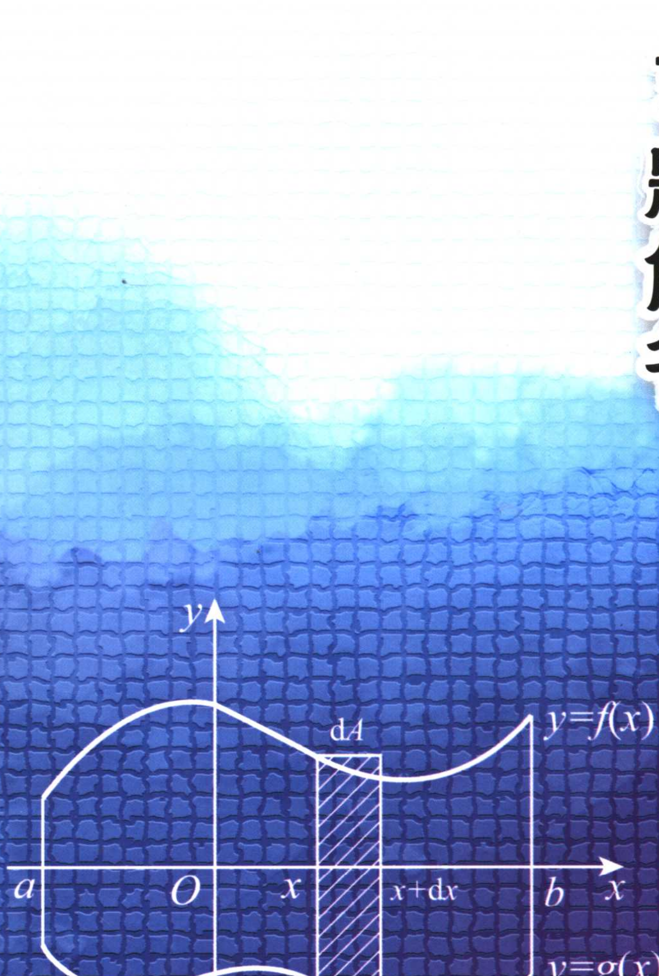
高等职业教育『十一五』规划教材

公共课教材系列

高等数学习题解答

敖屹兰◎主编

陈周钦◎主审



$$dA=[f(x)-g(x)]dx$$

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

科学出版社
www.sciencep.com

• 高等职业教育“十一五”规划教材

公共课教材系列

高 等 数 学

习题解答

敖屹兰　主编

陈周钦　主审

黄循彪　李雪贲　王东红　参编

科 学 出 版 社

北　京

前　言

为了提高学生的学习效率，节省教学时间，我们对敖屹兰主编的《高等数学》的全部习题给出了详细的解答.

本书由广东交通职业技术学院数学教研室的敖屹兰担任主编，黄循彪、李雪贲、王东红参加了编写工作，由陈周钦教授主审.

由于编写时间仓促，书中难免有错误，恳请读者指正.

目　　录

第 1 章 极限与连续

习 题 1.1

1. 观察下列题中数列有无极限,如有极限请指出其极限值.

(1)数列 $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$;　　(2)$x_n=\frac{2^n+(-1)^n}{2^n}$;

(3)数列 $x_n=n\cdot\sin\frac{n\pi}{2}$;　　(4)数列 $x_n=\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}$.

解　(1)观察数列 $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$.

$$-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{(-1)^n}{n},\cdots.$$

当 $n\to\infty$ 时,x_n(忽大于 0,忽小于 0)而趋向于确定的常数 0,所以此数列有极限,极限值为 0.

(2)观察数列 $x_n=\frac{2^n+(-1)^n}{2^n}$.

$$\frac{1}{2},\frac{5}{4},\frac{7}{8},\frac{17}{16},\cdots,1+\frac{(-1)^n}{2^n},\cdots.$$

当 $n\to\infty$ 时,x_n 忽大于 1,忽小于 1 而趋向于确定的常数 1,所以此数列有极限,极限值为 1.

