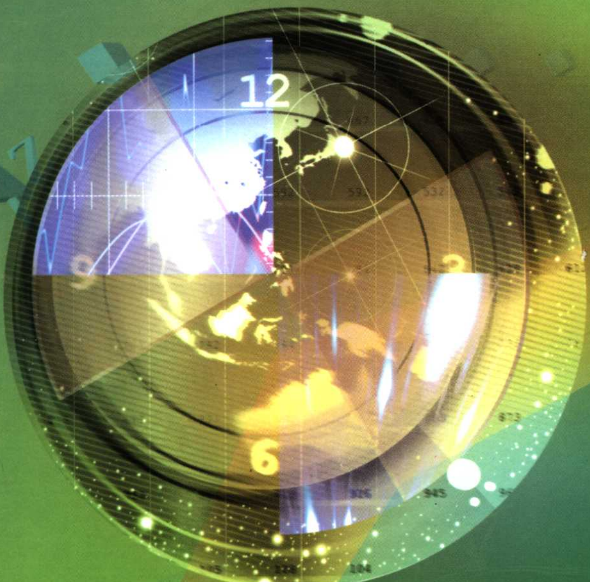
高等学校“十五”规划教材配套辅导

概率论与数理统计
学习方法指导



主　编　周圣武

副主编　周长新　李金玉

- ◆知识要点归纳与注解
- ◆重点难点剖析与精解
- ◆典型例题点评与解析
- ◆单元习题精选及解答

煤炭工业出版社

高等学校“十五”规划教材配套辅导

概率论与数理统计
学习方法指导

主　编　周圣武
副主编　周长新　李金玉

煤炭工业出版社
·北　京·

内 容 提 要

本书是高等学校规划教材《概率论与数理统计》(周圣武主编)的配套辅导书.书中系统地综述了概率论与数理统计的基本内容和基本方法,在教材例题的基础上,有针对性地精选了大量的典型例题,并对教材中的部分较难的习题给出了详细的解答.通过例题的示范作用,帮助读者系统地掌握概率论与数理统计的基本内容、解题方法与思路.

本书可作为高等学校工学、经济和管理等专业的概率论与数理统计课程的学习参考书,同时也可供考研学生复习使用.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习方法指导/周圣武主编. —北京:煤炭工业出版社,2005

ISBN 7—5020—2833—1

Ⅰ.概… Ⅱ.周… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料

Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第159313号

煤炭工业出版社 出版
(北京市朝阳区芍药居35号 100029)
网址:www.cciph.com.cn
北京京科印刷有限公司 印刷
新华书店北京发行所 发行
*
开本 787mm×1092mm 1/16 印张 15
字数 364千字 印数 1—3,000
2006年2月第1版 2006年2月第1次印刷
社内编号 5231 定价 25.00元

前　　言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的数学分支. 随着现代科学技术的迅猛发展，概率论与数理统计的理论与方法已广泛地应用于许多科学领域，以及工业、农业、医药、卫生等国民经济各个部门. 概率论与数理统计是学习现代科学技术的重要理论基础，是高等学校理工科、经济、管理等专业重要的基础课程之一.

本书是高等学校规划教材《概率论与数理统计》（周圣武主编）的配套辅导书. 书中融入了作者多年教学实践中的经验体会，旨在帮助初学者尽快理解这门课程的基本理论，掌握其思维方式和解题技巧，培养分析问题和解决问题的能力.

本书以教材内容为主线，共分九章，内容包括：随机事件与概率，随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律与中心极限定理，抽样分布，参数估计，假设检验，回归分析. 每章包括以下五个部分：

(1) 内容提要. 简要列出了各章的基本概念、重要定理和结论. 在内容综述上，力求做到简练准确，科学规范，便于读者学习时提纲挈领地掌握课程内容.

(2) 疑难解答. 收集了学生在学习过程中经常遇到的一些概念方面的疑难问题，并给出了详细的解答.

(3) 典型例题. 列举了大量的典型例题，并给出了详细的解答. 通过这些典型例题的示范作用，指导学生掌握各类习题的解题方法，学会分析随机问题的思维方法，并逐步培养起独立分析和解决随机问题的能力.

(4) 习题选解. 对教材中的部分较难的习题给出了详细的解答，帮助学生解决在课程学习中遇到的困难.

(5) 自测题与参考答案. 为学生设计了一套体现每章重点内容的综合性问题，通过自测题的训练，可以检验学习效果，巩固和提高学生解答各类随机问题的能力.

本书第 1 章至第 3 章由周长新编写，第 4 章至第 6 章由李金玉编写，第 7 章至第 9 章由周圣武编写. 全书由周圣武统稿并修改、定稿.

