大学数学系列丛书

微积分辅导(上)

Weijifen Fudao

龚漫奇　吴灵敏　缪克英　编著

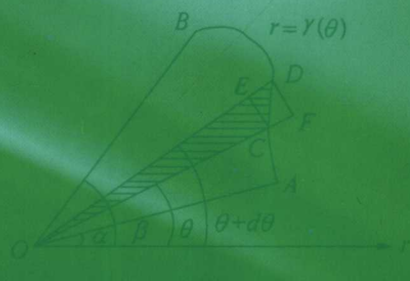
$$S_{\triangle OCD}=dS=\frac{1}{2}r(\theta)^2d\theta$$

$$CD=dl=r(\theta)d\theta$$

$$ED=r(\theta+d\theta)-r(\theta)=r'(\theta)d\theta$$

$$(CE)^2+(ED)^2=(CD)^2$$

$$(r(\theta)d\theta)^2+(r'(\theta)d\theta)^2=(dl)^2$$



清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
北京交通大学出版社
http://press.bjtu.edu.cn

大学数学系列丛书

微积分辅导（上）

龚漫奇　吴灵敏　缪克英　编　著

清华大学出版社
北京交通大学出版社
·北京·

内容简介

本书共分6章，主要内容包括：预备知识、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用。此外，本书后附有模拟试卷及其参考答案。

本书可作为高等院校理工科各微积分课程的辅导教材，也可供各类成人教育和自学考试人员使用。

图书在版编目（CIP）数据

微积分辅导．上/龚漫奇，吴灵敏，缪克英编著．—北京：清华大学出版社；北京交通大学出版社，2006.9

（大学数学系列丛书）

ISBN 7－81082－848－7

Ⅰ．微…　Ⅱ．①龚…　②吴…　③缪…　Ⅲ．微积分－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第093454号

责任编辑：黎　丹

出版发行：清华大学出版社　邮编：100084　电话：010－62776969

北京交通大学出版社　邮编：100044　电话：010－51686414

印 刷 者：北京市梦宇印务有限公司

经　　销：全国新华书店

开　　本：185×230　印张：19.25　字数：431千字

版　　次：2006年9月第1版　2006年9月第1次印刷

书　　号：ISBN 7－81082－848－7/O・42

印　　数：1～5 000册　定价：28.00元

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评，我们表示欢迎和感谢。

投诉电话：010－51686043，51686008；传真：010－62225406；E-mail：press@center.bjtu.edu.cn。

“大学数学系列丛书”
编写委员会成员名单

总序

随着人类进入21世纪，科学技术的发展日益迅猛。在当今这个信息时代中，各种竞争的关键就是科学技术的竞争，科学技术的竞争突出地体现在人才的竞争上，而人才的竞争其实就是教育的竞争。当前的知识经济时代，将对人类知识和科学技术的发展、经济增长因素和方式乃至社会生活，引发新的、深刻的变化。在知识经济时代，国家的竞争能力和综合国力的强弱，不仅取决于其拥有的自然资源，更重要的是取决于科学技术和知识更新的发展水平，尤其是知识创新与技术创新的能力。知识经济的第一资源是智力资源，拥有智力资源的是人才，人才来自教育。要提高民族的创新能力，归根到底要提高全体民众的教育水平，培养大批具有创新意识、创新精神和创新能力的人才。

在我国的高等教育中，数学教育可以说起着举足轻重的作用。许多专家指出，数学教育在人类的精神营养中，确实有"精神钙质"的作用，因为数学对一个人的思想方法、知识结构与创造能力的形成起着不可缺少的作用。很难想像，一个数学知识贫乏的人，会在科学上有所建树。因此，全面提高我国理工科大学中非数学专业大学生的数学水平，将关系到我国各行各业中高级专门人才的素质和能力，关系到我国未来科学技术的发展水平和在世界上的竞争力，是国家百年树人基业中的重要一环。

