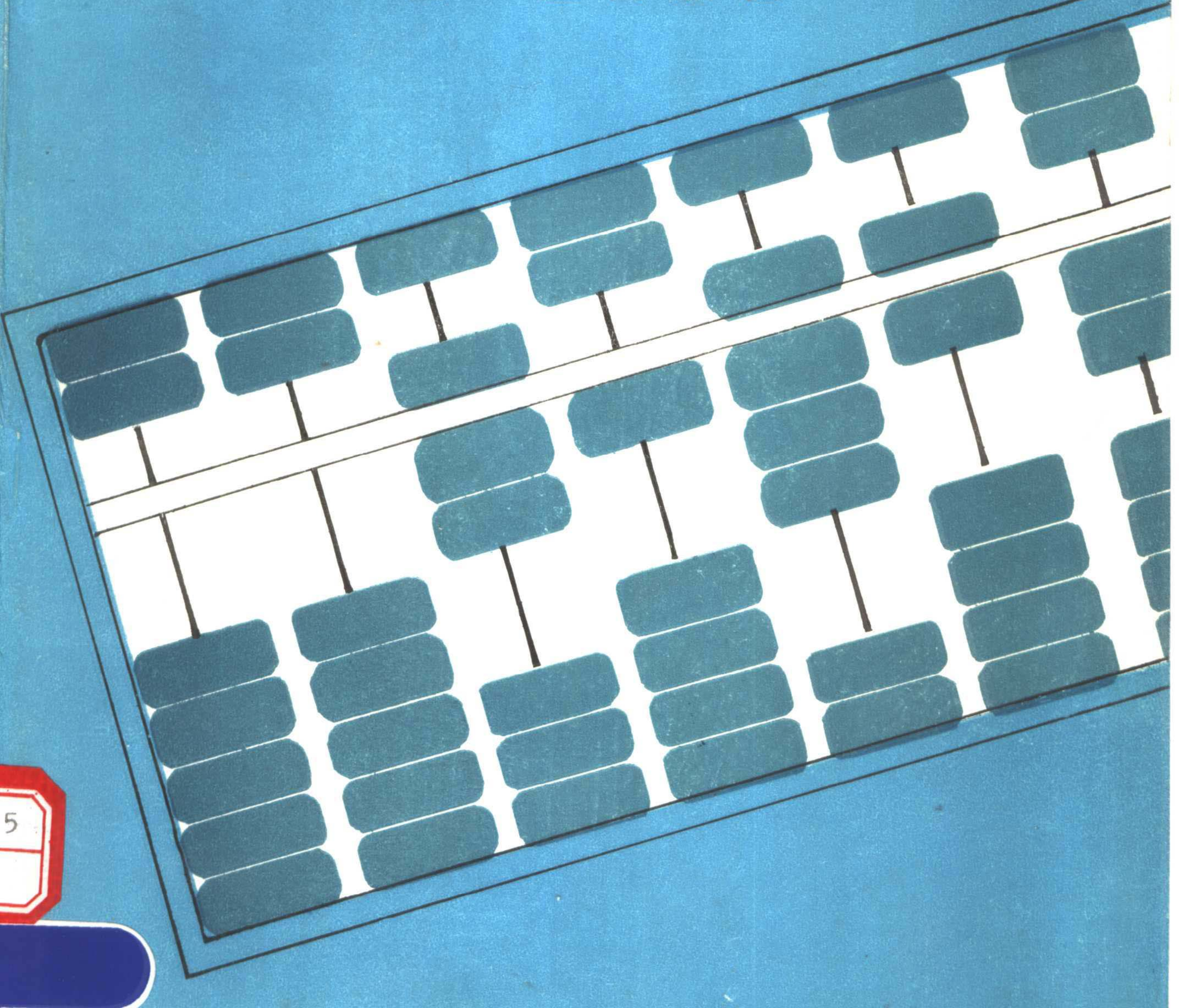
珠算累减开方

陈启鸿 著

冶金工业出版社



5

珠算累减开方

陈启鸿 著

冶金工业出版社

（京）新登字036号

内 容 简 介

珠算累减开方是应用代数乘方公式和数列公式推导演变而来的一种用珠算完成开方的运算方法。这种首创方法不同于传统方法，不必记忆首根九九，不必估算试商，也不受档数的限制，它应用珠算可以累计的特点，通过超差累减，依次直接得出各位方根。