在书稿完成的过程中，中国矿业大学数学系概率统计教学小组的老师提出了许多宝贵的意见和建议. 在此谨向他们及对本书出版给予支持和帮助的朋友表示衷心的感谢. 本书编写时，编者参考了大量的资料和教材，由于篇幅所限，未能全部列出，在此谨向有关作者表示衷心的感谢.

由于编写时间仓促，书中若有不妥之处，恳请读者批评指正.

编　者

2005 年 10 月

目　　录

第 1 章　随机事件及其概率

§1.1　内容提要

1. 随机试验与随机事件

(1) **随机试验**　若试验 E（一次观察或一次科学试验）具有以下三个特点，则称 E 为**随机试验**.

① **可以在相同的条件下重复地进行；**

② **每次试验的结果具有多种可能性，但能知道所有可能出现的结果；**

③ **试验前不能确切知道会出现哪种结果.**

(2) **随机事件**　在随机试验中，可能出现也可能不出现的结果称为**随机事件**，简称**事件**，用字母 A,B,C 等表示.

(3) **必然事件**　在每次随机试验中一定发生的事件，称为**必然事件**.

(4) **不可能事件**　在每次随机试验中一定不发生的事件称为**不可能事件**，记为$\varnothing$.

(5) **样本空间**　随机试验 E 的所有可能结果构成的集合称为 E 的**样本空间**，记为 Ω .

(6) **样本点**　样本空间 Ω 的元素，即试验 E 的结果，称为**样本点**.

(7) **基本事件**　仅含一个样本点的随机事件称为**基本事件**.

2. 事件间的关系及其运算

设 Ω 为随机试验E 的样本空间,$A,B,\cdots,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 E 的事件.

(1) **事件的包含**　若事件 A 发生必然导致事件B 发生，则称**事件** B **包含事件**A，或 A **是** B **的子事件**，记为 $A\subset B$.

(2) **事件的相等**　若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称**事件** A **与事件**B **相等**，记为 $A=B$.

(3) **和事件**　事件 A 与B 至少有一个发生所构成的事件，称为 A **与**B **的和事件**，记为 $A\cup B$ 或$A+B$.

n 个事件的和事件 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生，也可记为 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$.

可列个事件的和事件$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$中至少有一个发生，也可记为 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

性质：① $A\subset A\cup B$；　$B\subset A\cup B$；　② $A\cup A=A$.

(4) **积事件** 事件 A 与 B 同时发生所构成的事件称为 A 与 B 的**积事件**，记为 $A\cap B$ 或 AB .

n 个事件的积事件 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生.

可列个事件的积事件 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生.

性质：① $AB\subset A$； $AB\subset B$； ② $A\cap A=A$；

③ $A(A\cup B)=A$； $B(A\cup B)=B$； ④ $(AB)\cup A=A$； $(AB)\cup B=B$.

(5) **差事件** 事件 A 发生而事件 B 不发生所构成的事件称为 A 与 B 的**差事件**，记为 $A-B$.

性质：① $A-B\subset A$； ② $(A-B)\cup A=A$； $(A-B)\cup B=A\cup B$；

③ $(A-B)A=A-B$；$(A-B)B=\varnothing$； ④ $A-B=A-AB$.

(6) **互不相容事件** 若事件 A,B 满足 $AB=\varnothing$，则称**事件** A **与** B **互不相容或互斥**.

(7) **对立事件** 若事件 A,B 满足：$A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$，则称**事件** A **与** B **互为对立事件**，或称**事件** A **与事件** B **互为逆事件**，A 的对立事件记为 $\bar{A}$.

性质：① $A\bar{A}=\varnothing$； ② $A\cup\bar{A}=\Omega$； ③ $\bar{\bar{A}}=A$； ④ $A-B=A-AB=A\bar{B}$.

(8) **事件的运算律**

① **交换律** $A\cup B=B\cup A$； $AB=BA$.

② **结合律** $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$； $(AB)C=A(BC)$.

③ **分配律** $A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$； $A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$.

④ **德·摩根对偶律** $\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B}$； $\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$；

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i};\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}\quad (n\geqslant 2).$$

3．概率的定义与性质

(1) **概率的统计定义** 在相同的条件下，将试验 E 重复做 n 次，设在这 n 次试验中事件 A 发生 m 次.如果当 n 充分大时，频率 $f_n(A)=\dfrac{m}{n}$ 稳定地在某一数值 p 附近摆动，且摆动的幅度随 n 的增大而减小，则称 p 为事件 A 的概率，记为 $P(A)=p$.

