湖南大学出版社
图书出版基金资助项目

一般拓扑学

李庆国 汤灿琴 李纪波 编著

湖南大学出版社

湖南大学出版社
图书出版基金资助项目

一般拓扑学

李庆国 汤灿琴 李纪波 编著

湖南大学出版社

内容简介

本书系统地介绍了一般拓扑学的基础知识．全书共分8章，内容包括：预备知识，拓扑空间，Moore-Smith收敛，子空间、乘积空间和商空间，度量空间和度量化，紧空间，一致空间，函数空间．每章后还附有适量的习题，以供读者学习后加深理解．本书的特点在于叙述深入浅出，证明过程严谨，详尽易懂，并辅以丰富的例题，使得深奥难懂的拓扑学变得轻松易学．

本书适合作大学数学专业本科高年级或硕士研究生低年级的拓扑学人门教材，也可供高等学校相关专业师生参考．

图书在版编目(CIP)数据

一般拓扑学/李庆国，汤灿琴，李纪波编著．

—长沙：湖南大学出版社，2006.7

ISBN 7—81113—052—1

Ⅰ.一…　Ⅱ.①李…②汤…③李…　Ⅲ.拓扑

Ⅳ.O189

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第064032号

一般拓扑学

Yiban Tuopuxue

作　　者：李庆国　汤灿琴　李纪波　**编著**

责任编辑：厉　亚　　**责任校对**：张建平

封面设计：吴颖辉　　**责任印制**：陈　燕

出版发行：湖南大学出版社

社　　址：湖南・长沙・岳麓山　　**邮　　编**：410082

电　　话：0731-8821691(发行部)，8821142(编辑室)，8821006(出版部)

传　　真：0731-8649312(发行部)，8822264(总编室)

电子邮箱：pressliy@hun.cn

网　　址：http://press.hnu.cn

印　　装：国防科技大学印刷厂

开本：880×1230　32开　**印张**：5.75　**字数**：170千

版次：2006年7月第1版　**印次**：2006年7月第1次印刷　**印数**：1～5 000册

书号：ISBN 7-81113-052-1/O・64

定价：12.00元

前　言

湖南大学将《一般拓扑学》列为大学数学专业高年级本科生的选修课和硕士研究生一年级的必修课已有多年. 苦于没有合适的教材，我们自编讲义，使用多年，取得了较好的教学效果. 本书就是在原有讲义的基础上，融入我们近年的教学和科研成果，修订而成的.

作为大学数学专业高年级本科生和低年级硕士生的教材，一方面要反映本学科最具基础性和普遍性的知识，以保持内容的全面性和连贯性；另一方面又要有一定的难度和深度，为学生日后更加深入地在该领域开展研究提供一个好的切入点. 为此，我们对现有拓扑学教材进行了深入的研究，较好地兼顾了这两方面的需要.

一般拓扑学源于几何学，许多概念都有很强的几何背景，但在表达形式上它又是很抽象的，它的概念用公理化的方法建立，没有分析学那么多的计算，却大量运用逻辑推理. 在编写过程中，我们尽量使逻辑推理简单明了. 对其他教材定理证明过程中的抽象部分及难点进行了分解，表述尽量详尽易懂，既保留了原有证明中技巧的完美性，又增加了可读性和易懂性.

参加本书编写的有李庆国、汤灿琴、李纪波. 李庆国编写了第 2 章至第 6 章并负责全书的统稿，汤灿琴编写了第 1 章和第 7 章，李纪波编写了第 8 章和各章的习题.

在编写本书的过程中，我们参考了吴丛炘和吴让泉译的 Kelly J L 的《一般拓扑学》，以及江泽涵的《拓扑学引论》等中、外文献，恕不一一列举. 在此对这些文献的作者表示衷心的感谢.

本书的编写得益于数学界许多前辈的鼓励和支持，得益于教学过程中伍秀华、周利君、兰尧尧等同学的建议，正是他们的帮助使本书得

以逐步完善.湖南大学出版社图书出版基金的资助,使得本书最终得以出版.在本书出版过程中,厉亚老师为我们提供了许多帮助.在此,一并致以衷心的感谢.