正是基于以上的考虑，我们借鉴了我国近几年高等学校教学改革，特别是数学教学改革的经验，借鉴近几年我校数学教学改革的一些实践与做法，组织一批在大学数学公共课教学中有丰富教学经验的教师，在精心筹划、多方面研讨的基础上，编写了这一套"大学数学系列丛书"。

本系列教材在大学数学的三门重要的基础课教材——《微积分》、《线性代数与解析几何》、《概率论与数理统计》上下了很大的工夫。我们不仅按照教学的基本要求仔细编写了各章的内容，而且在各章中也融入了当前教学改革的一些经验；同时注意编写了与主教材配套的辅导教材，这样可以帮助学生更好地理解主教材中的内容和学习方法。在辅导教材的编写上，我们注重对主教材内容知识的扩展，同时也帮助学生掌握好各门课程的学习方法。但是，我们反对将主教材中的习题在辅导教材中简单地给出题解的做法。我们认为，这种做法

是对大学生的学习积极性和创造性的扼杀。另外，为了适应目前大学数学教学改革的需要，我们编写了《数学实验基础》和《数学建模基础》两本教材。我们认为，数学实验、数学建模与传统大学数学教学内容相结合，将会极大地丰富数学教学内容，增强大学生学习数学、应用数学的兴趣与积极性，为他们在将来的工作中想到数学、运用数学解决实际问题打下一个良好的基础。同时，数学实验课与数学建模课的开设，将会给传统的数学教学方法带来更有意义的改革。另外，为了配合我校的“高等数学方法 ”选修课及参加北京市大学生（非数学专业）数学竞赛培训的需要，我们还编写了《高等数学方法导引》教材，使大学生中有数学天赋的同学能更进一步地掌握高等数学的解题方法。

本系列教材在编写过程中，得到了北京交通大学教务处的大力支持，在教材的出版中，得到了北京交通大学出版社的热情帮助，在此，本系列丛书的全体编委向他们表示衷心的感谢。

本系列教材适用于高等院校的理工科专业和经济管理类专业的数学教学，也可以作为相关专业学生的自学教材和培训教材。

本系列教材的编写是大学数学基础课教学中的一种探索，其中一些做法，欢迎各方读者在对教材的使用与阅读中评头论足，不吝赐教，我们将在今后的修改中使其更加完善。

“大学数学系列丛书”编写委员会

2006 年 9 月

前 言

微积分是高等院校理工科各专业必修的一门学时最多的基础课，总地来说这门课有以下3个特点。

(1) 门坎高。开课伊始学的就是这门课中最难理解的“极限的 ε-δ 语言定义”。

(2) 内容多。首先微积分所涉及的初等数学几乎包括了全部的中学数学；其次微积分作为大学数学的基础课，它包含了众多其他数学课的基础内容，这些课程包括：数理逻辑、实变函数（多学时内容）、线性代数、空间解析几何、偏微分方程、线性规划、非线性规划、积分变换、复变函数等；再有，微积分需要记忆的内容较多，仅微积分下册需要记忆的定理和公式就有50多个，而且这些公式是很难在考场上凭逻辑临时推出的。

(3) 难度大。微积分的基本概念都是非常抽象的，有些甚至带有哲学色彩，所以很难理解。另外，微积分含有一些难度极大的题目。

正是基于微积分课程的以上3个特点，我们编写了《微积分辅导》（上、下册），希望能够帮助学生学好这门课。下面从两个方面介绍如何利用该书来学习微积分。

第一，为了透彻理解和灵活掌握微积分，建议在使用本书时，首先应熟知每一章的基本内容，然后再看例题。看例题时，先只看题目，不看分析与解答，自己想一想，动手算一算，尽量能自己给出结果，然后再去看例题的分析和解答。也许有人会认为这样做太浪费时间，尤其是经过较长时间的思考仍然没有得出正确的结论时。实际上经过多年的教学实践证明，在学习效果上，主动而深刻地对典型问题的思考要比被动地接受大量的解题信息要好得多，而且在主动思考没有得到正确解时也是如此。这是因为在长时间思考没有得到正确解后再看正确的解答会给人留下更加深刻的印象。另外，对于不是自己独立做出的题目，应注意其解题思路，等过一段时间，已经淡忘了该题的解题过程后，再重解该题看能否想起它的解题思路并给出正确解，这是一种较好的反复学习的方法。

