = x^2 - x + 1$.

例3 试证: 定义在对称区间 $(-l, l)$ 上的任意函数 $f(x)$ 总可以表示为一个偶函数与一个奇函数的和, 并且表示法是唯一的.

证 令 $\varphi_1(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$,

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)],$$

因为 $\varphi_1(-x) = \varphi_1(x)$, $\varphi_2(-x) = -\varphi_2(x)$, 所以 $\varphi_1(x)$ 为偶函数、 $\varphi_2(x)$ 为奇函数, 且 $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = f(x)$, 从而 $f(x)$ 可表示为偶函数与奇函数的和.

下面证明表示法是唯一的.

设 $g_1(x)$ 是偶函数, $g_2(x)$ 是奇函数, 且 $f(x) = g_1(x) + g_2(x)$ (1)

又 $f(-x) = g_1(-x) + g_2(-x) = g_1(x) - g_2(x)$ (2)

由式(1)、(2)可得

$$g_1(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] = \varphi_1(x),$$

$$g_2(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = \varphi_2(x),$$

所以表示法是唯一的.

例4 求函数 $y = \frac{1 - \sqrt{1+4x}}{1 + \sqrt{1+4x}}$ 的反函数. $(x \geq -\frac{1}{4})$

解 令 $z = \sqrt{1+4x}$, 则有 $y = \frac{1-z}{1+z}$, 所以 $z = \frac{1-y}{1+y}$, 即有 $\sqrt{1+4x} = \frac{1-y}{1+y}$, 故

$$x = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1-y}{1+y} \right)^2 - 1 \right] = -\frac{y}{(1+y)^2}.$$

改换变量记号,即得所求的反函数 $y = -\frac{x}{(1+x)^2} \cdot (x \neq -1)$

例5 函数 $y = u^{\frac{1}{2}}, u = f(v), v = a^w, w = x^3$ 复合成复合函数 $y = \sqrt{f(a^{x^3})}$.

例6 设 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{当 } x < 0, \\ 1, & \text{当 } x \geq 0, \end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

解 由 $f(x)$ 的定义得 $f[f(x)] = \begin{cases} 1+f(x), & \text{当 } f(x) < 0, \\ 1, & \text{当 } f(x) \geq 0. \end{cases}$

而当 $x < -1$ 时, $f(x) = 1+x < 0$, 此时 $f[f(x)] = 1+f(x) = 2+x$;

当 $-1 \leq x < 0$ 时, $f(x) = 1+x \geq 0$, 此时 $f[f(x)] = 1$;

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 1 > 0$, 此时 $f[f(x)] = 1$,

所以可得 $f[f(x)] = \begin{cases} 2+x, & \text{当 } x < -1; \\ 1, & \text{当 } x \geq -1. \end{cases}$

例7 当你使用计算器计算 $1/(\lg 5)^2$ 的值时,要依次按下面四个键(括号键除外):

$$\lg, 5, x^2, 1/x$$

计算出结果 2.0468354. 此结果实际上就是复合函数 $y = h[g(f(x))]$ 在 $x = 5$ 处的值, 其中

$$y = h(u) = \frac{1}{u}, u = g(v) = v^2, v = f(x) = \lg x.$$

例8 初等函数 $y = \frac{\arctan(\ln \sqrt{7+e^x})}{1+x^2} + \sqrt{\sin^4 x - 1}$ 首先分解为 $y = f_1(x) + f_2(x)$, 其中

$$f_1(x) = \frac{\arctan(\ln \sqrt{7+e^x})}{1+x^2},$$

$$f_2(x) = \sqrt{\sin^4 x - 1}.$$

而 $f_1(x)$ 又分解为 $f_1(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$, 其中

$$g_1(x) = \arctan(\ln \sqrt{7+e^x}),$$

$$g_2(x) = 1+x^2.$$

$g_2(x)$ 是基本初等函数之和, $g_1(x)$ 是复合函数, 分解为 $g_1(x) = h_1\{h_2[h_3(w)]\}$, 其中 $h_1(u)$

$= \arctan u, u = h_2(v) = \ln v, v = w^{\frac{1}{2}}, w = 7+e^x$ 是基本初等函数之和.

同理可对 $f_2(x)$ 进行分解.