(3)观察数列 $x_n=n\cdot\sin\frac{n\pi}{2}$.

$$1,0,-3,0,5,\cdots,n\cdot\sin\frac{n\pi}{2},\cdots.$$

当 $n\to\infty$ 时，x_n 不趋于一个确定数，所以此数列是发散的.

(4)观察数列 $x_n=\dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}$.

$$0,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{4},\cdots,\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n},\cdots.$$

当 $n\to\infty$ 时，x_n 忽等于 0，忽小于 0，忽大于 0 而趋向于确定常数 0，所以此数列有极限，极限值为 0.

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{n}\right)$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+3}{n}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-4}{n^2+1}$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3-2n+1}{8-n^3}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$；　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=3-0=3.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+3}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\dfrac{3}{n}\right)=5.$

(3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-4}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{4}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=1.$$

(4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-2n+1}{8-n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\frac{8}{n^3}-1}=-3.$$

(5) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=2.$$

(6) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^2+5n+6}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}=1.$$

*__3.__ 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$.

证 对于任意给定的正数 ε，要使 $\left|\dfrac{1}{2^n}-0\right|=\dfrac{1}{2^n}<\varepsilon$，只要 $2^n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，即

$$n>-\frac{\lg\varepsilon}{\lg 2}=-\log_2\varepsilon.$$

取 N 是大于 $-\log_2\varepsilon$ 的一个正整数．当 $n>N$ 时，就有

$$n>-\log_2\varepsilon.$$

即

$$\frac{1}{2^n}<\varepsilon.$$

所以，对于任意给定的正数 ε，总存在正整数 $N=[-\log_2\varepsilon]$（符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数），当 $n>N$ 时，就有

$$\left|\frac{1}{2^n}-0\right|<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

习　题　1.2

1. 观察并写出下列极限值：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^x$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^x=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)=2$.

2. 观察并写出下列极限值：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\ln x$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan x$；

解　(1) $\lim\limits_{x\to1}\ln x=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan x=1$.

3. 设函数 $f(x)=\frac{x}{x}$，画出它的图像，求当 $x\to0$ 时，函数的左右极限，从而说明在 $x\to0$ 时函数的极限是否存在.

解　图像为图 1.1. $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1$. 由于

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

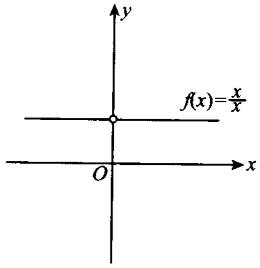


图 1.1

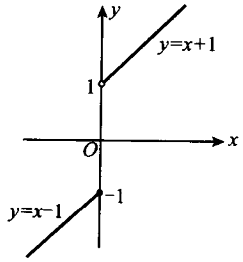


图 1.2

4. 设 $f(x)=\begin{cases} x-1, x\leqslant 0, \\ x+1, x>0, \end{cases}$ 画出它的图像，并求当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的左右极限，从而说明在 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限是否存在.

解 图像为图 1.2. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$. 由于 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

5. 证明函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<1, \\ 1, & x=1, \\ -1, & x>1 \end{cases}$ 在 $x\to 1$ 时极限不存在.

证 因为 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-1)=-1$，即 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在.

习 题 1.3

1. 求下列各题的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$.

解 (1) 原式 $=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+5)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3)}=\dfrac{(\lim\limits_{x\to 2}x)^2+\lim\limits_{x\to 2}5}{(\lim\limits_{x\to 2}x)^2-\lim\limits_{x\to 2}3}=\dfrac{2^2+5}{2^2-3}=9$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{6}$.