本书可供会计员、统计员、业务员及从事有关数字计算工作的人员参考。

珠算累减开方

陈启鸿 著

*

冶金工业出版社出版发行

（北京北河沿大街嵩祝院北巷39号）

新华书店总店科技发行所经销

冶金工业出版社印刷厂印刷

*

787×1092 1/16 印张3 1/2字数 79 千字

1992年12月第一版 1992年12月第一次印刷

印数00,001～2,200册

ISBN 7-5024-1103-8

O·20 定价3.00元

前　　言

开方是求方根的运算。它广泛地应用于编制国民经济计划、分析与检查计划执行的结果；计算各种指标的平均发展速度与平均增长（递增）速度。随着四个现代化的发展，计算任务日趋繁重，开方运算的用途也日益广泛。日本珠算界规定：珠算等级检定在段位一级的，就必须掌握开平方和开立方的计算技术。可见，珠算开方运算，已日益被人们所重视。

目前，珠算开方的方法，求首根（即第一位根）时，一般用方根九九；求次根（即第二位根）以及次根后各位方根时，必须估算试商。因此，除平方九九和数值较小的立方九九较易记忆外，一般都不易记忆。而求次根及其后各位方根试商时，估算又较繁杂。本文介绍的开平方是应用奇数连续累减的方法，开立方、开五次方和开七次方则应用超差累减的方法，这两种方法统称为“剥皮法”。这种方法，不同于传统的方法，不必记忆首根九九，不必估算试商，也不受档数的限制，它应用算珠可以累计的特点、通过超差累减，依次直接得出各位方根。其运算原理也适用开十次以上的高次方。

本文在编写过程中，承蒙珠算界前辈周全中老先生及北京珠算协会副会长戴克让同志的指导，谨此表示感谢。

由于作者水平有限，错误之处，欢迎批评指正。

作　者

目 录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

珠算累减开方法，是从代数乘方公式和数列公式推导、演变而来的一种用珠算完成开方的运算方法。应用累减开方法进行开方运算，不必记忆首根九九（指求首根），也不必估商试算（指求次根及以后各位方根），它利用珠算可以累计的特点，通过累减运算，依次直接得出各位方根。这种方法不但可以完成对正数的开平方和开立方的运算，还可以进行开高次方的运算。

累减开方法，分为奇数连续累减、超差累减和一般累减三种方法。奇数连续累减适用于开平方运算；超差累减应用于开立方、开五次方和开七次方的运算。一般累减应用于开十次方以上根指数为质数的高次方运算。这三种方法统称为累减开方法。

在经济计算工作中，开方应用较广的是开平方、开立方和开五次方，而开平方和开立方用途更广。下面主要介绍珠算累减开平方、开立方、开五次方和开七次方的方法及其原理。我们掌握了上述方法和原理，就可以对根指数不是质数的正数求高次方根。方法是将根指数进行因数分解，把求高次方根化为求低次方根。如求15次方根，将根指数15分解为3×5，先求立方根，再求5次方根；求30次方根，将根指数30分解为$2\times3\times5$，可先求平方根，再求立方根，最后求5次方根等等。对于求根指数为质数的高次方根（如求11次方根、13次方根、17次方根……）开方的通式与方法，亦将作简述。

一、开　平　方

下面讨论开平方的步骤。

1．布数

开平方需要多档算盘，档数不够，用两面算盘连接使用。布数时分两段，被开方数拨在算盘的右边。所求得的平方根拨在被开方数的前两档上。被开方数的整数部分从个位向左，小数部分从个位向右。每两位一节（也可用空档表示），每一节得平方根一位。