目标检测

单项选择题

- 下列各函数组中, $f(x)$ 与 $g(x)$ 是相同函数的组是().
 A. $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = x$; B. $f(x) = x + 1$, $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$;
 C. $f(x) = \ln x^2$, $g(x) = 2 \ln |x|$; D. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ $g(x) = \frac{|x|}{x}$.
- 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{e} < x < 1, \\ x, & 1 \leq x < e, \end{cases}$ $g(x) = e^x$, 则 $f[g(x)] = ()$.
 A. $\begin{cases} 1, & \frac{1}{e} < x < 1, \\ e^x, & 1 \leq x \leq e; \end{cases}$ B. $\begin{cases} 1, & -1 < x < 0, \\ e^x, & 0 \leq x < 1; \end{cases}$
 C. $\begin{cases} e^x, & -1 < x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1; \end{cases}$ D. $\begin{cases} x, & -1 \leq x < 0, \\ e^x, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$
- 函数 $f(x) = \frac{1}{\lg(2-x)} + \sqrt{100-x^2}$ 的定义域是().
 A. $[-10, 10]$; B. $[-10, 1) \cup (1, 10]$;
 C. $[-10, 1) \cup (1, 2)$; D. $[-10, 2)$.
- 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq -2, \\ x+9, & -2 < x < 2, \\ 2^x, & x \geq 2, \end{cases}$ 则下列等式中不成立的是().
 A. $f(-2) = f(2)$; B. $f(1) = f(4)$;
 C. $f(-1) = f(3)$; D. $f(0) = f(-3)$.
- 函数 $f(x) = 10^{-x} \sin x$ 在 $[0, +\infty)$ 内是().
 A. 偶函数; B. 单调函数; C. 有界函数; D. 奇函数.
- 设函数 $y = f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 2, \\ x^2-1, & x \geq 2, \end{cases}$ 则其反函数 $y = f^{-1}(x) = ()$.

$$\text{A. } \begin{cases} 1-x, & x < 3, \\ (x+1)^2, & x \geq 3; \end{cases}$$

$$\text{B. } \begin{cases} x-1, & x < 3, \\ \sqrt{x+1}, & x \geq 3; \end{cases}$$

$$\text{C. } \begin{cases} 1-x, & x < 2, \\ (x+1)^2, & x \geq 2; \end{cases}$$

$$\text{D. } \begin{cases} x-1, & x < 2, \\ \sqrt{x+1}, & x \geq 2. \end{cases}$$

运算与解答题

1. 考察 $1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ 是不是 x 的函数. 若是, 求定义域.

2. 求满足方程 $f(x) + xf(-x) = x$ 的 $f(x)$.

3. 设 $f(x) = \frac{1}{x}$, 求 $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

4. 若 $h(x) = 2x + |2x|$, 求

(1) $h(-3)$, $h(0)$, $h(t^2)$, $h(-t^2)$;

(2) h 的定义域;

(3) $h[h(x)]$.

5. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 求下列函数的定义域:

(1) $f(e^x)$;

(2) $f(\arctan x)$.

6. 设 $f(x) = \frac{ax}{2x+3}$, 且 $f(f(x)) = x$, 求 a .

7. 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} (x > 0)$, 求

(1) $f[f(x)]$;

(2) $f(x)$ 的反函数.

8. 设 $\varphi(x+1) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$ 求 $\varphi(x)$, 并作出 $y = \varphi(x)$ 的图形.

9. 分解下列复合函数:

(1) $y = e^{-x^2}$;

(2) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$;

(3) $y = \ln \cos x$;

(4) $y = \arccos \frac{1}{x}$;

(5) $y = \arcsin \sqrt{x}$;

(6) $y = \ln \tan \frac{x}{2}$;

(7) $y = e^{\arctan \sqrt{x}}$;

(8) $y = \ln[\ln(\ln x)]$;

(9) $y = f(\sin^2 x)$;

(10) $y = \sqrt{f(a^{x^3})}$.

证明题

1. 证明函数 $y = \sqrt{2x^2 + 1} - x^2$ 有上界.
2. 设 $f(x) = F(x) \left(\frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{2} \right)$, 其中 $F(x)$ 是奇函数, 证明 $f(x)$ 是偶函数.
3. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + f(y) = f(x + y)$, $(x \in R, y \in R)$. 证明 $f(x)$ 是奇函数.

第二章 极限与连续

目标要求

1. 识记

- (1) 理解左、右极限的概念及左、右极限存在且相等是极限存在的充分必要条件;
- (2) 记住函数极限的性质;
- (3) 记住无穷小、无穷大的定义;
- (4) 记住一些简单的等价无穷小,例如 $x \rightarrow 0$ 时, $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$ 等;
- (5) 记住无穷小与极限之间的关系;
- (6) 记住极限的四则运算法则;
- (7) 记住两个重要极限;
- (8) 记住函数在一点左连续、右连续的定义;
- (9) 记住函数在一区间上连续的定义;
- (10) 记住连续函数的和、差、积、商的连续性;
- (11) 记住复合函数连续的条件和结论;
- (12) 记住基本初等函数在它们的定义域内都连续;
- (13) 记住初等函数在它们的定义区间内都连续;
- (14) 记住闭区间上连续函数的最大值、最小值定理和中间值定理.