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2+x}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to1}(x^2+x)}=\frac{1-1}{1^2+1}=0.$$

(4)原式$=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x(x^2+3x+2)}{(x-3)(x+2)}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x(x+1)(x+2)}{(x-3)(x+2)}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+x}{x-3}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-2}(x^2+x)}{\lim\limits_{x\to-2}(x-3)}=\frac{(-2)^2+(-2)}{-2-3}=-\frac{2}{5}.$$

(5)原式$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(x-\sqrt{x})\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x\sqrt{x}-x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}(\sqrt{x}-1)=-1.$

(6)原式$=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{2x+1}+3)}$

$$=\lim_{x\to4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}=\lim_{x\to4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{2x+1}+3}$$

$$=\frac{2(\sqrt{4}+2)}{\sqrt{2\times4+1}+3}=\frac{4}{3}.$$

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x-x^3}{x+x^3}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{3x^3+1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x+5}{x+1}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

解　(1)原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{x}{x^3}-\dfrac{x^3}{x^3}}{\dfrac{x}{x^3}+\dfrac{x^3}{x^3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}-1}{\dfrac{1}{x^2}+1}=\dfrac{0-0-1}{0+1}=-1.$

(2)原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^2}{x^3}+\dfrac{x}{x^3}-\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{3x^3}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{3+\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{0+0-0}{3+0}=0.$

(3)通分.

原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3(2x+1)-x^2(2x^2-1)}{(2x^2-1)(2x+1)}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+x^2}{4x^3+2x^2-2x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dfrac{x^3+x^2}{x^3}}{\dfrac{4x^3+2x^2-2x-1}{x^3}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\dfrac{1}{x}}{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}\right)=\frac{1+0}{4+0-0-0}=\frac{1}{4}.$$

(4)分子、分母同除 x.

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{1+0}}{1+0}=1.$$

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$ (m,n 为正整数).

解　(1)通分.

$$原式=\lim_{x\to1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to1}\frac{-(x+2)}{1+x+x^2}=\frac{-(1+2)}{1+1+1^2}=-1.$$

(2) $$原式=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+m^{m-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}$$

$$=\frac{1+1+\cdots+1+1}{1+1+\cdots+1+1}=\frac{m\times1}{n\times1}=\frac{m}{n}.$$

*习　题　1.4

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x}{x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{\sin2x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan3x}{x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to0}x\cot x$；

(5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x\sin x}$；

(6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\arcsin x}{3x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x(x+3)}{\sin x}$；

(8) $\lim\limits_{h\to0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x}{x}=2\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}=2.$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{\sin2x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin3x}{3x}}{\frac{\sin2x}{2x}}=\frac{3}{2}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan3x}{x}=3\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan3x}{3x}=3.$

(4) $\lim\limits_{x\to0}x\cot x=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\tan x}=1.$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2x}{x\sin x}=2\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=2.$

(6)令 $\arcsin x=u$,则 $x=\sin u$. 当 $x\to 0$ 时 $u\to 0$,于是原式$=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{2u}{3\sin u}=\dfrac{2}{3}$.

(7)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+3)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}(x+3)=3$.

(8)
$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2\cdot\sin\dfrac{2x+h}{2}\cdot\sin\dfrac{h}{2}}{h}$$
$$=-2\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+\dfrac{h}{2})\cdot\sin\dfrac{h}{2}}{h}$$
$$=-\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}=-\sin x.$$

2. 计算下列极限;

(1)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$; (2)$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}$;

(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^x$; (4)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-2x}{2-2x}\right)^x$.

解 (1)分子、分母同除以 x.

$$原式=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dfrac{x}{x}}{\dfrac{1+x}{x}}\right)^x=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

(2)原式$=\lim\limits_{x\to 0}[1+(-x)]^{\frac{1}{-x}\cdot(-2)}=\mathrm{e}^{-2}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

(3)
$$原式=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}\right)^x=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-\dfrac{x}{2}}\right)^{-\frac{x}{2}\cdot(-2)}}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{-2}}=\mathrm{e}^3.$$

(4)
$$原式=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2(1-x)}\right)^{-\frac{1}{2}(2(1-x)-2)}\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2(1-x)}\right)^{2(1-x)}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2(1-x)}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

习 题 1.5

1. 指出下列各题哪些是无穷小量?哪些是无穷大量?

