21世纪高职高专数学系列教材

积分变换

朱永银 魏莹 郭文秀 主编

JI FEN BIAN HUAN

华中科技大学出版社

21 世纪高职高专数学系列教材

积 分 变 换

主编　朱永银　魏　莹　郭文秀
主审　曾浦生　张柏勤

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

积分变换/朱永银　魏　莹　郭文秀　主编

武汉:华中科技大学出版社,2002年8月

ISBN 7-5609-2768-8

Ⅰ. 积…

Ⅱ. ①朱…　②魏…　③郭…

Ⅲ. 积分变换-高等学校:技术学校-教材

Ⅳ. O177.6

21世纪高职高专数学

系列教材　积分变换　　朱永银　魏　莹　郭文秀　主编

策划编辑:徐正达　　封面设计:刘　卉

责任编辑:徐正达　柯　贝　　责任监印:张正林

责任校对:刘　飞

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:武汉皇荣文化发展有限责任公司

印　刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168　1/32　印张:3　字数:66 000

版次:2002年8月第1版　印次:2006年2月第4次印刷　定价:4.80元

ISBN 7-5609-2768-8/O·262

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内容简介

本书是“21 世纪高职高专数学系列教材”之一. 内容分为两章:第一章,傅里叶变换;第二章,拉普拉斯变换. 书后附有傅里叶变换简表,拉普拉斯变换简表和习题答案与解答,便于读者查阅.

本书可作为高职高专数学教学用书,也可供高等师范专科学校非数学专业高数教学选用.

21世纪高职高专数学系列教材
编审委员会

序

在“21世纪高职高专数学系列教材”即将出版之际，我谈几点意见，作为这套系列教材的序.

高等职业教育的出现是我国高等教育改革发展中的大事. 高职应该办好，办出特色，真正培养出高素质的综合型、应用型人才. 近来报纸上有很多讨论有关问题的文章，其中提到在发达国家高级技工的比例占到40%，而我国只有百分之几. 这一现象已经严重地影响了国民经济的发展. 高职院校虽然不是培养高级技工的场所，但它培养的各类技术人才，将会弥补这个不足，使“高学历”人才与“应用型”人才的比例趋向合理. 目前有一种追求“高学历”教育的倾向，用一句话来概括，就是中国的高等教育重心偏高. 有一种流传很广的成见，认为“高学历等于高质量”，实践证明这是不对的. 过分强调高学历，反而会造成有限教育资源的极大浪费.

近年来，人们又开始讨论所谓高等教育大众化的问题. 高等教育由以前的“精英教育”向“大众化教育”转变，这是高等教育发展的必然结果. 这样一来，不免使人怀疑，便有了这是不是以数量换质量的说法. 由于进入高等学校的学生越来越多，录取分数线一定会下降，这也会引起人们的疑惑：入学分数较低的学生的质量是不是一定就差？这种误解与“高学历等于高质量”的性质是相同的. 教育的功能在于，能用有限的资源把更多的学生提高到

更高的水平．因此，我提出这样一个问题：怎样根据高职教育的性质与实际可能将高等职业教育搞得更好、更有特色？怎样利用我们的有限的资源，培养出更多的合格人才？做到了这一点就是高质量的教育．正是从这点出发，我在多种场合中提到了“必需、够用”和“易教易学”两个标准．对于这一点，如果说在微积分基础方面比较容易做到的话，那么要在以后较高层次的专业数学方面做到就难多了．如果前面基础课的内容讲得很少，似乎皆大欢喜，但到后来学习专业数学，知识就不够用了．反之，对前面的基础课程提出了不合理的过高的要求，学生们接受不了，也就谈不上再学习后续内容了．所以，还是重申那两句话：“必需、够用”与“易教易学”．我知道，这是很不容易达到的标准．如果说我这些年来从事教学工作还有一些体会的话，那就是办教育不能说空话．许多事，说起来容易，但做起来就难了，只有经过多年的实践才知道其艰辛．正因如此，我愿对这套系列教材的作者们孜孜不倦的努力，对他们编出“精品”教材、为培养 21 世纪的高素质人才做贡献的精神，表示我的敬意．也希望他们继续努力，做得更好．