编著者

2006年4月于湖南大学

目 录

第1章 预备知识

1.1 集合

我们通常描述集合为具有某种共同特性的一些个体组成的整体，其中的个体称为这个集合的元素，也简称为元. 集合中的元素是确定的，给定一个集合 A，对于任意的 a，a 只可能属于 $A(\in A)$ 或不属于 $A(\notin A)$. 另外集合的元素具有无序性和无重复性. 集合通常借助括号完成. 记集合 $A=\{x$ 满足的某种特性$\}$ 或 $A=\{x\mid x$ 满足某命题$\}$，它表示使得关于 x 的此命题是正确的所有点 x 的集，比如说 $A=\{x\mid x>1, x\in\mathbf{R}\}$ 表示所有大于 1 的全体实数的集合. 若两集合具有完全相同的元，则称两集合相等.

不含有任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$. 按集合中元素个数的多少可以将集合分为有限集与无限集.

下面我们考虑集合的运算. 若 A 与 B 是两个集，则 A 是 B 的一个子集当且仅当 A 的每个元都是 B 的一个元. 即 $A\subset B\Leftrightarrow\forall x\in A$ 有 $x\in B$. 我们规定空集为任一集 A 的一个子集，即 $\varnothing\subset A$. 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则 $A=B$，这是证明两集合相等的一个重要方法.

集 A 与 B 的交是指由既属于 A 也属于 B 的元素组成的集合，也就是说，$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$. 集 A 与 B 的并是由所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合，也就是说，$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$. A 的余集 A^c 是 $\{x\mid x\notin A\}$. 集合 A 与 B 的差，记作 $A-B$，是由属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合，即 $A-B=\{x\mid x\in A$ 但 $x\notin B\}$.

下面的两个定理将会指出集合运算具有一些特殊性质，这都是一些基本的事实，在此我们只证这两个定理的一部分.

定理 1.1.1 设 A 与 B 是集 X 的两个子集，则 $A\subset B$ 当且仅当下

列条件之一成立:$A\cap B=A$;$B=A\cup B$;$X-B\subset X-A$;$A\cap(X-B)=\varnothing$;$(X-A)\cup B=X$.

此证明由读者自行完成.

定理 1.1.2 设 A,B,C 与 X 为集,则

(1)$X-(X-A)=A\cap X$.

(2)(交换律)$B\cup A=A\cup B$;$A\cap B=B\cap A$.

(3)(结合律)$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(4)(分配律)$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(5)(De Morgan 公式)

$X-(A\cup B)=(X-A)\cap(X-B)$;

$X-(A\cap B)=(X-A)\cup(X-B)$.

证明 (1)因 $x\in X-(X-A)$ 当且仅当 $x\in X$ 且 $x\notin X-A$,而 $x\notin X-A$ 当且仅当 $x\in A$,从而 $x\in X-(X-A)$ 当且仅当 $x\in X$ 且 $x\in A$,即 $x\in X\cap A$.

(4)我们仅证第二部分.

设 $x\in A\cup(B\cap C)$,则 $x\in A$ 或 $x\in B\cap C$.若 $x\in A$,则 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$,即 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.若 $x\in B\cap C$,则 $x\in B$ 且 $x\in C$,故 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$,所以我们有 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.这样我们就有 $A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C)$.反过来,若 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$,则 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$,故 $x\in A$ 或 $x\in B$ 且 $x\in A$ 或 $x\in C$.若 $x\in A$,则 $x\in A\cup(B\cap C)$,若 $x\notin A$,则 $x\in B$ 且 $x\in C$,从而 $x\in B\cap C$,这样就有$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subset A\cup(B\cap C)$.综合两方面,我们有 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(5)仅给出第一部分证明.