第二，从现实的角度，尤其是对数学基础不太好的学生，针对上面提到的学习微积分课的3个难点，下面给出具体的学习对策。对于开始上课就碰到最难理解的“极限的 ε-δ 语言定义”，首先要多从直观的角度去理解极限，然后考查严格定义是怎样从直观中抽象出来的；

如果还是难于理解，可先将 ε-δ 的定义背记下来，反复默写，即使一时不能理解也没关系，只要在后面的学习中反复地对比思考，一般都会逐渐加深对 ε-δ 语言的理解。另外，即使最终还不能理解微积分中“ε-δ 语言”，也不妨碍学习微积分的基本原理和基本应用。对于学习微积分的第二个难点：内容多，其实本书的主要目的就是为了帮助学生克服这一困难的。面对众多的内容和多变的题型，最重要的就是多记、多看、多练。所谓“多记”，就是对于必须记忆的公式和定理（即本书的基础内容部分）要熟记于心。注意“多记”是指反复地记，而不是大量地记。所谓“多看”，就是要多看一些题目，多看一些典型例题的解法。最后，也是最重要的，是“多练”，因为记下了公式不等于会用公式，看懂了别人解题并不能说明自己会解题（经常出现这样的事情，考试后教师说某题我讲过，但该题的得分率却很低，学生说讲的时候都懂，一做题就不会了）。为此下面推荐一种效率较高的复习方法（即“多练”的方法），先整理好应背记的公式和定理，然后开始做历届的考题，不会做时看解答或问会做的人，找出是哪个应背的公式没有理解，做个记号，然后消化理解，学会解这类题目。这样一张一张做卷子，一次一次理解还未掌握而又应该掌握的内容，就可得到较好的复习效果。对于学习微积分的第三个难点：难度大，首先“难度”是一个相对的概念，许多题目，对于没见过该种题型的人是很难的，而对于学习过这种题型的人就不是难题了，因此适当地学习一些常见的题型对于掌握微积分这门课程是必须的。本书的例题就是由富有微积分教学经验的教师为提高学生解题能力所精选的最具代表性的题目。其次，对于学习的深度，学生要根据自身的条件量力而行，本书的例题都标有难度，“A 类”为较易，“C 类”为较难，“B 类”为中等。一般地，只要掌握 A 类、B 类题目就已经达到这门课的基本要求了。

本套书共分 11 章，上册 6 章，即预备知识、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用，下册 5 章，即多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程，每章包括 3 个部分：基本内容、例题、测验与练习。另外书后还附有北京交通大学微积分课程的期末试卷及其解答。

本书由龚漫奇主编，负责全书的统一协调、编纂和定稿，具体的编写分工为：龚漫奇编写第 1、2 章，缪克英编写第 3、4 章，吴灵敏编写第 5、6 章。

由于水平所限，书中缺点、错误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2006 年 9 月

目 录

第 1 章

预备知识

1.1 基本内容

1. 函数的概念

设非空集合 $D\subset\mathbf{R}$，如果存在一个法则 f，使 $\forall x\in D$，都有唯一固定的 $y\in\mathbf{R}$ 与对应，则称f是D上的一个函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$.

其中，D 称为 f 的定义域，又称 $f(D)=\{f(x)\,|\,x\in D\}$为 f 的值域.

注:(1) 定义域 D 与对应法则 f 称为函数的两要素，故两函数相同等价于它们的 D 与 f 相同.