2．求首根（即第一位根，下同）

从被开方数首节减去平方九九，心算得首根，并将首根拨在被开方数的前两档上。

3．求次根（即第二位根，下同）

将首根乘以20❶（或首根加倍乘以10，可用心算），逐次加上从1开始的连续奇数，并从被开方数首节余数和第二节中减去（如本节无余数，则从第二节减去），直至余数小于应当减去的下一个奇数时为止。减去连续奇数几次，就在被开方数前依次拨上几，就是所求的次根。

4．求其余各位根，方法与求次根同

求小数方根与求整数方根同，可直接按布数的分节定位。

例 1　$\sqrt{1936}=44$

解：将被开方数1936分为19′39两节，应得整数平方根两位。

计算如下：

---

❶ 将首根或方根乘以20，这20是一个常数。因为一个两位数 $(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2$ 的等号右边首项 $100a^2$ 的方根是$10a$，也就是首根。从被开方数中减去后还剩$20ab+b^2$，令$b=1$，则 $20ab+b^2=20a+1$。等式左边第一项20就是求首根以后各位根的常数。

方根	被开方数	
	19′36	
+4	………………………………	定首根为4，
	−16 ……………	减首根4^2。
4	3′36	求次根。
	−81…………	减首根$4\times20+1$；
	−83…………	减首根$4\times20+3$，即81的连续奇数；
	−85…………	减首根$4\times20+5$，即83的连续奇数；
	−87…………	减首根$4\times20+7$，即85的连续奇数。
+4	………………………………	减去四次，无余数，得次根4。
44	0	
（方根）		

例 2 $\sqrt{1522756}=1234$

解：将被开方数1522756分为1′52′27′56四节，应得整数平方根四位。计算如下：

方根	被开方数	
	1′52′27′56	
+1	………………………………	定首根为1，
	−1……………	减首根1^2。
1	52′27′56	求次根。
	−21…………	减首根$1\times20+1$；
	−23…………	减首根$1\times20+3$，即21的连续奇数；
2+	………………………………	减去二次，余数<$1\times20+5$，不够减，得次根2。
12	8′27′56	求三根。
	−2 41………………	减方根$12\times20+1$；
	−2 43………………	减方根$12\times20+3$，即241的连续奇数；
	−2 45………………	减方根$12\times20+5$，即243的连续奇数；
+3	………………………………	减去三次，余数<$12\times20+7$，不够减，得三根3。
123	98′56	求四根。
	−24 61……………	减方根$123\times20+1$；
	−24 63……………	减方根$123\times20+3$，即2461的连续奇数；

−24 65……………减方根123×20+5，即2463的连续奇数；

−24 67……………减方根123×20+7，即2465的连续奇数。

+ 4 ………………………………减去四次，无余数，得四根为4。

1234	0

(方根)

按照上述奇数累减方法开平方，它的累减次数等于方根（不包括首根）各位数之和加1。如上述平方根1234，要累减10次（即2+3+4+1）。如果平方根为9875，就要累减21次（即8+7+5+1），为简化累减次数可以采用下列方法计算。

因为一个次根为5的两位数 $(10a+5)^2=100a^2+100a+25$，其中 $100a^2$，即首根$10a$，$100a+25$为次根，如被开方数余数$=100a+25$时，则次根为5；被开方数余数$>100a+25$时，则要分两步计算，先求次根5，再补求次根1、2、3、4，即依次递减连续奇数，从而得次根6、7、8、9。

例如首根为8，当被开方数余数为825时（即$=100a+25$），则次根为5。如余数>825时，则先求次根5，再补求次根1、2、3、4（即递减连续奇数171、173、175、177），从而得次根6、7、8、9等数。

上述求次根方法，对其余各位根都适用。

例 3 $\sqrt{90'25}=95$

解：将被开方数9025分为90′25两节，应得整数平方根两位，计算如下：

方根	被开方数
	90′25

+ 9 ………………………………定首根为9；

−81…………减首根9^2。

9	9′25	余数$=100a+25$。

+5……………………………………定次根为5；

−9 25……………减$9\times100+25$。

95	0

(方根)