(2) **等可能概型** 若随机试验 E 满足以下两个条件，则称 E 为**等可能概型或古典概型**.

① 试验 E 的样本空间 Ω 是有限集；

② 试验 E 中每个基本事件发生的可能性相等.

(3) **概率的古典定义** 设试验 E 为古典概型，$\Omega=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，事件 A 包含 k 个基本事件（样本点），则事件 A 的概率定义为 $P(A)=\dfrac{k}{n}$.

(4) **概率的公理化定义** 设 Ω 是随机试验 E 的样本空间，对于 E 的每一个随机事件 A 赋于一个实数 $P(A)$，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件，则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

① **非负性**：$P(A)\geqslant 0$；

② **规范性**：$P(\Omega)=1$；

③ **可列可加性**：如果事件 $A_1,A_2,\cdots$ 两两互不相容，则有 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$.

注　这三个条件称为概率的三条公理.

(5) **概率的性质**

性质 1　$P(\varnothing)=0$.

性质 2　**(有限可加性)**　设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

性质 3　设 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，　$P(A)\leqslant P(B)$.

性质 4　设 $A\subset\Omega$，则 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

性质 5　设 $A\subset\Omega$，则 $P(\bar{A})=1-P(A)$.

性质 6　设 $A,B\subset\Omega$，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

推广　$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$.

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{(n-1)}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

(6) **几何概型**

当随机试验的样本空间是某一个区域 Ω，并且任意一点落在度量（长度、面积、体积）相等的子区域是等可能的（与子区域的形状位置无关），则事件 A 的概率 $P(A)$ 定义为

当 $A\subset\Omega$ 时，

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)};$$

当 A 不为 Ω 的子集时，

$$P(A)=\frac{\mu(A\Omega)}{\mu(\Omega)},$$

其中 $\mu(\Omega)$ 为样本空间的度量，$\mu(A)$ 是构成事件 A 的子区域的度量.

注　几何概率也满足概率的三个公理及其性质.

4. 概率的乘法公式

(1) **条件概率**　设 A,B 是两事件，且 $P(A)>0$，称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

(2) **乘法定理**　设 A,B 是两事件，且 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(B|A)P(A)$.

推广　①设 A,B,C 是三事件，且 $P(AB)>0$，则 $P(ABC)=P(C|AB)P(B|A)P(A)$.

②设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1A_2\cdots A_{n-2})\cdots P(A_2|A_1)P(A_1).$$

5. 全概率公式与贝叶斯公式

(1) **全概率公式**　**设 Ω 为随机试验 E 的样本空间，事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n,A$ 满足 $P(B_i)$** >0，$\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega$，且 $B_iB_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i).$$

(2) **贝叶斯公式** 设 Ω 为随机试验 E 的样本空间，事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n,A$ 满足 $P(A)>0,P(B_i)>0,\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega,B_iB_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(B_k|A)=\frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)},\quad k=1,2,\cdots,n.$$

6. 独立性

(1) **两个事件相互独立** 设 A,B 是两个事件，若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A,B **相互独立**.

(2) **三个事件两两相互独立** 设 A,B,C 是三个事件，若

$$P(AB)=P(A)P(B),\quad P(BC)=P(B)P(C),\quad P(AC)=P(A)P(C),$$

则称 A,B,C **两两相互独立**.

(3) **三个事件相互独立** 设 A,B,C 是三个事件，若

$$P(AB)=P(A)P(B),\quad P(BC)=P(B)P(C),$$
$$P(AC)=P(A)P(C),\quad P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

则称 A,B,C **相互独立**.

(4) **一组事件相互独立** 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件，若对于任意 $k(1<k\leqslant n)$ 和任意 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

总成立，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **相互独立**.

(5) **性质**

① 设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，则 A,B 相互独立的充要条件是 $P(B|A)=P(B)$.

② 若 A,B 相互独立，则 A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 B，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立.

③ 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=1-\prod_{i=1}^{n}P(\bar{A}_i)$.

④ 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则其中任意 k 个事件 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}(2\leqslant k\leqslant n)$ 也相互独立.

⑤ 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则其中任意 k 个事件的对立事件与其余的事件组成的 n 个事件也相互独立.

7. 伯努利 (Bernoulli) 概型

(1) **伯努利概型** 只考虑事件 A 和事件 $\bar{A}$ 的试验称为**伯努利概型或伯努利试验**.将一个伯努利试验独立重复进行 n 次就称为一个 **n 重伯努利试验**或 **n 重伯努利概型**，有时也简称为**伯努利概型**.这里要注意试验是相互独立的，每次试验中事件 A 发生的概率是不变的，即 $P(A)=p$(常数)，$0<p<1$.