(2) 这里的函数是指单值函数，如果把其中的“唯一”两字去掉，则给出的就是多值函数的定义. 今后无特别声明时，函数都是指单值函数.

2. 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性

设有函数 $y=f(x)$，$x\in D$.

(1) **有界性**　如果$\exists M>0$，$\forall x\in X\subset D$，都有$|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$在 X 上有界.

(2) **单调性**　如果$\forall x_1$，$x_2\in I\subset D$，都有 $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<$(或$>$或$\leqslant$或$\geqslant$)$f(x_2)$，则称$f(x)$在 I 上单调增加(或单调减少或广义单调增加或广义单调减少).

(3) **周期性**　如果$\exists T\neq 0$，使得$\forall x\in D$，都有 $f(x\pm T)=f(x)$，则称 $f(x)$是以 T 为周期的周期函数.

(4) **奇偶性**　如果$\forall x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$(或$=f(x)$)，则称 $f(x)$为奇(或偶)函数.

3. 反函数

(1) **定义**　设有一个函 $y=f(x)$，$x\in D$，如果存在一个函数 $x=f^{-1}(y)$，$y\in f(D)$，

使得

$$y=f(x),\ x\in D \Leftrightarrow x=f^{-1}(y),\ y\in f(D)$$

则称 $x=f^{-1}(y)$，$y\in f(D)$ 为 $y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数．

(2) **性质** $f^{-1}(f(x))=x$，$x\in D$；$f(f^{-1}(y))=y$，$y\in f(D)$

4. 复合函数

设有两个函数 $y=f(u)$，$u\in D_f$；$u=g(x)$，$x\in D_g$，则称 $y=f(g(x))$，$x\in D=\{x\mid x\in D_g$ 且 $g(x)\in D_f\}$(要求 $D\neq\Phi$)为 f 与 g 的复合函数．

5. 隐函数

方程 $F(x,\ y)=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$，$x\in D$ 的定义域 D 及对应法则 $x\to y=y(x)$ 的定义为

$$D=\{x\mid \exists x,\ y,\ 使 F(x,\ y)=0\},\ y(x)=\{y\mid F(x,\ y)=0\}$$

注：隐函数可以是多值函数，通常把多值函数分为若干个连续(或可微)的单值分支来研究。例如，$x^2-y^2=0$ 确定了一个多值函数 $y=\pm x$，$x\in\mathbf{R}$，它可分为两个可微(当然也连续)的单值分支 $y_1=x$ 与 $y_2=-x$. 当然，此多值函数还可用另一种方法分为两个连续的单值分支 $y_3=|x|$ 与 $y_4=-|x|$.

6. 基本初等函数及期性质和图形

共有以下 6 类基本初等函数．

(1) **常数函数** $f(x)=C$

(2) **幂函数** $f(x)=x^{\alpha}$

(3) **指数函数** $f(x)=a^x$

(4) **对数函数** $f(x)=\log_a x$

(5) **三角函数** $f(x)=\sin x$，$\cos x$，$\tan x$，$\cot x$，$\sec x$，$\csc x$

(6) **反三角函数** $f(x)=\arcsin x$，$\arccos x$，$\arctan x$，$\operatorname{arccot} x$

函数的性质包括定义域、对应法则、值域、有界性、单调性、周期性、奇偶性、运算法则(如 $f(x\pm y)$，$f(xy)$ 与 $f(x)$，$f(y)$ 的关系)等．

称平面点集 $T=\{(x,\ f(x))\mid x\in D\}$ 为函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的图形．

由于基本初等函数的性质和图形都属于中学数学的内容，这里就不再赘述了．

7. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合而成的函数称为初等函数．

8. 极坐标

(1) 极坐标系中的点 P 与其极坐标(r, θ)的关系．

(2) 极坐标(r, θ)与直角坐标(x, y)的互化 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$.