2. 领会

- (1) 领会函数在 x_0 处的极限存在与否,仅与函数在 x_0 附近的变化趋势有关,而与函数在 x_0 点是否有定义无关;
- (2) 领会无穷小和无穷大的概念,搞清楚它们之间的关系;
- (3) 领会无穷小、无穷大与绝对值很小的数、绝对值很大的数的区别;
- (4) 领会无穷小与极限的关系;
- (5) 领会在使用极限的运算法则时,要求参加运算的函数的极限都存在,对于商的运算法则,还要注意分母的极限不能为零;
- (6) 领会函数在一点连续的概念,弄清函数在一点有定义、极限存在及连续三者之间的区别和联系;
- (7) 领会函数在一点左连续、右连续的概念,弄清左、右连续和连续之间的关系;

- (8) 领会函数的间断点 x_0 的任一邻域内总有异于 x_0 而属于该函数定义域的点;
- (9) 领会函数在开区间, 半开区间及闭区间上连续的意义;
- (10) 领会基本初等函数在其定义域内都连续, 而初等函数在其定义区间上都连续;
- (11) 领会闭区间上连续函数的最大值、最小值定理和中间值定理, 注意如果函数只在开区间上连续时, 结论可能不成立.

3. 运用

- (1) 会用极限的运算法则求极限;
- (2) 会用两个重要极限求极限;
- (3) 会用左、右极限的概念求极限或证明极限不存在;
- (4) 会用函数连续的定义来验证函数的连续性;
- (5) 会用左、右连续和连续的定义来讨论函数的连续性, 包括讨论分段函数在其分段点处的连续性;
- (6) 会用函数的连续性概念求极限.

4. 分析与综合

- (1) 能综合运用所学的概念和方法求极限;
- (2) 能综合运用连续函数的四则运算、反函数及复合函数的连续性及初等函数的连续性等讨论函数的连续性问题;
- (3) 能综合运用闭区间上连续函数的性质进行简单的推理和论证.

要点提示

1. 极限的概念(以数列极限为例加以说明, 函数极限类似)

数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 表示“当 n 无限增大时, x_n 无限地接近常数 a ”. 表达式“ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ”有两层涵义: ① $\{x_n\}$ 的极限存在, 即 $\{x_n\}$ 收敛; ② $\{x_n\}$ 的极限值为 a . 因此, 在考察极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 时, 既要考虑其存在性, 也要考虑如何求出其极限值.

2. 数列极限与函数极限

数列极限与函数极限的差异仅在于自变量的类型及变化方式, 前者是趋于 $+\infty$ 的离散变量 n (在数轴上跳跃地取一切自然数), 后者是趋于无穷或某一定数的连续变量 x (在数轴上连续地取实数值). 因此在极限的性质、运算及证明方法上都很类似.

3. 极限的运算

极限的运算(如四则运算)都是以极限存在为前提的, 在没有判明极限存在以前, 不应随意进行运算, 否则难免出错. 其时, 首要问题是判明极限的存在性.

4. 左、右极限

讨论函数的极限时, 在什么情况下要考虑左、右极限?

一般地说, 讨论函数 $f(x)$ 的极限, 都应先考察单侧极限的情况. 如果当 $x \rightarrow x_0$ 时 ($x \rightarrow \infty$ 时的情况类似) $f(x)$ 在 x_0 的两侧变化趋势一致, 则不必分开研究; 如果两侧变化趋势可能有差别, 就应分别研究左、右极限.

例如求分段函数在分段点处的极限时,必须研究左、右极限;有些三角函数在特殊点的左、右极限不一样,例如 $\tan x$ 在 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时左、右极限不一样;有些反三角函数、指数函数也有类似的情况,例如 $\arctan \frac{1}{x}$ 、 $e^{\frac{1}{x}}$ 在 $x \rightarrow 0$ 时的左、右极限都不一样.

5. 幂指函数 $y = f(x)^{g(x)}$ 的极限

幂指函数求极限的一般方法是利用等式 $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$ 转换成指数函数,然后应用指数函数的连续性,再求极限. 即

$$\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim g(x)\ln f(x)}.$$

在某些情形,也可以直接利用第二重要极限求之.

6. 无穷小量

无穷小量是指以 0 为极限的变量,是相对于自变量的一个变化过程而言的. 常数 0 是任何过程中的无穷小量.

7. 求极限的方法

求极限的题目基本上分为定型和不定型(待定式)两大类. 定型的极限求法简单,一般用极限的运算法则就可以解决. 不定型极限的确定是极限计算的难点,因为它不能直接利用运算法则来确定,又没有一般方法可循.

不定型一般有七类: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ . 其特点是式中含有不定因式,不能使用极限运算法则. 因此,求这类极限时,关键是消去不定性因子. 消去不定性因子的方法多种多样,必须根据具体问题进行具体分析.

目前是初次接触不定型,后面掌握了导数这个工具之后,还会介绍确定不定型极限的或许是更好的办法.

现将求极限的方法小结如下:

(1) 利用已知的不定型极限确定未知的不定型极限.

通常所说的“利用两个重要极限求极限”就属于这种情形. 这里,将未知化归为已知的方法可以考虑变量替换、恒等变形等;同时,要熟记若干重要且常见的不定型的极限. 列出如下. 其中①,⑥是基本的,其余可由①,⑥推出.

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1;$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1;$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1;$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2};$$

$$\textcircled{6} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e;$$

$$\textcircled{7} \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e;$$

$$\textcircled{8} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$$

$$\textcircled{9} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$$

$$\textcircled{10} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a (a > 0).$$