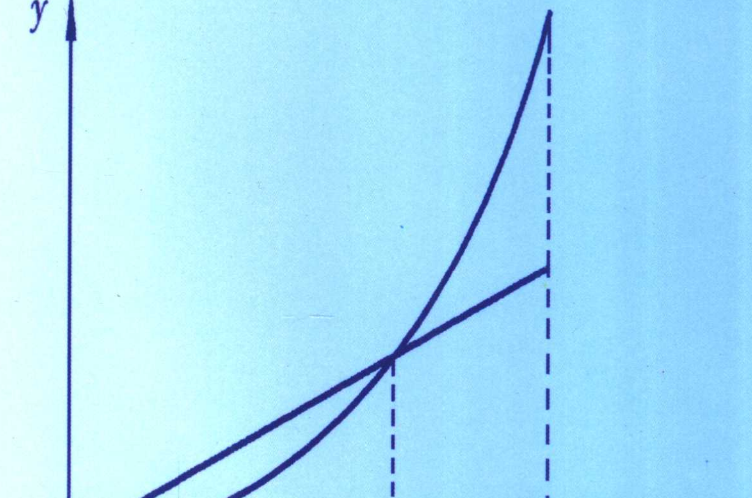
经济数学基础

Jingji Shuxue Jichu Jiexi Ji Shijian

——解析及实践

主编 夏 莉 李霄民



重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

经济数学基础
——解析及实践

主　编　夏　莉　李霄民

编　委　张义萍　郭　伟　王文惠

李庆玉　陶德川

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书是与高校经济数学基础课程教学内容和教学大纲要求配套的教学参考、学习指导、考研复习及应用提高书籍，包括微积分、线性代数及概率统计三门课程内容的教学基本要求、教材内容主线、课程同步练习、经济应用实例和学期自测试题。

本书可供高校经、管类学生使用，也可作为微积分、线性代数及概率统计课程学习参考书籍。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础：解析及实践/夏莉，李霄民主编.—
重庆：重庆大学出版社，2006.8

ISBN 7-5624-3778-5

Ⅰ.经… Ⅱ.①夏…②李… Ⅲ.经济数学—高等
学校—教学参考资料 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 091813 号

经济数学基础

——解析及实践

主 编 夏 莉 李霄民

责任编辑：曾令维 李定群 版式设计：曾令维

责任校对：夏 宇 责任印制：秦 梅

*

重庆大学出版社出版发行

出版人：张鸽盛

社址：重庆市沙坪坝正街 174 号重庆大学(A 区)内

邮编：400030

电话：(023) 65102378 65105781

传真：(023) 65103686 65105565

网址：http://www.cqup.com.cn

邮箱：fxk@cqup.com.cn (市场营销部)

全国新华书店经销

自贡新华印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/16 印张：14 字数：349 千

2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月第 1 次印刷

印数：1—6 000

ISBN 7-5624-3778-5 定价：19.00 元

前　言

随着科学技术的不断进步和计算机的迅速发展，人们已普遍地看到了一种历史现象，数学的应用领域在不断地扩大。它不仅被用来解决日常的生产、生活和社会等领域中的各种各样的实际问题，而且也在许多学科的理论发展中得到了应用，即数学问题的多样性与数学应用的广泛性及深入性，已经成为现代科学发展的主要特征。

经济数学基础是财经管理类院校一门核心基础课程，作为培养经济、管理类人才的基础课教学，既有数学的理论和计算，又有数学在经济中的应用。因此，该门课程的主要任务是培养学生的数学思维，以及应用数学解决实际问题的能力。

数学教育要教给学生的不仅仅是数学知识，还应当培养学生的数学兴趣、意识和能力，让学生学会用数学的思维方式观察事物，用数学的思维方法分析、解决实际问题。但是，在该门课程的长期教学中，普遍存在这样的两个问题：一是由于数学高度的抽象、严密的逻辑，教材偏重数学理论推导、纯数学的计算，导致学生学习数学产生畏难情绪；二是由于数学的应用，特别是在经济中的应用在教材中实例介绍甚少，使学生看不见学习数学的作用，影响学习兴趣和积极性。