(1)$f(x)=\dfrac{x-2}{x}$,当 $x\to 0$ 时;

(2) $f(x)=\ln x$，当 $x\to0^+$ 时；

(3) $f(x)=10^{\frac{1}{x}}$，当 $x\to0^+$ 时；

(4) $f(x)=10^{\frac{1}{x}}$，当 $x\to0^-$ 时；

(5) $f(x)=1-10^{\frac{1}{x}}$，当 $x\to\infty$时.

解 (1)当 $x\to0$ 时，$(x-2)\to-2$. 显然 $f(x)=\dfrac{x-2}{x}$是无穷大量.

(2)当 $x\to0^+$ 时，$f(x)=\ln x$ 无限地趋近于$-\infty$. 显然 $f(x)=\ln x$ 是无穷大量.

(3)当 $x\to0^+$ 时，$f(x)=10^{\frac{1}{x}}$无限地趋近于$+\infty$. 显然 $f(x)=10^{\frac{1}{x}}$是无穷大量.

(4)当 $x\to0^-$ 时，$\dfrac{1}{x}$无限地趋近于$-\infty$. 显然 $f(x)=10^{\frac{1}{x}}$无限地趋近于 0，所以 $f(x)=10^{\frac{1}{x}}$是无穷小量.

(5)当 $x\to\infty$时，$\dfrac{1}{x}$无限地趋近于 0，$10^{\frac{1}{x}}$无限地趋近于 1. 所以 $f(x)=1-10^{\frac{1}{x}}$无限地趋近于 0，即 $f(x)=1-10^{\frac{1}{x}}$是无穷小量.

2. 下列函数在自变量怎样变化时哪些为无穷小？哪些为无穷大？

(1) $y=\dfrac{1}{x^3}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{t+1}$；

(3) $y=\cot x$；　　(4) $y=\ln x$；

解 (1)函数 $y=\dfrac{1}{x^3}$当 $x\to\infty$时为无穷小；而当 $x\to0$ 时为无穷大.

(2)函数 $y=\dfrac{1}{t+1}$当 $t\to\infty$时为无穷小；而当 $t\to-1$ 时为无穷大.

(3)函数 $y=\cot x$ 当 $x\to k\pi+\dfrac{\pi}{2}$时为无穷小；而当 $x\to k\pi$ 时为无穷大(k 为整数).

(4)函数 $y=\ln x$ 当 $x\to1$ 时为无穷小；而当 $x\to+\infty$或 $x\to0^+$ 时为无穷大.

3. 求下列极限；

(1) $\lim\limits_{x\to0}x\cos\dfrac{1}{x^2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-4x+8}{x^3+2x^2-1}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-1}{6x^3-5x^2+1}$.

解 (1)因为 $\lim\limits_{x\to0}x=0$，$\left|\cos\dfrac{1}{x^2}\right|\leqslant1$，所以根据无穷小的性质可知

$$\lim_{x\to0}x\cos\frac{1}{x^2}=0.$$

(2)因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，$|\arctan x|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{1}{2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}=0$.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4-4x+8}{x^3+2x^2-1}=\infty$.

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3-1}{6x^3-5x^2+1}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$.

4. 当 $x\to 0$ 时，$2x-x^2$ 与 x^2-x^3 相比，哪一个是较高阶的无穷小？

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-x^3}{2x-x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x^2}{2-x}=0$，所以 $x\to 0$ 时，x^2-x^3 是比 $2x-x^2$ 较高阶的无穷小.

5. 证明：当 $x\to -3$ 时，x^2+6x+9 是比 $x+3$ 较高阶的无穷小.