(2) **伯努利概型概率计算公式** 在 n 重伯努利概型中，设 $P(A)=p$，则在 n 次试验中事件 A 发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n.$$

8. 附录——排列组合初步

(1) **加法原理**　假设完成一件事情有 n 种不同方式，而第 i 种方式又有 r_i 种不同方法，$i=1,2,\cdots,n$，则完成这件事情共有 $r=r_1+r_2+\cdots+r_n$ 种不同的方法.

(2) **乘法原理**　假设完成一件事情必须经过 n 个不同的步骤，而第 i 个步骤又有 r_i 种不同的方法，$i=1,2,\cdots,n$，则完成这件事情共有 $r=r_1r_2\cdots r_n$ 种不同的方法.

(3) **排列**

① **不允许重复的排列**　从 N 个不同元素中任取 $m(m\leqslant N)$ 个按一定的顺序排成一列，称为**选排列**.这样的排列共有

$$P_N^m=N(N-1)\cdots(N-m+1)=\frac{N!}{(N-m)!}$$

种不同排法.当 $m=N$ 时，$P_N^N=N!$，称为 N 个元素的全排列数.

② **允许重复的排列**　从 N 个不同元素中有放回地任取 m 个元素按照一定的顺序排成一列，称为**允许重复的排列**.这样的排列共有 N^m 种不同排法.

③ **具有相同元素的全排列**　设 N 个元素由 $k(k\leqslant N)$ 种不同的元素组成，同种元素是不可区分的，第 i 种元素共有 m_i 个，$i=1,2,\cdots,k$，且 $m_1+m_2+\cdots+m_k=N$，则这 N 个元素的全排列共有

$$\frac{N!}{m_1!\ m_2!\ \cdots m_k!}$$

种不同的排法.

④ **环状排列**　从 N 个不同元素中不放回地取 $m(m<N)$ 个，依次排成一个圆圈，称为**环状排列**.这样的排列共有

$$\frac{P_N^m}{m}=\frac{N!}{m(N-m)!}$$

种不同的排法.

(4) **组合**

① **不允许重复的组合**　从 N 个不同元素中任取 $m(m\leqslant N)$ 个元素，不管其顺序并成一组，称为从 N 个不同元素中任取 m 个的一个**组合**.这样的组合共有

$$C_N^m=\frac{N!}{m!\ (N-m)!}$$

种.

② **允许重复的组合**　从 N 个不同元素中任取 m 个元素（允许重复选取，即有放回选取）不管其顺序并成一组，称为**允许重复的组合**.这样的组合共有

$$C_{N+m-1}^m=\frac{(N+m-1)!}{m!\ (N-1)!}$$

种.

(5) **几个常用的公式**

① $C_N^m=\dfrac{P_N^m}{m!}$；　② $C_N^m=C_N^{N-m}$；　③ $C_N^m+C_N^{m-1}=C_{N+1}^m$；

④ $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}$， $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$.

§1.2 疑难解答

1. 如何确定样本空间?

答 对于一个随机试验而言，样本空间并不一定唯一，在同一试验中，若试验目的不同，样本空间往往是不同的.如把一颗骰子掷两次作为一个随机试验时，若试验目的是考察出现的点数分布情况，则样本空间 $\Omega_1=\{(1,1),(1,2),\cdots,(6,6)\}$，有 36 个样本点；若试验目的是考察两次出现的点数之和，则样本空间 $\Omega_2=\{2,3,\cdots,12\}$，有 11 个样本点.

2. 对立事件与互斥事件有何联系与区别?

答 由定义知对立事件与互斥事件的联系与区别是：

(1) 两事件对立，必定互斥，但互斥未必对立.

(2) 对立概念只适用于两个事件，但互斥的概念也适用于多个事件.

(3) 两个事件互斥只表明这两个事件不能同时发生，即至多只能发生其中一个，但可以都不发生.而两事件对立则表示它们有且仅有一个发生.

3. 如何用已知事件表达有关的其他事件?

答 首先要熟练掌握事件间的关系、运算和法则；其次还必须对具体问题进行具体分析，下面举例说明：

设 A,B,C 为已知事件，则

(1) “A 发生而 B 与 C 都不发生”可表示为 $A\bar{B}\bar{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B\cup C)$ 或 $A(\overline{B\cup C})$.

(2) “A 与 B 都发生而 C 不发生”可表示为 $AB\bar{C}$ 或 $AB-C$ 或 $AB-ABC$.

(3) “A,B,C 都发生”可表示为 ABC .