齐民友

2002 年 5 月 5 日
于武汉大学

前　言

数学是研究数量关系与空间形式的科学，是科学技术人才科技素质的重要组成部分．随着计算机技术等高科技的普及和发展，数学的重要性日益显现．为了提高学生的数学素质，结合高职高专学生的特点，针对高职高专教育的目标——培养高层次、复合型、实用型人才，湖北省高职高专数学研究会与华中科技大学出版社联合组织出版了这套“21 世纪高职高专数学系列教材”，第一批推出的包括四本教材《高等数学(第一册)》、《高等数学(第二册)》、《线性代数》、《积分变换》和两本配套的指导书《高等数学学习指导(第一册)》、《高等数学学习指导(第二册)》．本系列教材保持传统体系，简略理论推导，强调实际应用，渗透建模思想，突出思路分析，强化综合训练；在叙述中注重文字简练，概念准确，由浅入深，引人入胜；力求使学生掌握所学知识，提高应用数学知识的能力，为将来的激烈竞争插上“坚强的翅膀”．

本书共有两章，内容包括傅里叶变换和拉普拉斯变换，每节后附有习题，书后附习题答案与解答，供读者参考．还附有傅里叶变换简表和拉普拉斯变换简表，供读者查阅．

本书可作为高职高专各专业选用，也可作为高等师范专科学校非数学专业的数学教材．本书需 30 学时授完．

本书由朱永银、魏莹、郭文秀担任主编，费浦生、张枨勤担任主审，范小勤担任副主编．参加本书编写工作的还有彭焱春、罗炜、山军．全书由朱永银统稿．

武汉大学前校长、全国著名数学家齐民友教授欣然作序，为本系列教材增色不少；武汉大学费浦生教授审阅了本系列教材的部分内容，提出了许多宝贵意见．本系列教材还参考吸收了有关教材及著作的成果．在此一并致谢．

荆门职业技术学院、武汉职业技术学院、三峡大学职业技术学院（葛洲坝）、长江职工大学、长江职业学院、武汉电力职业技术学院、湖北经济管理干部学院、沙洋师范高等专科学校、湖北商业高等专科学校、汉口职业技术学院、黄冈职业技术学院、三峡大学职业技术学院（宜昌）、湖北函授大学为本系列教材的出版发行给予了积极的支持，在此表示由衷的感谢．

由于编者水平有限，本书难免存在疏漏之处，敬请广大读者提出批评建议，以便再版时修订，使本书日臻完善．

编　者

2002 年 5 月

目　录

第一章　傅里叶变换

傅里叶变换(也称傅氏变换)是一种重要的数学工具,它在电力工程、无线电技术、力学、光学、量子物理学和各种线性系统中都得到了广泛的应用.随着计算机技术的发展,在20世纪60年代中期,出现了快速傅里叶变换(FFT).这使得这一数学工具的使用更为便捷.

本章首先介绍复数、复变函数的有关概念,然后从傅里叶级数的复数形式引入傅里叶变换的概念,讨论其性质,最后介绍傅里叶变换的卷积.

第一节　复　　数

一、复数的概念

1. 复数的定义

定义　形如 $a+\mathrm{i}b(a,b\in\mathbf{R})$ 的数称为**复数**,通常用字母 z 表示,即 $z=a+\mathrm{i}b$. 其中 i 为虚数单位,$\mathrm{i}^2=-1$. a,b 分别称为复数 $z=a+\mathrm{i}b$ 的**实部与虚部**,记为 $a=\mathrm{Re}(z)$,$b=\mathrm{Im}(z)$.

当 $b=0$ 时,复数 $a+\mathrm{i}b$ 就是实数 a;

当 $b\neq0$ 时,复数 $a+\mathrm{i}b$ 称为虚数,这时如果 $a=0$. 则称之为**纯虚数**,即 $a+\mathrm{i}b=\mathrm{i}b$.

由此可知,复数包含所有的实数和虚数.

例 1　实数 m 取何值时,复数 $z=(m^2-3m-4)+\mathrm{i}(m^2-5m-6)$ 是:(1)实数;(2)虚数;(3)纯虚数?

解　由复数定义可知:

$$a=m^2-3m-4=(m+1)(m-4),$$
$$b=m^2-5m-6=(m+1)(m-6).$$

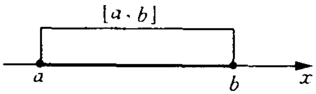
(1) 若复数 z 是实数,那么 $b=0$,即 $(m+1)(m-6)=0$. $m=-1$ 或 $m=6$. 故当 $m=-1$ 或 $m=6$ 时,z 为实数;

(2) 若复数 z 是虚数,那么 $b\neq 0$. 即 $m\neq -1$ 且 $m\neq 6$,故当 $m\neq -1$ 且 $m\neq 6$ 时,z 为虚数;

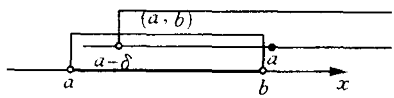
(3) 若复数 z 是纯虚数,那么 $a=0$ 且 $b\neq 0$. 即 $(m+1)(m-4)=0$ 且 $(m+1)(m-6)\neq 0$. 得 $m=4$. 即当 $m=4$ 时,z 为纯虚数.