基于上述两个问题，从激发学生学习数学的兴趣，培养学生的数学素质和自主学习的能力，训练学生数学基本功，扩大学生学习数学视野，增加经济数学基础课堂教学信息量，我们特组织具有丰富教学经验的教师编写了这本学生课后复习、教师教学参考的书籍。

本书的特色如下：

①内容选题上，由浅入深，既有各章内容的同步练习和单元总结，又有与考研题型一致的综合自测试题，适合学生课后练习、巩固数学知识和作为考研的复习资料。

②内容选材上，并不依赖于哪一套《经济数学基础》教材，适合所有经济、管理类专业的数学学习对象。

本书各章分为以下版块：

1. 基本要求　介绍大纲各知识点的要求程度，使学习者把握各章知识要点。文中用黑体字排印的内容，应深入领会和掌握，并能熟练运用。其中，概念、理论用“理解”一词表述，方法、运算用“掌握”一词表述。非黑体字排印的内容，也是必不可少的，只是在要求上低于前者。其中，概念、理论用“了解”一词表述，方法、运算用“会”或“了解”表述。文中带 * 号内容根据专业不同作选择性要求。

2. 内容主线　以图表的形式清晰简洁、系统地给出本章的基本概念、性质、定理和公式等知识结构，使读者对本章知识逻辑关系一目了然，以此提高读者的学习效率、质量和数学学习技巧。

3. 同步练习　按照各章节知识顺序及题目难易程度，体现基本概念、基本计算、基本应用方法的训练，提供配套的同步练习题及解答，以达到巩固所学数学知识，训练数学基本计算方法的目的。

4. 应用实例　将数学应用于经济实际中，为你提供一个数学应用的广阔空间，体验感受到数学就在身边，数学无处不在，无处不有。将进一步激发你学习数学的兴趣和热情，明确数学

学习的重要性和必要性。

5. 自测试题　进一步强化解题训练，培养数学的综合运算、应用能力。提供学期结束的标准模拟考试题及评分标准答案，通过自测检验学习效果。

全书共分 3 篇。第 1 篇：微积分；第 2 篇：线性代数；第 3 篇：概率统计。微积分部分试题由张义萍编拟，线性代数部分试题由李霄民编拟，概率统计部分试题由郭伟编拟。各章基本要求、内容主线由夏莉编写，应用实例由王文惠、夏莉选编。参加编写的还有陈义安、李登信、陶德川、李庆玉、刘效松、姚莉。各章试题审查李霄民，全书总纂夏莉。

本书可供高校经、管类专业学生课程学习、参加硕士研究生入学考试复习及教师教学参考使用。

我们在编写过程中，得到李登信教授的直接指导与大力支持，并参阅了大量的参考文献和同行们的研究成果，在此，一一表示感谢。

由于我们水平有限，编写时间仓促，错误在所难免，敬请同行和读者批评指正。对实践中的问题和建议，将在新的版本中进行认真地修订与丰富，以达到该书真正成为经济数学基础课程学习的有一定价值的教学、学习参考书。

E-mail：xl@ctbu. edu. cn

编　者

2006 年 6 月

目　录

第1篇　微积分

第2篇 线性代数

第 3 篇 概率统计

第 1 篇

微 积 分

第1章 函　数

1.1 基本要求

1. 在中学已有的基础上，**加深对函数概念的理解**和对函数基本性态(奇偶性、周期性、单调性、有界性)的了解。

2. **理解复合函数的概念**；了解反函数的概念，**理解初等函数的概念**。

3. 会建立简单的经济问题的函数关系式；了解经济学中常用的一些函数。

1.2 内容主线(见附表Ⅰ.1)

附表Ⅰ.1

函数

- 定义：$\forall x \in D \xrightarrow{f}$ 唯一确定 $y=f(x)\in Z$：两个非空集合 D(定义域)Z(值域)之间的一个单值对应法则 f
- 分类
  - 基本初等函数