例 4 $\sqrt{4489}=67$

解：将被开方数4489分为44′89两节，应得整数平方根两位。计算如下：

方根	被开方数
	44′89

+ 6 ………………………………………定首根为6；

	−36	……………减首根6^2。
6	8′89	余数>625，即>$100a+25$，
+5	−6　25	……………………先定次根5，减$6\times100+25$。
65	2′64	
	−1　31	……………………减方根$6.5\times20+1$或$65\times2+1$，下同；
	−1　33	……………………减方根$6.5\times20+3$，即131的连续奇数。
+2		……………………………………又减两次，无余数，次根补加2。
67	0	

（方根）

如果被开方数余数略<$100a+25$（即略小于次根为5的应减数，a为首根），则可改减为加，依次加上次根为5、4的递减连续奇数(即$2n-1$。这里n表示首根和假设的次根5、4，加的顺序是5、4……先大后小)，使所加的和数≥$100a+25$时，再从和数中减去$100a+25$，则次根为5减去所加的次数（即虚加的根次数）。求其余各位根同。

例 5　　$\sqrt{7056}=84$

解：将被开方数7056分为70′56两节，应得整数平方根两位。计算如下：

方　根	被　开　方　数	
	70′56	
+8	−64	………………定首根8，首节减8^2。
8	6′56	余数<825，即<$100a+25$。
	+1　69	……………虚加$85\times2-1$，即$2n-1$，次根虚加1。
8	8′25	余数$=100a+25$。
(+5−1)	−825	………………减$100\times8+25$，无余数。次根5，减虚加1次，得
84	0	次根4，

（方根）

如果被开方数余数略<$200a+100$❶（即略小于次根为10的应减数，a为首根)，则可改减为加，依次加次根为10、9……的递减连续奇数（即$2n-1$。这里n表示已求得的首根和假设的次根，顺序是10、9……，先大后小），直至所加的和数≥$200a+100$时，从和数中减去$200a+100$，则次根为10减去所加的次数（即虚加的根次数）。求其余各位根同。

例 6　　$\sqrt{33.5241}=5.79$

解：将被开方数33.5241分为33.′52′41三节，应得平方根整数一位。计算如下：

---

❶因为$(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2$，等号右边第一项$100a^2$的方根为$10a$（即首根），从被开方数减去得：

$$20ab+b^2$$

令$b=10$　则得　$200a+100$　或　$100\times(2a+1)$

方根	被开方数	
	33′52′41	
+5	−25……………………………	定首根5，首节减5^2。
5	8′52′41	余数＞525，即$100a+25$。
+5	−525………………………	先定次根5,减$5\times100+25$。
55	3′27′41	
	−1 11………………………	减方根$5.5\times20+1$;
	−1 13………………………	减方根$5.6\times20+1$，即111的连续奇数;
+2………………………………	………………	又减2次，次根补加2。
57	1′03′41	余数略＜$200\times57+100$。
	+11 59…………………	虚加$580\times2-1$，即$2n-1$。
57	1′15′00	
(+10−1)	−1 15 00………………	减方根$57\times200+100$,无余数。
5.79	0	三根10，减虚加1次，得三根9。

（方根）

上列例3、例4、例5．例6可以减少运算次数。

应用奇数累减开平方的原理。设首项a_1，公差d，项数n，第n项a_n，n项之和为S_n。因等差数列的通项为:

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

在从1开始的奇数等差数列中$a_1=1$　$d=2$　代入上式得:

$$a_n=1+(n-1)2=2n-1$$

$$由于S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n$$

$$将a_n代入S_n=\frac{n[1+(2n-1)]}{2}=n^2$$

因此，一个被开方数连续减去从1开始的连续奇数,减到某个奇数不够减或无余数时，所减连续奇数的次数，即n就是所求的平方根。

例:

$$1=1^2$$

$$1+3=4=2^2$$

$$1+3+5=9=3^2$$

$$1+3+5+7=16=4^2$$

$$1+3+5+7+9=25=5^2$$

……………………………………

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+2n-1=n^2$$

二、开 立 方

下面讨论开立方的步骤。

1．布数

开立方需要多档算盘，档数不够，可用算盘连接使用。盘面分四段，被开方数拨在右段，方根拨在左边档上，中段左侧作运算用（一次一清，可应用心算，也可另用算盘运算），中段右侧为超差累计。各段的幅度可视需要而定。被开方数的整数部分从个位向左，小数部分从个位向右，每三位一节（也可用空档表示），每节得立方根一位。

2．求首根（即第一位根，下同）

从被开方数首节依次连续减去1、$1+(1\times6)$、$7+(2\times6)$、$19+(3\times6)$、$37+(4\times6)$、$61+(5\times6)$、$91+(6\times6)$、$127+(7\times6)$、$169+(8\times6)$、……（上式括号内数值为通式$(n-1)\times6$，n为1、2、3……正整数，以下同；括号前数值为超差累计数，由于珠算有累计的特点，逐次运算已在超差累计段直接反映，因此只要计算通式$(n-1)\times6$就可以）。直到首节小于应减去的下一个数为止，每减一次就在算盘左边一段加1，所加之数就是首根。

3．求次根（即第二位根，下同）

A、从被开方数首节余数和第二节中（如首节为1、27、64……立方九九时，则无余数）减去求首根时的最后一个减数（即超差累计数）减1后乘以100，再加上首根乘以330❶加1（即超差累减开立方的进位通式），并在算盘左段方根第二位上加1。

B、将A从被开方数中减去的减数，加上已求得的方根乘以6，即超差累减通式$(n-1)\times6$，从被开方数中减去，并在左段方根第二位上加1。

C、按B方法依次往下减，直至本节余数小于应减去的下一个数为止，每减一次，就在方根第二位上加1，方根第二位上所加的数，就是次根。

4．求其余各位根

方法与求次根同。此外，应注意的是：如次根为零（或已求的方根有一个零），则将求首根（或前一位不是零的根）时减去的最后一个减数减1后乘以100^2，再加上方根乘以3030，接着按B、C方法运算；如次根和三根均为零（或已求得的方根有连续两个零），则

---

❶ 330是一个常数：因为一个两位数$(10a+b)^3=1000a^3+300a^2b+30ab^2+b^3$，等号右边第一项$1000a^3$的方根是$10a$（即首根），从被开方数减去后，得$300a^2b+30ab^2+b^3$，令$b=1$　　则得：$300a^2+30a+1$

当$a=1$时　$300\times1^2+30\times1+1=[1+(0\times6)-1]\times100+(1\times330)+1$

当$a=2$时　$300\times2^2+30\times2+1=[1+(1\times6)-1]\times100+(2\times330)+1$

当$a=3$时　$300\times3^2+30\times3+1=[7+(2\times6)-1]\times100+(3\times330)+1$

当$a=4$时　$300\times4^2+30\times4+1=[19+(3\times6)-1]\times100+(4\times330)+1$

…………………………………………………………

上列等式右边〔　〕×100的数值，就是从被开方数减去的最后一个减数（即超差累计数）减1后乘以100；（　）内的330是常数，求其余各位根时，只要已求得的方根不含零，都应用这个常数。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

应将最后一个减数减1后乘以100^3，再加上方根乘以30030[1]，余类推。

求小数方根与求整数方根同，可直接按布数的分节定位。

可见，如次根为零（或方根中有一个零），这个常数应是3030；次根和三根均为零（或方根中有连续两个零），这个常数应是30030，余类推。

例 1　　$\sqrt[3]{1771561}=121$

解：将被开方数1771561分为1′771′561三节，应得整数立方根三位。计算如下：

方根	运算	累计	被开方数	
			1′771′561	
+1		①1	−1	首节减①，得首根1。
1		1	771′561	求次根。
		0		①减1后乘100;
+1	②331	③331	−331	二节减③，次根加1；
+1	④66	⑤397	−397	二节减⑤，次根加1。减去两次，余数不够减，得次根2。
12		397	43′561	求三根。
		⑥39600		⑤减1乘100;
+1	⑦3961	⑧43561	−43 561	余数减⑧，无余数，得三根。
121			0	