(3) 极坐标系中的曲线 C 与其极坐标方程 $F(r, \theta)=0$ 的关系．

1.2 典型例题

例题及相关内容概述

例 1-1　解数学题的基本方法

例 1-2　函数的各种代值运算

例 1-3　求初等函数定义域的方法

例 1-4　判断两函数是否相等的两要素

例 1-5　两段单增函数连在一起后是否单增

例 1-6　任一函数可唯一分解为一个奇函数与一个偶函数之和(题中含有证明存在性和唯一性的常见方法)

例 1-7　求分段函数的反函数的方法

例 1-8　求复合函数的定义域的方法

例 1-9　求分段函数的复合函数的方法

例 1-10　求解含有 $f(\varphi(x))$且 $\varphi(\varphi(x))=x$ 的函数方程

例 1-11　已知 $f(\varphi(x))$，求 $f(x)$

例 1-12　描点作图法，含直角坐标一般方程、参数方程和极坐标方程

例 1-13　有关平移、伸缩、对称的作图法，还有加绝对值后的图形变化

例 1-14　有关 $y=f(x)\sin g(x)$类函数的图形的特点

例 1-15　叠加法作图

【例 1-1】(A 类[①])　解数学题的基本方法是什么？通常的解题过程是什么？

解　简单地说，解数学题的基本方法用 8 个字“等式代换，其他照抄”即可概括．

具体地说就是，如果已知一个等式“□＝△”，则就可以将一个式子中的“□”换为“△”，而将式子中的“其他”部分“照抄”下来．

通常的解题过程就是将一个所求的内容(或所证等式的一端)，利用“等式代换，其他照抄”逐步得出所需结果的过程．

---

① 例题号后“(A 类)”、“(B 类)”、“(C 类)”表示该例题的难度分别为“较易”、“中等”、“较难”．

关于“等式代换，其他照抄”的几点说明

(1)“等式”就是指需要背记的公式．

(2)“元”的概念与换元思想．所谓换“元”，就是将反复出现的一个整体用一个字母(即“元”)代替．由于换元有一个主观选择的问题，所以可以说换元是解数学题最大的技巧．

(3) 举例说明“等式代换，其他照抄”．已知 $y=\sin 2^x$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解法： 先背出所需的公式，即“等式”．

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'_x,\quad (\sin u)'_x=(\cos u)u'_x,\quad (2^u)'_x=(2^u\ln 2)u'_x,\quad x'_x=1$$

然后逐步用“等式代换，其他照抄”可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'_x=(\sin 2^x)'_x=\cos 2^x(2^x)'_x=\cos 2^x\cdot(2^x\ln 2)x'_x=\cos 2^x\cdot 2^x\ln 2\cdot 1$$

其中用到换元 $u=2^x$ 和 $u=x$.

最后指出解数学题时，常用的逻辑推理“$A\Rightarrow B$”(或“如 A 则 B”)．其用法是，当“A”是正确的且“$A\Rightarrow B$”也是正确时，“B”一定是正确的．

【例 1-2】(A 类) 已知 $\varphi(x)=1-x$，求 $\varphi(3)$，$\varphi(a)$，$\varphi(2x)$，$\varphi(\varphi(x))$.

分析： 计算 $\varphi(\square)$时，只需将 $\varphi(x)$中的 x 换为“$\square$”．

解

$$\varphi(3)=1-3=-2,\ \varphi(a)=1-a,\ \varphi(2x)=1-2x$$
$$\varphi(\varphi(x))=1-\varphi(x)=1-(1-x)=x$$

【例 1-3】(A 类) 求初等函数

$$y=\frac{\lg(4-x)}{x-3}+\arcsin\frac{5-2\sqrt{x}}{7}$$

的定义域 D，并用互不相交的区间的并表示 D.