若 $x\in X-(A\cup B)$,则 $x\in X$ 且 $x\notin A\cup B$.因 $x\notin A\cup B$ 是指 $x\notin A$ 且 $x\notin B$,所以 $x\in X$ 但 $x\notin A$,且 $x\in X$ 但 $x\notin B$,即 $x\in(X-A)\cap(X-B)$,这样有 $X-(A\cup B)\subset(X-A)\cap(X-B)$.反过来,若 $x\in(X-A)\cap(X-B)$,则 $x\in X-A$ 且 $x\in X-B$,所以 $x\in X$ 且 $x\notin A$ 及 $x\notin$

B，即 $x\in X$ 且 $x\notin A\cup B$，故 $x\in X-(A\cup B)$，所以我们有 $X-(A\cup B)=(X-A)\cap(X-B)$.

若设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 均为集，则 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 表示这些集的并，记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. 所以有 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\{x\mid\exists i,1\leqslant i\leqslant n,\text{s.t. }x\in A_i\}$. 这里 s. t. 表示使得(such that)的意思，而 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 表示它们的交，记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$. 所以 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=\{x\mid\forall i,1\leqslant i\leqslant n,x\in A_i\}$. 集合运算的交换律和结合律都可推广到有限个集合的情形. 另外我们来考虑非有限的集族的元的并. 若称 I 为指标集，则当 I 为自然数集时，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\{x\mid\exists i,\text{s.t. }x\in A_i\}$ 且 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\{x\mid\forall i,x\in A_i\}$. 当 I 为不可数集时，$\bigcup\limits_{a\in I}A_a=\{x\mid\exists a\in I,\text{s.t. }x\in A_a\}$ 且 $\bigcap\limits_{a\in I}A_a=\{x\mid\forall a\in I,x\in A_a\}$.

关于集族的元的并与交有许多具有代数特征的定理，我们只叙述下面一个.

定理 1.1.3　设 I 为指标集，并且对于在 I 中的每一个 a，A_a 为固定集 X 的一个子集，则

(1)若 B 是 I 的一个子集，则

$$\bigcup_{a\in B}A_a\subset\bigcup_{a\in I}A_a,\ \bigcap_{a\in B}A_a\supset\bigcap_{a\in I}A_a.$$

(2)(De Morgan 公式)

$$\left(\bigcup_{a\in I}A_a\right)^c=\bigcap_{a\in I}A_a{}^c,\ \left(\bigcap_{a\in I}A_a\right)^c=\bigcup_{a\in I}A_a{}^c.$$

即并的余集等于余集的交，交的余集等于余集的并.

证明　我们仅证(2)的第一部分.

设 $x\in(\bigcup\limits_{a\in I}A_a)^c$，则 $x\notin\bigcup\limits_{a\in I}A_a$，所以 $\forall a\in I$，有 $x\notin A_a$，即 $x\in A_a^c$，故 $x\in\bigcap\limits_{a\in I}A_a{}^c$. 这样就有 $(\bigcup\limits_{a\in I}A_a)^c\subset\bigcap\limits_{a\in I}A_a{}^c$.

反过来，设 $x\in\bigcap\limits_{a\in I}A_a{}^c$，则对于每一个 $a\in I$，有 $x\in A_a^c$，即 $\forall a\in I$，有 $x\notin A_a$，故 $x\notin\bigcup\limits_{a\in I}A_a$，也就是有 $x\in(\bigcup\limits_{a\in I}A_a)^c$，所以 $\bigcap\limits_{a\in I}A_a{}^c\subset(\bigcup\limits_{a\in I}A_a)^c$.

综合上述两步，我们有 $(\bigcup\limits_{a\in I}A_a)^c=\bigcap\limits_{a\in I}A_a{}^c$.

1.2 关 系

前面我们已经给出了集的概念，那么怎样用集的术语来定义其他必需的概念？大家知道 3 和 5 满足“小于”关系，即“$3<5$”. 类似的还有“相等”和“平方”等关系. 我们用序偶$(3,5)$来表示 3 和 5 的关系，这里将有先后次序的一对元(x,y)叫一个序偶. 这样每一个具体的关系都与以序偶为元的某个集相对应.

定义 1.2.1 关系是由所有相互有关的对象的序偶组成的集合.

例 1.2.1 集合 $X=\{1,2,3,4,5\}$，则

“小于”关系$=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)\}$；

“平方”关系$=\{(1,1),(2,4)\}$.