证 因为 $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+6x+9}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3}\frac{(x+3)^2}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3}(x+3)=0$，所以当 $x\to -3$ 时，x^2+6x+9 是比 $x+3$ 较高的阶的无穷小.

6. 当 $x\to 1$ 时，无穷小 $1-x$ 和 $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 是否同阶？是否等价？

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2}(1-x^2)}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{2}(1+x)=1$，所以当 $x\to 1$ 时，无穷小 $1-x$ 与 $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 是等价无穷小，即 $1-x\sim\frac{1}{2}(1-x^2)$.

7. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}(m\neq 0)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{\sin^2 x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-a^{-x}}{x}(a>0$，且 $a\neq 1)$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^x-e^{-x})}{2\sin x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^n}{x^m}=\lim\limits_{x\to 0}x^{n-m}=\begin{cases}0, & n>m,\\ 1, & n=m,\\ \infty, & n<m,\end{cases}$

$(\sin(x^n)\sim x^n, \sin x\sim x)$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(ax)^2}{x^2}=\frac{1}{2}a^2\left(1-\cos ax\sim\frac{1}{2}(ax)^2\right)$

(3)换元法.

设 $u=\ln x-1$，则 $x=e^{1+u}$，当 $x\to e$ 时，$u\to 0$.

原式 $=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{e^{1+u}-e}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{e(e^u-1)}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{e\cdot u}=\dfrac{1}{e}$.

(4)设 $u=a^x-1, a^x=1+u, x=\dfrac{\ln(1+u)}{\ln a}$，当 $x\to 0$ 时，$u\to 0$.

设 $t=a^{-x}-1, a^{-x}=1+t, x=-\dfrac{\ln(1+t)}{\ln a}$，当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$.

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a^x-1)-(a^{-x}-1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{-x}-1}{x}$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\frac{\ln(1+u)}{\ln a}}+\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\ln(1+t)}{\ln a}}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{u}\cdot\ln a+\lim_{t\to 0}\frac{t}{t}\cdot\ln a=2\ln a.$$

(5)原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}-\dfrac{1}{x}\ln(1-x)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{x}=1+1=2$.

(6)原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x[(e^x-1)-(e^{-x}-1)]}{2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x-1)}{2\sin^2 x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^{-x}-1)}{2\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{2x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{x(-x)}{2x^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

习　题　1.6

1. 设函数 $y=f(x)=x^2-2x+5$，求适合下列条件的自变量的增量和对应的函数的增量；

(1)当 x 由 2 变到 3；

(2)当 x 由 2 变到 1；

(3)当 x 由 2 变到 $2+\Delta x$.

解　(1)$\Delta x=3-2=1, \Delta y=f(3)-f(2)=3^2-2\times 3+5-2^2+2\times 2-5=3$.

(2)$\Delta x=1-2=-1, \Delta y=f(1)-f(2)=1^2-2\times 1+5-2^2+2\times 2-5=-1$.

(3)$\Delta x=2+\Delta x-2=\Delta x, \Delta y=f(2+\Delta x)-f(2)=(2+\Delta x)^2-2\times(2+\Delta x)+5-(2^2-2\times 2+5)=4+4\Delta x+(\Delta x)^2-4-2\Delta x=2\Delta x+(\Delta x)^2$.

2. 求函数 $y=\ln x$ 在任意正值 x 及其任意改变量 Δx 时的增量.

解　$\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x=\ln\dfrac{x+\Delta x}{x}=\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$.

3. 讨论函数 $y=f(x)=3x-2$ 在 $x=0$ 的连续性.

解法一　当自变量在 $x=0$ 处有 Δx 时，有相应的增量

$$\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=3(0+\Delta x)-2+2=3\Delta x.$$

因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}3\Delta x=0$，所以，根据原书函数连续 1.12 可知，$f(x)=3x-2$ 在 $x=0$ 处连续.