(4) “A,B,C 都不发生”可表示为 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 或 $\overline{A\cup B\cup C}$.

(5) “A,B,C 中至少有一个发生”可表示为 $A\cup B\cup C$.

(6) “A,B,C 中至少有两个发生”可表示为 $AB\cup BC\cup AC$ 或 $AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup ABC$.

(7) “A,B,C 中不多于一个发生”可表示为 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$ 或 $\overline{AB\cup BC\cup AC}$.

(8) “A,B,C 中不多于两个发生”可表示为 $\overline{ABC}$ 或 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup A\bar{B}C\cup AB\bar{C}$.

(9) “A,B,C 中恰好有一个发生”可表示为 $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$.

(10) “A,B,C 中恰好有两个发生”可表示为 $AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$ 或 $AB\cup BC\cup AC-ABC$.

4. 概率是否可以看作频率的极限?

答 这种理解是不恰当的.因为当 $n\to\infty$ 时，频率 $f_n(A)$ 在 $P(A)$ 附近摆动，与高等数学中极限的 $\varepsilon-N$ 概念是不同的，由于概率是随机现象的可能性的赋值，对任给的 $\varepsilon>0$，存在

偶然的因素，可能找不到 $N(\varepsilon)$，从而得不到 $|f_n(A)-P(A)|<\varepsilon$.

5. 在等可能概型的计算中应注意什么问题?

答　等可能概型的概念有两大条件：① 样本点总数有限；② 每个基本事件是等可能发生.而计算随机事件 A 发生的概率公式

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 包含的样本点（基本事件）个数}}{\Omega\text{ 包含的样本点（基本事件）个数}}.$$

计算中应注意如下问题：

(1) 在分析随机试验求样本空间 Ω 时，基本事件必须是等可能发生，如不是等可能的就不能用上面的公式计算.公式中的分子、分母必须在同一个样本空间内计数，否则计算结果是错误的.

(2) 对事件 A 的分析，如果 A 比较复杂，可采用逐步加细的方法：复杂事件由简单事件组成，简单事件是由基本事件组成，这样就不会重复或漏算 A 所包含的基本事件个数.如果 A 事件过于复杂，则$\bar{A}$可能比较简单，可先计算 $P(\bar{A})$，再用 $P(A)=1-P(\bar{A})$求出 $P(A)$.

(3) 在等可能概型中计算概率常用的工具是：事件的关系、运算及其法则，概率的定义及其性质，排列、组合及乘法原理和加法原理等.正确、熟练、灵活地使用这些工具，养成具体问题具体分析的习惯是解决问题的关键.

6. 条件概率为什么是概率? 它与无条件概率有何区别?

答　条件概率是一种概率，可以验证它满足概率定义中的三个条件.

条件概率$P(B|A)$是在试验 E 的条件下又加上一个新的条件A 已发生时，在 A 内求事件B 的概率，即一般在缩减的样本空间 $\Omega_A=A$ 内求B 发生的概率.而无条件概率 $P(B)$ 是在试验 E 的条件下求B 发生的概率，一般地，$P(B)\neq P(B|A)$.

7. 条件概率 $P(B|A)$与积事件概率 $P(AB)$有何区别与联系?

答　条件概率 $P(B|A)$是在试验 E 的条件下增加条件A 发生后，求得的事件 B 发生的概率.而积事件概率 $P(AB)$是在试验 E 的条件下，A、B 同时发生的概率，它们的区别在于它们发生时求概率的条件不同.

其联系是 $P(B|A)$与 $P(AB)$可以相互表示，即

$$P(B|A)=P(AB)/P(A),\quad P(AB)=P(A)P(B|A).$$

一般说来，$P(B|A)$比 $P(AB)$大.初学者在计算条件概率问题时，有时比较容易将积事件概率与条件概率混淆.这时须弄清：条件概率一定是某事件已发生的条件下该事件发生的概率.

8. 如何使用全概率公式和贝叶斯公式?

答　全概率公式是应用广泛的一个公式.它把事件 A 的概率（不太好求），分成几个比较容易计算的概率之和，看似繁琐，实则简单.在分析问题时，A 可视为 $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n$ 的子事件，或者把 B_i 看成A 发生的原因，A 是结果，而 $P(B_i)$及 $P(A|B_i)(i=1,2,\cdots,n)$较易求得，从而可由“原因”求出“结果”.

贝叶斯公式有时称为**后验概率公式**，它实际上是条件概率.在已知结果发生的情况下，求导致结果的某种原因的可能性大小.比如求 $P(B_1|A)$，当 $P(A)$(常用全概率公式计算)，$P(B_1)$，$P(A|B_1)$较易求得时，就要用贝叶斯公式，它是由“结果”求“原因”.