若 V 是一个关系，我们用 xVy 简记$(x,y)\in V$，称 x 与 y 是 V-相关的.

定义 1.2.2 若 V 是一个关系，则 $\mathscr{D}(V)=\{x\mid \exists y,\text{s. t. }(x,y)\in V\}$ 称为关系 V 的定义集，$\mathscr{R}(V)=\{y\mid \exists x,\text{s. t. }(x,y)\in V\}$，称为关系 V 的值集.

接着，我们来讨论一类最简单的关系：笛卡儿(Cartesian)乘积.

定义 1.2.3 设 X,Y 是任意两个集，则

(1)$X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}$为 X 与 Y 的笛卡儿积；

(2)$id_x=\{(x,x)\mid x\in X\}$为 X 上的恒同关系，或称为 $X\times X$ 的对角线，也记为 $\Delta(X)$；

(3)称 V 是 X 到 Y 的一个关系当且仅当 $V\subset X\times Y$ 使得 $\mathscr{D}(V)\subset X,\mathscr{R}(V)\subset Y$. X 到 X 的任一关系简称为 X 上的关系.

在此基础上，我们还可以定义逆关系和复合关系.

定义 1.2.4 若 V 和 W 是两个关系，则逆关系 $V^{-1}=\{(x,y)\mid (y,x)\in V\}$，

V 与 W 的复合关系 $W\circ V=\{(x,y)\mid \exists t,\text{s. t. }(x,t)\in V,(t,y)\in W\}$.

例 1.2.2 $X\times Y$ 是 X 到 Y 的一个关系，则$(X\times Y)^{-1}=Y\times X$.

例 1.2.3　id_x 是 X 上的一个恒同关系，$(id_x)^{-1}=id_x, id_x\circ V=V=V\circ id_x$.

例 1.2.4　设 $V=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R}, y=\cos x\}$，$U=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R}, x>0, y=\ln x\}$，则 $V\circ U=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R}, x>0, y=\cos(\ln x)\}$，$U^{-1}=\{(x,y)\mid y\in\mathbf{R}, y=\mathrm{e}^x\}$.

定义 1.2.5　如果 V 是一个关系，且 A 是一个集，则 $V[A]=\{y\mid \exists x\in A, \text{s. t. } (x,y)\in V\}$ 称作关系 V 在集合 A 下的像.

对于关系有大量的运算，下面的定理就是其中一部分.

定理 1.2.1　设 U 和 V 是两个关系，A 是一个集合，则

(1)$(V\circ U)[A]=V[U[A]]$;

(2)$V[\bigcup\limits_i A_i]=\bigcup\limits_i\{V[A_i]\}$;

(3)$V[\bigcap\limits_i A_i]\subset\bigcap\limits_i\{V[A_i]\}$.

证明

$$
\begin{aligned}
(1)V\circ U[A]&=\{y\mid \exists x\in A, \text{s. t. } (x,y)\in V\circ U\}\\
&=\{y\mid \exists x\in A, \exists t, \text{s. t. } (x,t)\in U, \text{且} (t,y)\in V\}\\
&=\{y\mid \exists t\in U[A], \text{s. t. } (t,y)\in V\}\\
&=V[U[A]].
\end{aligned}
$$

(2)设 $y\in V[\bigcup\limits_i A_i]$，则 $\exists x\in\bigcup\limits_i A_i$, s. t. $(x,y)\in V$，因 $\exists i_0$, s. t. $x\in A_{i_0}$ 且 $(x,y)\in V$，即 $y\in V[A_{i_0}]$，故 $y\in\bigcup\limits_i\{V[A_i]\}$，即 $V[\bigcup\limits_i A_i]\subset\bigcup\limits_i\{V[A_i]\}$.

反过来，设 $y\in\bigcup\limits_i\{V[A_i]\}$，则 $\exists i_0$, s. t. $y\in V[A_{i_0}]$，即 $\exists x\in A_{i_0}$, s. t. $(x,y)\in V$. 故 $x\in\bigcup\limits_i A_i$ 且 $(x,y)\in V$，这样 $y\in V[\bigcup\limits_i A_i]$，也就有 $\bigcup\limits_i\{V[A_i]\}\subset V[\bigcup\limits_i[A_i]]$.