（方根）

注：运算段一般可应用心算，如数值较大，也可另用算盘运算。

说明：

①首节减1^3。

②331 = 首根1 × 330 + 1。

③同②。

④66 = 方根11 × 6，即应用超差累减通式 $(n-1)\times 6$，下同

⑤397 = ④ + ③。

⑥39600 = （⑤ − 1）× 100。

⑦3961 = 方根12 × 330 + 1。

⑧43561 = ⑦ + ⑥。

例 2　　$\sqrt[3]{1749690125}=1205$

---

[1] 当$a=10$时（即次根为零）

$$\begin{aligned}
\text{则}\ 300a^2+30a+1 &= 300\times 10^2+30\times 10+1\\
&=10\times(3000+30)+1\\
&=10\times 3030+1
\end{aligned}$$

当$a=100$时（即次根、三根均为零）

$$\begin{aligned}
\text{则}\ 300a^2+30a+1 &= 300\times 100^2+30\times 100+1\\
&=100(30000+30)+1\\
&=100\times 30030+1
\end{aligned}$$

……………………………

解： 将被开方数1749690125分为1′749′690′125四节，应得整数立方根四位。计算如下：

方根	运算	累计	被开方数	
			1′749′690′125	
+1		①1	−1	……首节减①，得首根1。
1		1	749′690′125	求次根。
		0		……①减1后乘100;
+1	②331	③331	−331	……二节减③，次根加1;
+1	④66	⑤397	−397	……二节减⑤，次根加1;减去二次，余数不够减，得次根2。
120		397	21′690′125	余数≤(⑤−1)×100,则三根为0。
		⑥3960000		……⑤减1后乘100^2;
+1	⑦363601	⑧4323601	−4 323 601	…余数减⑧，四根加1;
+1	⑨ 7206	⑩4330807	−4 330 807	…余数减⑩，四根加1;
+1	⑪ 7212	⑫4338019	−4 338 019	…余数减⑫，四根加1;
+1	⑬ 7218	⑭4345237	−4 345 237	…余数减⑭，四根加1;
+1	⑮ 7224	⑯4352461	−4 352 461	…余数减⑯，无余数，减去5次，得四根5。
1205			0	

（方根）

注：1. 运算段一般可应用心算，如数值较大，也可另用算盘运算。

2. 运算段⑪、⑬、⑮在运算时只要在⑨的数值上每次加上6就可以，不必另算（下同）。

说明：

①首节减1^3。

②331＝首根1×330＋1。

③同②。

④66＝方根11×6。

⑥3960000＝(⑤−1)×100^2。

⑦363601＝方根120×3030＋1。

⑨7206＝方根1201×6。

⑪7212＝方根1202×6，或⑨＋6。

⑬7218＝方根1203×6，或⑪＋6。

⑮7224＝方根1204×6，或⑬＋6。

⑤、⑧、⑩、⑫、⑭、⑯为累计数。

例 3 $\sqrt[3]{262144}=64$

解： 将被开方数262144分为262′144两节，应得整数立方根两位。计算如下：

方根	运算	超差累计	被开方数
			262′144
+1		① 1	−1………………首节减①，首根加1；
+1	② 6	③ 7	−7………………首节减③，首根加1；
+1	④ 12	⑤ 19	−19………………首节⑤，首根加1；
+1	⑥ 18	⑦ 37	−37………………首节减⑦，首根加1；
+1	⑧ 24	⑨ 61	−61………………首节减⑨，首根加1；
+1	⑩ 30	⑪ 91	−91………………首节减⑪，首根加1，减去6次，余数不够减，得首根6。
6		91	46′144　　求次根。
		⑫9000	……………………………⑪减1后乘100；
+1	⑬1981	⑭10981	−10 981……………余数减⑭，次根加1；
+1	⑮ 366	⑯11347	−11 347……………余数减⑯，次根加1；
+1	⑰ 372	⑱11719	−11719……………余数减⑱，次根加1；
+1	⑲ 378	⑳12097	−12097……………余数减⑳，无余数，减去4次，得次根4。
64			0