解法二　$f(x)=3x-2$ 在 $x=0$ 处有定义且 $\lim\limits_{x\to 0}(3x-2)=-2=f(0)$. 所以根据原书函数连续的定义 1.13 可知，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x+3,\ x>1\end{cases}$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$，$x=1$，$x=2$ 各点的连续性，并画出它的图像.

解　函数 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处有定义，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-1=-\dfrac{3}{4}$ 且 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(x^2-1)=-\dfrac{3}{4}=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，所以 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处连续．函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有定义，$f(1)=0$，但由于 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-1)=0$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+3)=4$，故 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续. $f(x)$ 在 $x=2$ 处有定义，$f(2)=5$，且 $\lim\limits_{x\to 2}(x+3)=5=f(2)$，所以 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续. 图像为图 1.3.

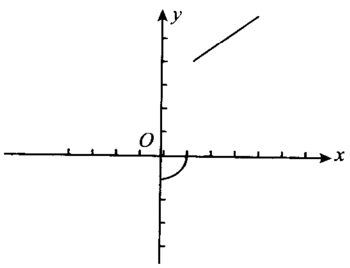


图 1.3

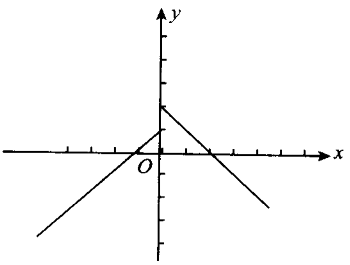


图 1.4

5. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, x<0\\ 2-x, x\geqslant 0\end{cases}$，在点 $x=0$ 的连续性，并画出它的图像.

解　函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义 $f(0)=2$，但由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2-x)=2$，故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续. 图像为图 1.4.

习　题　1.7

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+1}{x+1}$；

(3) $\lim\limits_{t\to -2}\dfrac{e^t+1}{t}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x}{2\cos(\pi-x)}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{0^2-2\times 0+5}=\sqrt{5}$.

(2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+1}{x+1}=\dfrac{2\times(-2)^2+1}{-2}=-9$.

(3) $\lim\limits_{t\to -2}\dfrac{e^t+1}{t}=\dfrac{e^{-2}+1}{-2}=-\dfrac{1}{2}e^{-2}-\dfrac{1}{2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x}{2\cos(\pi-x)}=\dfrac{\sin 2\cdot\frac{\pi}{4}}{2\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{-1}{\cos x+\sin x}=\dfrac{-1}{\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}}$

$$=\frac{-1}{2\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\dfrac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\dfrac{1}{2}$.

2. 求函数 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间，并求极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to -3}f(x)$.

解 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}=\dfrac{(x^2-1)(x+3)}{(x-2)(x+3)}$. 函数 $f(x)$ 的连续区间为 $(-\infty,-3)\cup(-3,2)\cup(2,+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}=\dfrac{1}{2}$,

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x-2}=\infty$.

$\lim\limits_{x\to -3}f(x)=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-1}{x-3}=\dfrac{(-3)^2-1}{-3-3}=-\dfrac{4}{3}$.

习 题 1.8

1. 证明方程 $x^5-3x-1=0$ 在区间 $(1,2)$ 内至少有一个实根.

证 设 $f(x)=x^5-3x-1$，$f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续. 并且 $f(1)=-3<0$，$f(2)=25>0$. 根据介值性质可知，在 $(1,2)$ 内至少有一点 $\xi(1<\xi<2)$，使得 $f(\xi)=0$，即 $\xi^3+3\xi^2-1=0$. 这个等式说明方程 $x^3+3x^2-1=0$ 在 $(1,2)$ 内至少有一个根 ξ.

2. 证明方程 $x^3+2x=6$ 至少有一个根介于 1 和 3 之间.

证 设 $f(x)=x^3+2x-6$，$f(x)$ 在 $[1,3]$ 上连续，并且 $f(1)=-3<0$，$f(3)=$