分析： 初等函数 $y=f(x)$的定义域就是使 $f(x)$有意义的所有的点 x 组成的集合．因此，当$f(x)$中含有$\frac{1}{g_1(x)}$，$\sqrt[2n]{g_2(x)}$($n\in\mathbf{N}$)，$\log_a g_3(x)$，$\arcsin g_4(x)$，$\arccos g_5(x)$时，求 D_f 的方法就是解下列不等式组．

$$g_1(x)\neq 0,\ g_2(x)\geqslant 0,\ g_3(x)>0,\ |g_4(x)|\leqslant 1,\ |g_5(x)|\leqslant 1$$

解 解不等式组

$$\left\{4-x>0,\ x-3\neq 0,\ x\geqslant 0,\ \left|\frac{5-2\sqrt{x}}{7}\right|\leqslant 1\right\}$$

$$\Leftrightarrow\{x<4,\ x\neq 3,\ x\geqslant 0,\ -7\leqslant 5-2\sqrt{x}\leqslant 7\}$$

$$\Leftrightarrow\{x<4,\ x\neq 3,\ x\geqslant 0,\ 2\sqrt{x}\leqslant 12,\ 2\sqrt{x}\geqslant -2\}$$

$$\Leftrightarrow\{x<4,\ x\neq 3,\ x\geqslant 0,\ x\leqslant 36\}$$

所以定义域 D：$0\leqslant x<4$ 且 $x\neq 3$，即

$$D=[0,\ 3)\cup(3,\ 4)$$

【例 1-4】（A 类） 请问 $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$ 是否为相同的函数．

分析： 只需看两函数的定义域与对应法则是否相同．

解 因为 $f(-1)=-1$，$g(-1)=\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{1}=1$，所以两函数的对应法则不同，因此两函数不相同．

练习题 1-1 下列 $f(x)$，$g(x)$ 是否为相同的函数．

(1) $f(x)=|x|$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(2) $f(x)=\sqrt{\dfrac{(x+1)^2}{x}}$，$g(x)=\dfrac{|x+1|}{\sqrt{x}}$

（**答案：**(1)相同，(2)不相同，$D_f=D_g\cup\{-1\}$）

【例 1-5】（A 类） 设 $f(x)$

(1) 在 $(0,\ 1]$ 和 $(1,\ 2)$ 上单增；

(2) 在 $(0,\ 1]$ 和 $[1,\ 2)$ 上单增；

问分别在上述两种条件下，$f(x)$ 是否一定在 $(0,\ 2)$ 上单增?

分析： 两段相连的单增函数的曲线(或图形)是单增的．

解 (1) 否．反例如下．

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in(0,\ 1]\\ x-2, & x\in(1,\ 2)\end{cases}$$

(2) 是．设 $0<x_1<x_2<2$，下面分三种情况证明 $f(x_1)<f(x_2)$．

当 $0<x_1<x_2\leqslant 1$ 时，因为 $f(x)$ 在 $(0,\ 1]$ 上单增，所以 $f(x_1)<f(x_2)$；

当 $1\leqslant x_1<x_2<2$ 时，因为 $f(x)$ 在 $[1,\ 2)$ 上单增，所以 $f(x_1)<f(x_2)$；

当 $0<x_1<1<x_2<2$ 时，因为 $f(x_1)<f(1)$ 且 $f(1)<f(x_2)$，所以 $f(x_1)<f(x_2)$．

【例 1-6】（C 类） 证明：任意一个定义在关于原点对称的集合上的函数可以唯一地表示

为一个奇函数与一个偶函数之和．

分析：此题共有两个问题，即存在性(即存在一个奇函数与一个偶函数)与唯一性．在数学中存在性的证明是一个难点，这里介绍**一种常用的证明存在性的方法**．首先假设所求的东西已经存在，然后根据题设看所求的东西需要满足什么条件(一般是列出它所满足的方程)，最后根据条件解出所求的东西，并验证它确实存在且满足题目的要求．另外，证明唯一性的常用方法是：设有任意的两个结果，再证这两个结果相等．