（方根）

说明：

①首节减1^3。

②6＝首根1×6。

④12＝首根2×6，或②＋6。

⑥18＝首根3×6，或④＋6。

⑧24＝首根4×6，或⑥＋6，

⑩30＝首根5×6，或⑧＋6。

⑫9000＝（⑪－1）×100。

⑬1981＝首根6×330＋1。

⑮366＝方根61×6。

⑰372＝方根62×6，或⑮＋6。

⑲378＝方根63×6，或⑰＋6。

③、⑤、⑦、⑨、⑪、⑭、⑯、⑱、⑳为累计数。

求首根时，也可以直接从被开方数首节中减去立方九九，心算得方根。但是用这种方法求次根时，应减去首根的平方乘以300加首根乘以30加上1，即$300a^2+30a+1$●，并在

●：一个两位数 $(10a+b)^3=1000a^3+300a^2b+30ab^2+b^3$，等号右边第一项$1000a^3$的立方根为$10a$，从被开方数减去后，得$300a^2b+30ab^2+b^3$。令$b=1$

则得：$300a^2+30a+1$或 $(300a+30)a+1$

因此，从被开方数首节中直接用减去立方九九的方法求首根，则在求次根时，应将首根平方后乘以300，再加首根乘以30。

左段方根第二位上加上1。接着再按前述B、C方法依次累减求得次根。

例 4 $\sqrt[3]{262144}=64$

解：将被开方数262144分为262′144两节，应得整数立方根两位。计算如下：

方根	运算	累计	被开方数	
			262′144	
+6			−216	……………首节减6^3，得首根6。
6			46′144	求次根。
+1	①10981	②10981	−10 981	…………余数减②，次根加1；
+1	③ 366	④11347	−11 347	…………余数减④，次根加1；
+1	⑤ 372	⑥11719	−11 719	…………余数减⑥，次根加1；
+1	⑦ 378	⑧12097	−12 097	…………余数减⑧，无余数，减去4次，得次根4。
64			0	
(方根)				

说明：

①10981＝首根$6^2\times300$＋首根$6\times30+1$，即$300a^2+30a+1$。

②同①。

③366＝方根61×6。

④＝②＋③。

⑤372＝方根62×6。或③＋6。

⑥＝⑤＋④。

⑦378＝方根63×6，或⑤＋6。

⑧＝⑦＋⑥。

为简化运算次数，如果被开方余数略$<(a^2+10a)30+1000$● （即略小于次根为10的应减数，a为首根），可依次加上次根为10、9……的累计应减数即$(3(n^2-n)+1$●。这里n表示已求得的首根和假设的次根，顺序应是10、9……先大后小)，直至所加的和数$\geqslant(a^2+10a)30+1000$时，从和数中直接减去$(a^2+10a)\times30+1000$，则所得的次根为10减去所加的次数（即虚加的根次数）。求其余各位根同。

例 5 $\sqrt[3]{6751269}=189$

解：将6751269分为6′751′269三节，应得整数立方根三位。计算如下：

●因为$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，等号右边第一项$a^3$的方根为$a$（即首根），从被开方数减去后得：

$$3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad 令b=10$$

则得：$30a^2+300a+1000=(a^2+10a)30+1000$

●$3(n^2-n)+1$是开立方的累减通式（见应用超差累减开立方的原理）。为了区别进位通式和累减通式，分别以a和n来表示，a、n均为1、2、3……正整数，以下同。