函数	定义域	值域
常数：$y=c$	$(-\infty,+\infty)$	$\{c\}$
幂函数：$y=x^{\alpha}(\alpha\neq 0)$	视 α 值而定	随 α 而定
指数函数：$y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$
↕ 互为反函数		
对数函数：$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
三角函数：$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$
三角函数：$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$
三角函数：$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$	$(-\infty,+\infty)$
三角函数：$y=\cot x$	$x\neq k\pi$	$(-\infty,+\infty)$
↕ 互为反函数		
反三角函数：$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$
反三角函数：$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
反三角函数：$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$
反三角函数：$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$

  - ↓ 有限次四则及复合运算
  - 初等函数：基本性质
    - 有界性：$\forall x\in D,\exists M$，使 $\begin{cases} f(x)\leqslant M, f(x)\text{在 } D \text{ 上有上界} \\ f(x)\geqslant M, f(x)\text{在 } D \text{ 上有下界} \\ |f(x)|\leqslant M, f(x)\text{在 } D \text{ 上有界} \end{cases}$ f 有界 $\Leftrightarrow$ 既有上界又有下界
    - 周期性：$\forall x\in D$，若 $f(x)=f(x+T)$，T 为最小正周期，D 为无穷区间
    - 奇偶性：$\forall x\in D$，且 $-x\in D$，若 $\begin{cases} f(-x)=f(x)，称 f(x) 为 D 上偶函数 \\ f(-x)=-f(x)，称 f(x) 为 D 上奇函数 \end{cases}$ D 为对称区间
    - 单调性：$\forall x_1,x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 有 $\begin{cases} f(x_1)<f(x_2)，f(x) 为 D 上单调递增函数 \\ f(x_1)>f(x_2)，f(x) 为 D 上单调递减函数 \end{cases}$

1.3　同步练习

一、填空

1. 设 $f(t)=t\psi(x)$，则 $f(1)-f(0)=$______。

2. 设 $f(x)=\begin{cases} x & |x|\leqslant 1 \\ 1 & |x|>1 \end{cases}$，则 $f(\sin x)\cdot f(1+e^x)=$______。

3. $y=\sqrt{x^2-4}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 的定义域为______。

4. $f(x)-2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{2}{x}$，则 $f(x)=$______。

5. $f(x)=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ \dfrac{1}{x} & x<0 \end{cases}$，则 $f[f(x)]=$______。

6. 已知 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)=$______。

7. 设函数 $f(x)$ 满足关系式：$f(1+x)-2f(1-x)=3e^x$，则函数 $f(x)=$______。

8. 已知 $f[\varphi(x)]=1+\cos x$，$\varphi(x)=\sin\dfrac{x}{2}$，则 $f(x)=$______。

9. 已知 $f(x)=\begin{cases} 3x+1 & -3\leqslant x<0 \\ 3^x & 0\leqslant x<1 \\ x^2+2 & 1\leqslant x\leqslant 3 \end{cases}$，则其反函数 $f^{-1}(x)=$______。

10. 函数 $y=\lg\cos\sqrt[3]{\arcsin x}$ 由______复合而成。

二、选择

1. 函数 $f(x)=3^x$，则 $f(x+y)=($　　$)$。

A. $f(x)f(y)$　　B. $f(2x)$　　C. $f(x)$　　D. $f(y)$

2. 若 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义的函数，则下列(　　)是奇函数。

A. $f(x^3)$　　B. $[f(x)]^3$　　C. $f(x)-f(-x)$　　D. $f(x)+f(-x)$

3. 设函数 $f(x)$ 定义在 $(0,+\infty)$ 内，a,b 为任意正数，若函数 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调减少，则有(　　)。