在使用这两个公式时有两点推广：① $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 不一定是Ω 的划分，只要它们两两互斥且 $A\subset\bigcup_{i=1}^{n}B_i$，两公式仍成立，某些 B_i 也不一定是A 发生的“原因”；② 公式中原因的个数可以是无穷多，即 $n=\infty$时，两公式也对.

9. 后验概率与先验概率有何区别?

答 贝叶斯公式中，已知事件 B_i 的概率$P(B_i)$称为**“先验概率”**，它是试验前根据以往经验确定的一种概率.现在进行了一次试验，如果事件 A 确实发生了，则对事件 B_i 的概率应予重新估计，也就是事件 A 发生之后，再来判断事件 B_i 发生的概率$P(B_i|A)$，称之为**“后验概率”**.实际上就是用 $P(B_i|A)$对 $P(B_i)$进行修正，所以 $P(B_i|A)$也称为**“修正概率”**.

由于后验概率的计算仍以先验概率为基础，所以两者有一定的联系.但后验概率是在试验之后事件 A 确已发生的情况下来分析原因B_i 发生的概率，因而一般来讲，有利于 A 发生的那些原因的概率就会增大，而不利于 A 发生的那些原因的概率就会减少.

10. 在实际应用中，如何判断两事件的独立性?

答 在实际应用中，对于事件的独立性，我们常常不是用定义来判断，而是由试验方式来判断试验的独立性，再由试验的独立性来判断事件的独立性；或者根据问题的实质，直观上看一个事件发生是否影响另一事件的概率来判断.例如：甲、乙两名射手在相同条件下进行射击，则“甲击中目标”与“乙击中目标”两事件是独立的.

如果对实际问题中的事件还难以判断它们是否独立，则要利用统计资料进行分析，再来判断是否符合事件独立性的条件.

11. 两事件 A,B 相互独立与A,B 互不相容（互斥）这两个概念有何区别？有何关系?

答 两个事件 A,B 相互独立，其实质是事件 A 发生与否对事件B 出现的概率不产生影响，即条件概率 $P(B|A)=P(B)$.

而 A,B 互不相容，则是指 B 出现必然导致A 不出现，或 A 出现必然导致B 不出现，即 $AB=\varnothing$，从而 B 出现的概率与事件A 是否出现密切相关.

那种认为“两事件相互独立必定不相容（互斥）”的认识是错误的.因为在 $P(A)>0$，$P(B)>0$的条件下，若 A,B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)>0$；而若 A,B 互不相容，则$P(AB)=0$，两种概念出现矛盾.这说明在 $P(A)>0,P(B)>0$ 的情况下，相互独立的事件不能互不相容.

因此，在一般情况下，相互独立与互不相容（互斥）是两个完全不同的概念，它们从定义、实质、功能三个方面都不一样.

12. “n 个事件相互独立”与“n 个事件两两独立”是否一回事?

答 不是的，后者只是前者的条件之一，由前者可推出后者，但反过来不行.

13. 怎样判断试验是否为 n 重伯努利试验?

答 n 重伯努利试验必须满足两个条件：一是各次试验的条件是稳定的，保证事件 A 发生的概率 p 在各次试验中保持不变；二是 n 次试验是相互独立的.如果一个试验满足这两个条件，就是 n 重伯努利试验.现实生活中有许多现象程度不同地符合这两个条件，而不一定分厘不差，近似满足这两个条件，也可看作 n 重伯努利试验.

14. 为什么说在大量重复试验中，小概率事件迟早会发生?

答　概率很小的事件称为**小概率事件**.可以证明，在随机试验中某一事件 A 出现的概率 $\varepsilon>0$ 不论多么小，只要不断地、独立地重复试验，则事件 A 迟早会出现的概率为 1 .

事实上不妨设 A_k 为 A 于第 k 次试验中出现，则 $P(\bar{A}_k)=1-\varepsilon$，在前 n 次试验中，A 至少出现一次的概率为 $p_n=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n)=1-(1-\varepsilon)^n$.于是当 $n\to\infty$ 时, $p_n\to 1$，所以小概率事件 A 迟早会发生.

15. 什么是“实际推断原理”? 它有什么作用?

答　在实践中，人们总结得到“概率很小的事件在一次试验中几乎是不发生的”，这一经验称为**“实际推断原理”**.根据实际推断原理，如果小概率事件在一次试验中竟然发生了，我们就有理由怀疑该事件是小概率事件的正确性.“实际推断原理”可用在概率反证法上：现在有 A,B 两种对立情况，不知哪种情况对，不妨假设 A 正确，在 A 正确的条件下对实际问题中出现的事件进行概率计算，如果是大概率，则认为 A 对，否则，则认为 A 不对，B 对.