方根	运	算	累计　被开方数	
			6′751′269	
+1		①1	−1	……首节减①，得首根 1 。
1			5′751′269	余数＜$(a^2+10a)\times30+1000$。
		0		……①减 1 后乘100。
	②1141	③1141	+1 141	……二节加③，次根虚加 1 ；
	④ 114	⑤1027	+1 027	……二节加⑤，次根虚加 1 ；
1			7′919′269	和数＞$(a^2+10a)\times30+1000$。
(+10−2)	⑥7000	⑦7000	−7 000	……和数减⑦，次根10减虚加2次，得次根 8 。
18			919′269	余数＜$(a^2+10a)\times30+1000$。
	⑧107731	⑨107731	+107 731	……三节加⑨，三根虚加 1 。
18			10′27′000	和数＝$(a^2+10a)\times30+1000$。
(+10−1)	⑩1027000	⑪1027000	−10 27 000	……和数减⑪，三根10，减虚加一次，得三根 9。
189			0	
(方根)				

说明：②1141＝$3(20^2-20)+1$，即$3(n^2-n)+1$，下同。

③同②。

④114＝19×6，即$(n-1)\times6$。

⑤1027＝③－④，或$3(19^2-19)+1$。

⑥7000＝$30\times(10^2+10\times10)+1000$，即$(a^2+10a)30+1000$，下同。

⑦同⑥。

⑧107731＝$3(190^2-190)+1$。

⑨同⑧。

⑩1027000＝$30\times(180^2+180\times10)+1000$。

⑪同⑩。

应用超差累减开立方的原理：

从下列数值可以看出一个正整数三次乘方的规律：

n	n^3		$(n-1)^3+a_n$		$(n-1)^3+a_{n-1}+(a'_n\times6)$
1	1	＝	0＋　1	＝	0＋　1＋（0×6）
2	8	＝	1＋　7	＝	1＋　1＋（1×6）

3	27	=	8 + 19	=	8 +	7 +	(2 × 6)
4	64	=	27 + 37	=	27 +	19 +	(3 × 6)
5	125	=	64 + 61	=	64 +	37 +	(4 × 6)
6	216	=	125 + 91	=	125 +	61 +	(5 × 6)
7	343	=	216 + 127	=	216 +	91 +	(6 × 6)
8	512	=	343 + 169	=	343 +	127 +	(7 × 6)
9	729	=	512 + 217	=	512 +	169 +	(8 × 6)

……………………………………………………………………

上列括号内数值为超差累减通式$6(n-1)$，前项1、2、3……为$(n-1)$，后项6是定值。括号前两项为超差累计数。

设 $n^3=(n-1)^3+a_n$ ……………………………………①

$n^3=(n-1)^3+a_{n-1}+6a_n'$ ……………………………………②

由式①得：

$$a_n=n^3-(n-1)^3$$
$$=n^3-(n^3-3n^2+3n-1)$$
$$=3n^2-3n+1 \cdots\cdots ③$$

式①－②及③代入得：

$$a_n=a_{n-1}+6a_n' \cdots\cdots ④$$

$$a_n'=a_k'=\frac{1}{6}[a_n-(a_{n-1})]$$

$$=\frac{1}{6}[3n^2-3n+1-3(n-1)^2+3(n-1)-1]$$

$$=\frac{1}{6}[6n-6]=n-1$$

$$6a_n'=6(n-1) \cdots\cdots ⑤$$

由式④得：

$$a_n=a_{n-1}+6a_n'$$
$$=a_{n-2}+6(a_{n-1}'+a_n')$$
$$\cdots\cdots$$
$$=a_0+6(a'_1+a'_2+a'_3+\cdots\cdots+a_{n-1}'+a_n')$$
$$=1+6\sum_{k=1}^{n}a_k' \cdots\cdots ⑥$$

将式⑥代入式①得：

$$n^3=(n-1)^3+1+6\sum_{k=1}^{n}a_k'$$

$$=1+(n-1)^3+\sum_{k=1}^{n}6(n-1)$$

证明：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com