由集合相等的定义有 $V[\bigcup\limits_i A_i]=\bigcup\limits_i\{V[A_i]\}$.

(3)设 $\forall y\in V[\bigcap\limits_i A_i]$，则 $\exists x\in\bigcap\limits_i A_i$, s. t. $(x,y)\in V$. 故 $\forall i$，有 $x\in A_i$ 且 $(x,y)\in V$，即 $y\in V[A_i]$，因此 $y\in\bigcap\limits_i\{V[A_i]\}$.

但定理 1.2.1 中，(3)不能保证等号成立，我们可以举出如下的反例.

例 1.2.5 $V=\{(1,0),(2,0),(3,1)\}$，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,4\}$.

容易验证：$V[A\cap B]=\varnothing\neq V[A]\cap V[B]=\{0\}$.

在数学中常常需要将一个给定的集 X“划分”成若干部分，研究以这些部分为元的新集. 例如代数学中研究的商群、商环和商域等. 这种集的划分与集上的等价关系一一对应.

定义 1.2.6 设 V 是 X 上的一个关系，(1)称 V 在 X 上是自反的 $\Leftrightarrow\forall x\in X, xVx$；(2)称 V 在 X 上是对称的 $\Leftrightarrow$ 若 xVy，则 yVx；(3)称 V 在 X 上是传递的 $\Leftrightarrow$ 若 xVy 且 yVz，则 xVz；(4)称 V 是 X 上的一个等价关系 $\Leftrightarrow V$ 是 X 上的一个自反、对称和传递的关系.

例 1.2.6 假设 P 表示世界上所有人组成的集合. 定义“后裔”关系为 $D=\{(x,y)\mid x$ 是 y 的后代$\}$；“血缘”关系为 $B=\{(x,y)\mid x,y$ 有共同的祖先$\}$；“兄弟姐妹”关系为 $C=\{(x,y)\mid x,y$ 有共同的父母$\}$. 则“后裔”关系既不是自反的，也不是对称的；“血缘”关系不是传递的，因为我和我的孩子都有“血缘”关系，而我和我的妻子没有“血缘”关系；“兄弟姐妹”关系则是一个等价关系.

等价关系具有简单的结构，下面我们来描述它.

定义 1.2.7 设 V 是一个等价关系，则称 $V[x]=V[\{x\}]=\{y\mid (x,y)\in V\}$ 为以 x 为代表的一个模 V 等价类，并且 $X/V=\{V[x]\mid x\in X\}$ 叫做 X 关于 V 的商集.

例 1.2.7 X 表示整数集，$V=\{(x,y)\mid x,y\in X, 3\mid(x-y)\}$，容易验证 V 是自反的、对称的，而 V 也是传递的，因若 $(x,y)\in V$，$(y,z)\in V$，则 $x-y=3t_1$，$y-z=3t_2$，则 $x-z=3(t_1+t_2)$，即 $3\mid(x-z)$，所以 $(x,z)\in V$，这样我们就有 V 为等价关系，又 $V[0]=\{0,3,-3,6,-6\cdots\}$，$V[1]=\{1,4,-2,7,-5\cdots\}$，$V[2]=\{2,5,-1,\cdots\}$，所以 X 关于 V 的商集 $X/V=\{V[0],V[1],V[2]\}$.

定义 1.2.8 1)$\mathscr{P}$ 是集 X 的划分 $\Leftrightarrow\mathscr{P}\subset 2^X$（表示由 X 的所有子集组成的集合）且满足

(1)若 $A\in\mathscr{P}$，则 $A\neq\varnothing$；

(2)若 A、$B\in\mathscr{P}$ 且 $A\neq B$，则 $A\cap B=\varnothing$；

(3)$\bigcup\mathscr{P}=X$.

2)设 $\mathscr{P}$ 是 X 上的一个划分,令 $\varepsilon(\mathscr{P})=\bigcup\{A\times A\mid A\in\mathscr{P}\}$,易知 $\varepsilon(\mathscr{P})$ 是 X 上的一等价关系,称为由 $\mathscr{P}$ 生成的等价关系.