2. 复数的几何表示法

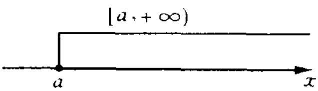
复数 $z=a+ib$ 的实部和虚部是有序的,因此复数 $z=a+ib$ 与有序实数对 (a,b) 之间可以建立一一对应关系. 如果规定直角坐标平面内的横轴 x 为实轴. 单位为 1,纵轴 y(不包括原点)为虚轴,单位为 i,那么复数 $a+ib$ 就可用这样的平面内的点 $M(a,b)$ 表示,如图 1-1 所示.



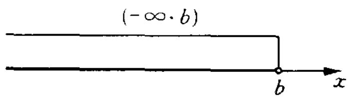
(a)



(b)



图c1-1



(图 1-2

用来表示复数的平面称为**复平面**.

此外,向量$\overrightarrow{OM}$是由 $M(a,b)$ 惟一确定,而向量$\overrightarrow{OM}$又可惟一确定点 $M(a,b)$,故向量$\overrightarrow{OM}$与点 $M(a,b)$ 是一一对应的,而点 $M(a,b)$ 与复数 $z=a+ib$ 是一一对应的,所以复数 $z=a+ib$ 与向量$\overrightarrow{OM}$也是一一对应的. 因此,复数 $z=a+ib$ 也可以用向量表示,如图1-2 所示.

为方便起见,今后常把复数 $z=a+ib$ 说成点 M 或向量$\overrightarrow{OM}$.

向量$\overrightarrow{OM}$的长度 r 称为复数 $z=a+\mathrm{i}b$ 的**模**，记为 $|z|$ 或 $|a+\mathrm{i}b|$，由 x 轴的正半轴到向量$\overrightarrow{OM}$的角 θ 叫做复数 $z=a+\mathrm{i}b$ 的**辐角**，一个不等于零的复数的辐角有无穷多个，它们彼此相差 $2k\pi$（k 为整数）. 辐角在$[0,2\pi)$内的值叫做辐角的**主值**.

例 2 用向量表示复数 $\sqrt{3}+\mathrm{i}$，$3\mathrm{i}$，-2，$3-4\mathrm{i}$，并分别求出它们的模和辐角的主值.

解 （1）如图 1-3 所示，向量$\overrightarrow{OA}$表示复数 $\sqrt{3}+\mathrm{i}$，它的模为 $|\sqrt{3}+\mathrm{i}|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$.

因为 $a=\sqrt{3}$，$b=1$，$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，点$(\sqrt{3},1)$在第 Ⅰ 象限内，所以辐角的主值为 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$.

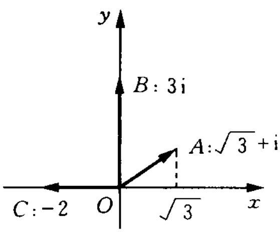


图 1-3

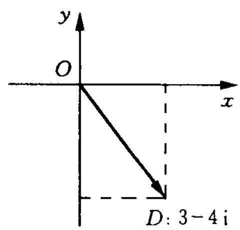


图 1-4

（2）如图 1-3 所示，向量$\overrightarrow{OB}$表示复数 $3\mathrm{i}$，它的模为 $|3\mathrm{i}|=\sqrt{0^2+3^2}=3$，辐角的主值为 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$.

（3）如图 1-3 所示，向量$\overrightarrow{OC}$表示复数-2，它的模为 $|-2|=2$，辐角的主值为 $\theta=\pi$.

（4）如图 1-4 所示，向量$\overrightarrow{OD}$表示复数 $3-4\mathrm{i}$，它的模 $|3-4\mathrm{i}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$.

因为 $a=3$，$b=-4$，$\tan\theta=-\dfrac{4}{3}$，点$(3,-4)$在第 Ⅳ 象限内，所

以辐角的主值为 $\theta=2\pi-\arctan\frac{4}{3}$.