§1.3　典型例题

例 1　写出下列各随机试验的样本空间：

(1) 同时掷三颗骰子，记录三颗骰子点数之和.

(2) 甲乙两人下一局棋，观察棋赛结果.

(3) 10 件产品中有 3 件次品，每次从中任取 1 只，取后放回，直到将 3 只次品都取到为止，记录抽取产品的次数.

(4) 一只袋中有许多红色、白色、蓝色小球，现从中任取 3 只，观察它们具有哪几种颜色.

(5) 一只袋中装有编号分别为 1,2,3,4,5 的 5 个外形相同的球，从中任取 3 个球，观察取出球的号码.

(6) 观测某路口每天通过的汽车数.

解　(1) $\Omega=\{3,4,5,\cdots,18\}$.

(2) $\Omega=\{$甲胜乙负，乙胜甲负，和棋$\}$.

(3) 要将 3 件次品都取出，至少要抽取 3 次，最多抽取次数不限（因为是有放回抽样)，故

$$\Omega=\{3,4,5,\cdots\}.$$

(4) 设 r,ω,b 分别表示红色、白色和蓝色，则 $\Omega=\{r,\omega,b,r\omega,\omega b,rb,r\omega b\}$.

(5) 以 (x,y,z) 表示三个球的号码组合，其中 x 为 3 个球的最小号码，z 为 3 个球的最大号码，则

$$\Omega=\left\{\begin{matrix}(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),(1,3,5)\\(1,4,5),(2,3,4),(2,3,5),(2,4,5),(3,4,5)\end{matrix}\right\}.$$

(6) $\Omega=\{0,1,2,3,\cdots\}$.

例 2　设 A 表示“甲射击命中”，B 表示“乙射击命中”，C 表示“丙射击命中”，试用

语言表述下列各事件：

(1) $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$；　(2) $\overline{A\cup B}$；　(3) $ABC\cup\bar{A}BC$；

(4) $\overline{A\cup B\cup C}$；　(5) $\overline{AB}$；　(6) $(A\cup B)\bar{C}$.

解 (1) $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}=\overline{ABC}$表示甲、乙、丙至少有一个没命中，即甲、乙、丙不都命中.

(2) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B}$ 表示甲、乙中没有一个命中，即甲、乙都不命中.

(3) $ABC\cup\bar{A}BC=BC$ 表示乙、丙同时命中.

(4) $\overline{A\cup B\cup C}=\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 表示甲、乙、丙中没有一个命中，即甲、乙、丙都不命中.

(5) $\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$ 表示甲、乙不都命中，即甲、乙至少有一个不命中.

(6) $(A\cup B)\bar{C}=A\bar{C}\cup B\bar{C}$ 表示甲、乙至少一个命中而丙不命中，即甲命中丙不命中或乙命中丙不命中.

例 3 求解下列各题：

(1) 设 A,B 为随机事件，$P(A)=0.5,P(A-B)=0.2$.求 $P(\overline{AB})$；

(2) 已知 $P(A)=0.2,P(B)=0.5$.当 A,B 互斥时，求 $P(\overline{A\cup B})$；当 A,B 相互独立时，求 $P(\overline{A\cup B})$；

(3) 已知 $P(A)=0.6,P(B\bar{A})=0.1$.当 A,B 相互独立时，求 $P(A\cup B)$.

解 (1) 由于 $A-B=A-AB$，因此 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，于是

$$P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.5-0.2=0.3,$$
$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.3=0.7 .$$

(2) 因为 $P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B),P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

当 A,B 互斥时，$AB=\varnothing,P(AB)=0$，所以

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.7,\qquad P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=0.3$.

当 A,B 相互独立时,$P(AB)=P(A)P(B)=0.1$，所以

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.6,\qquad P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=0.4$.

(3) 因为 A,B 相互独立，所以 $B,\bar{A}$也相互独立，故 $P(B\bar{A})=P(B)P(\bar{A})=0.1$.由题设知 $P(\bar{A})=0.4$，故

$$P(B)=0.1/0.4=0.25,\qquad P(AB)=P(A)P(B)=0.15,$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.6+0.25-0.15=0.7 .$$

例 4 证明下列各题：

(1) 若 $P(A)=\alpha,P(B)=2\alpha,P(C)=3\alpha,P(AB)=P(BC)=\beta$，则 $\alpha\leqslant 1/4$.