解 设任意函数为 $f(x)$，并设 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，其中 $f_1(x)$为奇函数，$f_2(x)$为偶函数(它们的存在性后面再证)．因此

$$f(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=-f_1(x)+f_2(x)$$

将 $f(x)$，$f(-x)$看成已知的，$f_1(x)$，$f_2(x)$看成未知的，解方程组

$$\begin{cases} f_1(x)+f_2(x)=f(x) \\ -f_1(x)+f_2(x)=f(-x) \end{cases}$$

得

$$f_1(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],\qquad f_2(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$$

经验证可知，$f_1(x)$为奇函数，$f_2(x)$为偶函数，且 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$．故存在性得证．

下面证唯一性，设 $f(x)=g_1(x)+g_2(x)$，且 $g_1(x)$是奇函数，$g_2(x)$是偶函数．仿照前面的推理可得 $g_1(x)=f_1(x)$，$g_2(x)=f_2(x)$，所以唯一性得证．

【例 1-7】(A类) 对于下列函数，求其反函数或指出其无反函数．

(1) $y=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 4-2x, & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$

(2) $y=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 4-x, & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$

分析：由 $y=f(x)$解出 $x=\varphi(y)$，则 $y=\varphi(x)$就是所求的反函数．当 $y=f(x)$是分段函数时，先分单调段求反函数，当各段值域有重叠时，无反函数，否则合并各段反函数即为所求．

解 (1) 因为 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时

$$y=x\Rightarrow 0\leqslant y\leqslant 1$$

而 $1<x\leqslant 2$ 时

$$y=4-2x\Rightarrow 0\leqslant y<2$$

因为 $0\leqslant y\leqslant 1$ 与 $0\leqslant y<2$ 有重叠，所以无反函数．

(2) 因为 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时

$$y=x\Rightarrow 0\leqslant y\leqslant 1,\ x=y$$

而 $1<x\leqslant 2$ 时

$$y=4-x\Rightarrow 2\leqslant y<3,\ x=4-y$$

所以所求反函数为

$$y=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 4-x, & 2\leqslant x<3\end{cases}$$

【例 1-8】（A 类） 已知 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,\ 2)$，求 $f(\sqrt{x})$ 的定义域．

分析： 求 $f(\varphi(x))$ 的定义域就是解不等式组 $\{x\in D_\varphi,\ \varphi(x)\in D_f\}$.

解 记 $\varphi(x)=\sqrt{x}$，则 $D_\varphi=[0,\ +\infty)$，又由题设 $D_f=(-2,\ 2)$，故所求为下列不等式组的解.

$$\begin{cases}x\in D_\varphi\\ \varphi(x)\in D_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 0\\ -2<\sqrt{x}<2\end{cases}\Leftrightarrow 0\leqslant x<4$$

【例 1-9】（B 类） 已知

$$f(x)=\begin{cases}\ln x, & x>0,\\ x, & x\leqslant 0;\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1\\ x^3, & x>1\end{cases}$$

求 $f(g(x))$.

分析： $f(\square)$ 的表达式就是把 $f(x)$ 表达式中所有的 x 都换成"$\square$"，包括分段函数．

解 1 先内后外法．

$$f(g(x))=\begin{cases}f(x^2), & x\leqslant 1\\ f(x^3), & x>1\end{cases}=\begin{cases}\left[\begin{cases}\ln x^2, & x^2>0\\ x^2, & x^2\leqslant 0\end{cases}\right], & x\leqslant 1\\ \left[\begin{cases}\ln x^3, & x^3>0\\ x^3, & x^3\leqslant 0\end{cases}\right], & x>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\ln x^2, & x^2>0\text{ 且 }x\leqslant 1\\ x^2, & x^2\leqslant 0\text{ 且 }x\leqslant 1\\ \ln x^3, & x^3>0\text{ 且 }x>1\\ x^3, & x^3\leqslant 0\text{ 且 }x>1\end{cases}=\begin{cases}\ln x^2, & x\neq 0\text{ 且 }x\leqslant 1\\ x^2, & x=0\\ \ln x^3, & x>1\end{cases}$$