如果两个复数的实部和虚部完全相等,则称这两个复数相等.即若 $z_1=a_1+\mathrm{i}b_1, z_2=a_2+\mathrm{i}b_2$,且 $a_1=a_2, b_1=b_2$,则 $z_1=z_2$. 两个复数不能比较大小. 但可以进行加、减、乘、除运算.

$$z_1\pm z_2=(a_1+\mathrm{i}b_1)\pm(a_2+\mathrm{i}b_2)=(a_1\pm a_2)+\mathrm{i}(b_1\pm b_2),$$

$$z_1\cdot z_2=(a_1+\mathrm{i}b_1)(a_2+\mathrm{i}b_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+\mathrm{i}(a_1b_2+a_2b_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+\mathrm{i}b_1}{a_2+\mathrm{i}b_2}=\frac{(a_1+\mathrm{i}b_1)(a_2-\mathrm{i}b_2)}{(a_2+\mathrm{i}b_2)(a_2-\mathrm{i}b_2)}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.$$

二、复数的三种形式

1. 复数的代数形式

设有复数 $z=a+\mathrm{i}b$,则把 $a+\mathrm{i}b$ 称为复数 z 的**代数形式**.

2. 复数的三角形式

设非零复数 $z=a+\mathrm{i}b$ 的模为 r,辐角为 θ,如图 1-5 所示,则有

$$\begin{cases}a=r\cos\theta,\\ b=r\sin\theta,\end{cases}$$

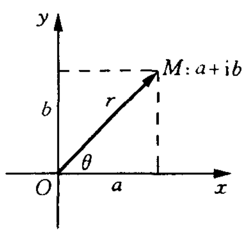


图 1-5

于是

$$z=a+\mathrm{i}b=r\cos\theta+\mathrm{i}r\sin\theta=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta).$$

其中 $$r=\sqrt{a^2+b^2},\quad \tan\theta=\frac{b}{a}\quad(a\neq0),$$

θ 所在的象限即点 (a,b) 所在的象限.

$r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 称为复数 z 的**三角形式**.

3. 复数的指数形式

根据欧拉(Euler)公式 $e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 可知,任何一个非零复数 $z=a+\mathrm{i}b$ 都可表示为

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=re^{\mathrm{i}\theta}.$$

$re^{\mathrm{i}\theta}$ 称为复数 z 的**指数形式**. 其中 r 为复数 z 的模,θ 为辐角.

例 3 把下列复数化为三角形式和指数形式：

(1) $\sqrt{3}+\mathrm{i}$；　(2) $3\mathrm{i}$；　(3) -2；　(4) $3-4\mathrm{i}$；

(5) $1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$.

解 (1) $$\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\qquad(\text{三角形式})$$

$$=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}.\qquad(\text{指数形式})$$

(2) $$3\mathrm{i}=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)\qquad(\text{三角形式})$$

$$=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}.\qquad(\text{指数形式})$$

(3) $$-2=2(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)\qquad(\text{三角形式})$$

$$=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}.\qquad(\text{指数形式})$$

(4) $$3-4\mathrm{i}=5\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\mathrm{i}\right)$$

$$=5\left[\cos\left(2\pi-\arctan\frac{4}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(2\pi-\arctan\frac{4}{3}\right)\right]\qquad(\text{三角形式})$$

$$=5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(2\pi-\arctan\frac{4}{3}\right)}.\qquad(\text{指数形式})$$

(5) $$1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$$

$$=2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\pi-\theta}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi-\theta}{2}\right)\qquad(\text{三角形式})$$

$$=2\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi-\theta}{2}}.\qquad(\text{指数形式})$$

习　题　1-1

1. 回答下列问题：

(1) a 是什么实数时，$\dfrac{a^2+a-6}{a+5}+\mathrm{i}(a^2+8a+15)$是实数，是纯虚数？

(2) m 是什么实数时，$(2m^2+5m-3)-\mathrm{i}(6m^2-m-1)$是实数，是虚数，是纯虚数？

2. 计算：

(1) $(-6+3\mathrm{i})-(6+3\mathrm{i})$；

(2) $(1-3\mathrm{i}^7)+(2+4\mathrm{i}^9)-(3-5\mathrm{i}^3)$；

(3) $\left|\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right|$；　　(4) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}-\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}\,\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}\,\mathrm{i}}$.

3. 设 $4\mathrm{i}-2-\dfrac{x+\mathrm{i}y}{\mathrm{i}}=\dfrac{2(x-\mathrm{i}y)}{1-\mathrm{i}}$，求实数 x 和 y 的值.

4. 设复数 $z=\dfrac{1-2\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$，求 z 的实部、虚部、模、辐角的主值.

5. 将下列复数表示为代数形式：

(1) $4\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$；　　(2) $2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$；

(3) $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$；　　(4) $\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

6. 将下列复数化为三角形式：

(1) $-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$；　(2) $2\mathrm{i}$；　(3) $1+\mathrm{i}$.

7. 将下列复数化为指数形式：

(1) $\sqrt{3}(\cos 150°+\mathrm{i}\sin 150°)$；　(2) $\cos\dfrac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}$；

(3) $1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

第二节　复变函数

一、区域的概念

设有复数 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$，从而