A. $f(a+b)<f(a)+f(b)$　　B. $f(a+b)<\dfrac{f(a)+f(b)}{a+b}$

C. $f(a+b)>f(a)+f(b)$　　D. $f(a+b)>\dfrac{f(a)+f(b)}{a+b}$

4. 设函数 $f(u)$ 的定义域为 $0<u<1$，则 $f(\ln x)$ 的定义域为(　　)。

A. $(0,1)$　　B. $(1,a)$　　C. $(0,e)$　　D. $(1,e)$

5. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则函数 $y=x-[x]$ 为(　　)。

A. 无界函数　　B. 单调函数　　C. 偶函数　　D. 周期函数

6. 设函数 $f(x)=x+\tan x e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是(　　)。

A. 偶函数　　B. 无界函数　　C. 周期函数　　D. 单调函数

7. 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列(　　)区间内有界。

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

8. 若在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $f(x)$ 单调增加，$\varphi(x)$ 单调减少，则 $f[\varphi(x)]$ 在 $(-\infty,+\infty)$

内(　　)。

A. 单调增加　　B. 单调减少　　C. 不是单调函数　　D. 增减性难以判定

三、计算

1. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,3a]\ (a>0)$，求 $g(x)=f(x+a)+f(2x-3a)$ 的定义域。

2. 已知 $\varphi(x+1)=\begin{cases}x^2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2x & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域。

3. 设 $g(x)=\begin{cases}2-x & x\leqslant 0\\ x+2 & x>0\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ -x & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $g[f(x)]$。

4. 设 $f(x)$ 是 $(-a,a)$ 上是奇函数，已知 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\varphi(x)$，$\varphi(0)=0$，试求：在 $(-a,0)$ 上的 $f(x)$？

四、应用

1. 某商品的单价为 100 元，单位成本为 60 元，商家为了促销，规定凡是购买超过 200 单位时，对超过部分按单价的九五折出售，求成本函数、收益函数和利润函数。

2. 某电视机每台售价为 500 元时，每月可销售 2 000 台，每台售价为 450 元时，每月可增销 400 台，试求该电视机的线性需求函数。

3. 某厂生产某商品的可变成本为 15 元/件，每天的固定成本为 2 000 元，如果每件商品的出厂价为 20 元，为了不亏本，该厂每天至少应生产多少件该商品？

五、设 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$，其中 a,b,c 为常数，且 $|a|\neq|b|$，试证：$f(x)=f(-x)$。

1.4　应用实例

生小兔问题

兔子出生以后两个月就能生小兔，如果每月生一次且恰好生一对小兔，且出生的兔子都成活，试问 1 年以后共有多少对兔子，2 年后有多少对兔子？

为使问题简化，先直接推算。在第 1 月只有 1 对兔子；第 2 月也只有一对兔子；在第 3 月这对兔子生了 1 对小兔子，共有 2 对兔子；在第 4 月，老兔子又生了 1 对小兔子，共有 3 对小兔子；在第 5 个月，老兔子生 1 对小兔子，且在第 3 月出生的小兔也生育 1 对小兔子，故共有 5 对小兔子，在第 6 个月，老兔子、在第 3、第 4 月出生的小兔子各生 1 对小兔子，故共有 8 对小兔子。如此类推，不难得到月份和小兔子对数的关系如表 1 所示。

表 1　兔子对数增长

月份数 n	1	2	3	4	5	6	7
小兔数/对	1	1	2	3	5	8	13
月份数 n	8	9	10	11	12	13	…
小兔数/对	21	34	55	89	144	233	…

从表 1 可知，一年后(第 13 月)时共有 233 对兔子。但是计算 2 年后时，这种方法似乎有些繁和笨，且容易出错。有没有更好的方法呢？现在回过头来仔细观察一下每月小兔数的变化情况，发现从第 3 月开始，每月小兔对数就是前两月的小兔对数之和。若记 r_n 为第 n 月的小兔对数，则发现其规律为

$$r_1 = 1, r_2 = 1, r_n = r_{n-2} + r_{n-1}, n = 3,4,\cdots \qquad (1)$$

利用式(1)就很容易用计算机算出2年后兔子的对数为75 025。

交通路口的红绿灯模型

在一个由红绿灯管理下的十字路口，如果绿灯亮15 s，最多可以有多少辆汽车通过这个交叉路口？

这个问题提得笼统含混，因为交通灯对十字路口的控制方式较复杂，特别是车辆左、右转弯的规则，不同的国家都不一样。通过路口的车辆的多少还依赖于路面上汽车的数量以及它们的行驶速度和方向。因此，在一定的假设之下，尽量使这个问题简化。