(2) 对任意事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

① $P(A_1A_2)\geqslant P(A_1)+P(A_2)-1$；

② $P(A_1A_2\cdots A_n)\geqslant P(A_1)+P(A_2)+\cdots P(A_n)-(n-1)$.

(3) 对任意事件 A,B，总有 $P(A\cup B)P(AB)\leqslant P(A)P(B)$成立.

证 (1) 由 $AB\subset A$，知 $P(AB)\leqslant P(A)$，得 $\beta\leqslant\alpha$.又由加法公式

$$1\geqslant P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(BC)=2\alpha+3\alpha-\beta\geqslant 4\alpha,$$

所以 $\alpha\leqslant 1/4$.

(2) ① 由加法公式知 $P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$，所以

$$P(A_1A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cup A_2)\geqslant P(A_1)+P(A_2)-1 .$$

② 用数学归纳法，当 $n=2$ 时，由①知不等式成立. 设不等式对 $n-1$ 成立，则

$$\begin{aligned}P(A_1A_2\cdots A_n)&=P[(A_1A_2\cdots A_{n-1})A_n]\\&\geqslant P(A_1A_2\cdots A_{n-1})+P(A_n)-1\\&\geqslant P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_{n-1})-(n-2)+P(A_n)-1\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)-(n-1).\end{aligned}$$

(3) 对 $A\cup B=(A-B)\cup(B-A)\cup AB$ 两边求概率，两边再同乘 $P(AB)$，得

$$\begin{aligned}P(A\cup B)P(AB)&=P(A-B)P(AB)+P(B-A)P(AB)+P(AB)P(AB)\\&\leqslant P(A-B)P(B-A)+P(A-B)P(AB)+P(B-A)P(AB)+P(AB)P(AB)\\&=[P(A-B)+P(AB)][P(B-A)+P(AB)]\\&=[P(A)-P(AB)+P(AB)][P(B)-P(AB)+P(AB)]\\&=P(A)P(B).\end{aligned}$$

所以　$P(A\cup B)P(AB)\leqslant P(A)P(B)$.

例 5　从0～9 共 10 个数字中任取 3 个，求能排成一个三位偶数的概率.

解　从 10 个数字中任取 3 个共有 $n=P_{10}^3$ 种不同的排列，其中末位数字为偶数的有 $5P_9^2$ 种排列，而首位数字为 0 末位数字为偶数的有 $4P_8^1$ 种排列，故事件 $A=$“能排成一个三位偶数”包含的样本点数 $k=5P_9^2-4P_8^1$，于是

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{5P_9^2-4P_8^1}{P_{10}^3}=\frac{41}{90}\approx 0.456\ .$$

例 6　设一批产品共100 件，其中有 5 件次品，从中任取 50 件，考虑以下三种取法：(1) 有放回抽样；(2) 不放回抽样；(3) 一次性抽样. 分别在这三种情形下，求抽得 50 件无次品的概率和恰有 3 件次品的概率.

解　设 $A=$“抽得的 50 件中无次品”，$B=$“抽得的 50 件中恰有3 件次品”.

(1) **有放回抽样**：从一批产品中每次取 1 件，检验后又放回该批产品中，这种抽取产品的方式叫做**有放回抽样**（即**重复抽样**）. 故每次都有 100 件供抽取，所以从 100 件中抽取 50 件，共有 100^{50} 种不同取法，试验的样本空间 Ω_1 中有 100^{50} 个样本点.

事件 A 表示 50 件全是正品，则这 50 件正品只能从 95 件正品中取得，有 95^{50} 种不同取法，即 A 中含有 95^{50} 个样本点，故得

$$P(A)=\frac{95^{50}}{100^{50}}=0.0769\ .$$

事件 B 表示取得的 50 件中恰有 3 件次品，在 50 次抽取中，出现 3 件次品的不同情形有 C_{50}^3 种；而 3 件次品只能从 5 件次品中抽取，有 5^3 种不同取法；其余 47 件正品只能从 95 件正品中抽取，有 95^{47} 种不同取法，故 B 中含有 $C_{50}^3\times5^3\times95^{47}$ 个样本点，所以

$$P(B)=\frac{C_{50}^3\times5^3\times95^{47}}{100^{50}}=0.2199\ .$$

(2) **不放回抽样**：每次抽取的产品检验后不放回该批产品中，这种抽取产品的方式叫做**不放回抽样**. 由于每次抽取后，该批产品都减少 1 件，依次放好抽取的 50 件，有 P_{100}^{50} 种不同取法，即样本空间 Ω_2 含有 P_{100}^{50} 个样本点；经类似分析可知，事件 A 含有 P_{95}^{50} 个样本