假设：

①十字路口的车辆穿行秩序良好，不会发生阻塞。

②所有车辆都是直行穿过路口，不拐弯行驶，并且仅考虑马路一侧或单行线上的车辆。

③所有的车辆长度相同，为 L m，并且都是从静止状态匀加速启动。

④红灯下等待的每相邻两辆车之间的距离相等，为 D m。

⑤前一辆车启动后，下一辆车启动的延迟时间相等，为 T s。

对于此问题，可认为在红灯下等待的车队足够长，以致排在队尾的司机看见绿灯又转为红灯时仍不能通过路口。

用 x 轴表示车辆行驶的道路。原点 O 表示交通灯的位置，x 轴的正向是汽车行驶的方向。以绿灯开始亮为起始时刻。

于是，在红灯前等待的第1辆汽车刚启动时应该按照匀加速的规律运动。可用公式 $S_1(t) = at^2/2$ 来描述它，其中，$S_1(t)$ 为 t 时刻汽车在 x 轴上的位置，a 是汽车启动时的加速度。对于灯前的第 n 辆车，则有公式 $S_n(t) = S_n(0) + a(t - t_0)^2/2$，其中，$S_n(0)$ 是启动前汽车的位置，t_0 是该车启动的时刻。由假设③～⑤可知，$S_n(0) = -(n-1)(L+D)$，$t_n = (n-1)T$。在城市道路上行驶的汽车都有一个最高时速的限制，为 v_* m/s。并假设绿灯亮后汽车将启动一直加速到可能的最高速度，并以这个速度向前行驶，则显然汽车加速的时间为

$$t_{n*} = \frac{v_*}{a} + t_n$$

由上述分析可知，绿灯亮后汽车行驶的规律为

$$S_n(t) = \begin{cases} S_n(0) & 0 \leqslant t < t_n \\ S_n(0) + a(t-t_0)^2/2 & t_n \leqslant t < t_{n*} \\ S_n(0) + v_*^2/2a + v_*(t-t_0) & t_{n*} \leqslant t \end{cases}$$

对于模型的参数值，取 $L = 5$ m，$D = 2$ m，$T = 1$ s。在城市的十字路口汽车的最高速度一般是40 km/h，它折合 $v_* = 11.1$ m/s。进一步需要估计加速度。经调查大部分司机声称：10 s内车子可由静止加速到约26 m/s的速度。这时，可算出加速度应为2.6 m/s^2，保守一些取汽车的加速度为 $a = 2$ m/s^2，$v_*/a \approx 5.5$ s。

根据这些参数，可计算出绿灯亮至15 s红灯再次亮时每辆汽车的位置如表2所示。

表2 绿灯亮至15 s汽车的位置

车 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
最终位置/m	135.7	117.6	99.5	81.4	63.3	45.2	27.1	9	-9.1

由表2可知，当绿灯亮至15 s时，第8辆汽车已经驶过红绿灯9 m。而第9辆车还距交通

灯 9.1 m 不能通过。

电话费是升了还是降了？

2001 年 1 月 1 日，我国的电讯资费进行了一次结构性的调整，其中某地区固定电话的市话费由原来的每 3 min（不足 3 min 以 3 min 计）0.18 元调整为前 3 min 0.22 元，以后每 1 min（不足 1 min 以 1 min 计）0.11 元。那么，与调整前相比，市话费是降了还是升了？升、降的幅度是多少？

若以 $y(t)$，$Y(t)$ 分别表示调整前、后市话费与通话时间 t 之间的函数关系，则

$$y(t)=\begin{cases}0.18 & 0<t\leqslant 3\\ 0.18\times\dfrac{t}{3} & t>3 \text{ 且 } \dfrac{t}{3} \text{ 是整数}\\ 0.18\left(\left[\dfrac{t}{3}\right]+1\right) & t>3 \text{ 且 } \dfrac{t}{3} \text{ 不是整数}\end{cases}$$

$$Y(t)=\begin{cases}0.22 & 0<t\leqslant 3\\ 0.22+0.11(t-3) & t>3 \text{ 且 } t \text{ 是整数}\\ 0.22+0.11([t-3]+1) & t>3 \text{ 且 } t \text{ 不是整数}\end{cases}$$

为便于二者进行比较，可按具体的时段计算上述两个函数对应的函数值及相应的调价幅度，并列成对照表如表 3 所示。

表 3

t	(0,3]	(3,4]	(4,5]	(5,6]	(6,7]	(7,8]	(8,9]	…	(59,60]	…
$y(t)$	0.18	0.36	0.36	0.36	0.54	0.54	0.54	…	3.60	…
$Y(t)$	0.22	0.33	0.44	0.55	0.66	0.77	0.88	…	6.49	…
升降幅度/%	22	8	22	53	22	43	63	…	80	…

不难看出，只有当通话时间 $t\in(3,4]$ 时，调整后的市话费才稍微有所降低，其余的时段均比调整前有较大幅度的提高。

第2章　极限与连续

2.1　基本要求

1. **理解数列极限和函数极限的概念**。

2. 了解无穷大、无穷小、高阶无穷小和等价无穷小的概念;会用等价无穷小求极限。

3. **掌握极限的四则运算法则**,会用变量代换求某些简单复合函数的极限。

4. 了解极限存在的两个准则(夹逼准则和单调有界准则);**了解两个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ 与 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,并会用它们求一些相关的极限**。

5. **理解函数连续的概念**;了解函数间断点的概念，会判断间断点的类型。

6. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质(最大值、最小值定理和有界性定理、零点定理和介值定理)。

2.2　内容主线(见附表Ⅰ.2)

附表Ⅰ.2

- 极限
  - 定义:见附表Ⅰ.2.1
  - 性质
    - 有界性:若 $\lim f(x)$ 存在 $\Rightarrow f(x)$ 在该过程中有界
    - 唯一性:若 $\lim f(x)$ 存在 $\Rightarrow$ 极限唯一
    - 保号性
      - 若 $\lim f(x)=A>0(<0)\Rightarrow$ 该过程中 $f(x)>0(<0)$
      - 若 $\lim f(x)=A$ 且该过程中 $f(x)\geqslant 0(\leqslant 0)\Rightarrow A\geqslant 0(\leqslant 0)$
  - 判断
    - 夹逼定理:某过程中,$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,且 $\lim g(x)=\lim h(x)=A\Rightarrow \lim f(x)=A$
    - 单调有界数列必有极限
      - 单调递增有上界数列必有极限
      - 单调递减有下界数列必有极限
  - 计算
    - 四则运算法则:若 $\lim u,\lim v$ 均存在,$\lim(u\pm v)=\lim u\pm\lim v$,$\lim(uv)=\lim u\cdot\lim v$,$\lim\dfrac{u}{v}=\dfrac{\lim u}{\lim v}$,且 $\lim v\neq 0$
    - 初等变换:利用代数方法求极限
    - 两个重要极限 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}\end{cases}\xrightarrow{\text{推广}}\begin{cases}\lim\dfrac{\sin[f(x)]}{f(x)}\xlongequal{\frac{0}{0}}1\\ \lim\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}\xlongequal{(1+0)^{\infty}}\mathrm{e}\end{cases}$
    - 特殊极限
      - 定义:若 $\lim f(x)=0$,$f(x)$ 为该过程中无穷小量
      - 性质
        - 1)有限个无穷小和、差、积仍是无穷小
        - 2)无穷小与有界量之积是无穷小
        - 3)等价无穷小代换:$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\mathrm{e}^{x}-1\sim x,\ln(1+x)\sim x,(x\to 0)$
        - 4)非零无穷小的倒数是无穷大
    - 罗比达法则(第4章)