前面已提到了集的划分与集上所得的等价关系是一一对应的,下面的定理 1.2.2 和定理 1.2.3 就对此作了说明.

定理 1.2.2　设 $\mathscr{P}$ 是集 X 的一个划分,则 $X/\varepsilon(\mathscr{P})=\mathscr{P}$.

证明　我们考虑用证明集合相等的方法来完成定理的证明,即需证 $X/\varepsilon(\mathscr{P})\subset\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{P}\subset X/\varepsilon(\mathscr{P})$.

事实上,设 $x\in A$ 且 $y\in\varepsilon(\mathscr{P})[x]$,则 $\exists A_1\in\mathscr{P},(x,y)\in A_1\times A_1$,这样 $x\in A\cap A_1$,因为 $\mathscr{P}$ 是划分,从而 $y\in A_1=A$,其次,设 $y\in A$,则 $(x,y)\in A\times A\subset\varepsilon(\mathscr{P})$,从而 $y\in\varepsilon(\mathscr{P})[x]$. 因此,$\varepsilon(\mathscr{P})[x]=A$. 反之若 $\varepsilon(\mathscr{P})[x]=A$,因 $(x,x)\in\varepsilon(\mathscr{P})$ 故 $x\in A$. 现设 $\varepsilon(\mathscr{P})[x]\in X/\varepsilon(\mathscr{P})$,因 $x\in X=\bigcup\mathscr{P}$, $\exists A\in\mathscr{P}$, s. t. $x\in A$. 故 $\varepsilon(\mathscr{P})[x]=A\in\mathscr{P}$,即 $X/\varepsilon(\mathscr{P})\subset\mathscr{P}$. 反之,设 $A\in\mathscr{P}$,任取 $x\in A$,则 $A=\varepsilon(\mathscr{P})[x]\in X/\varepsilon(\mathscr{P})$,即 $\mathscr{P}\subset X/\varepsilon(\mathscr{P})$,从而 $\mathscr{P}=X/\varepsilon(\mathscr{P})$.

定理 1.2.3　设 V 是集 X 上的一个等价关系,则

(1)X/V 是 X 的一个划分;

(2)$\varepsilon(X/V)=V$.

证明　(1)先证 $xVy\Leftrightarrow V[x]=V[y]$.

事实上,设 xVy 且 $u\in V[y]$,则 yVu,从而 xVu,即 $u\in V[x]$,于是 $V[y]\subset V[x]$,同理可证 $V[x]\subset V[y]$. 反之,设 $V[x]=V[y]$,则 $x\in V[x]=V[y]$,从而 xVy. 现在证 X/V 是 X 的划分. 首先,因 $x\in V[x]$,故 $V[x]\neq\varnothing$. 其次,若 $\exists u\in V[x]\cap V[y]$,则 xVu,且 yVu,由上式知,$V[x]=V[y]=V[u]$. 最后有 $X=\bigcup\{\{x\}\mid x\in X\}\subset\bigcup\{V[x]\mid x\in X\}\subset X$,故 $X=\bigcup(X/V)$.

(2)设 $(x,y)\in\varepsilon(X/V)$,则 $\exists t\in X,(x,y)\in V[t]\times V[t]$,于是 $(t,x),(t,y)\in V$. 由此知 $(x,y)\in V$. 反之,设 $(x,y)\in V$,则 $(x,y)\in V[x]\times V[y]\subset\varepsilon(X/V)$.

例 1.2.8　设 x,y 是平面上的两个点,定义关系 $V=\{(x,y)\mid x,y$ 有相同的纵坐标$\}$. 容易验证 V 是自反的、对称的且是传递的. 从而 V 是一个等价关系. 显然,等价类的集族就是平面中所有与 x 轴平行的

直线(包括 x 轴)所组成的集族,由划分的定义知,该集族是平面的一个划分.

例 1.2.9 设 $\mathscr{L}$ 平面中所有平行于直线 $y=-x$ 的直线组成的集族,既然平面中的每一点只能在其中的一条直线上,那么 $\mathscr{L}$ 是平面的一个划分. 该划分生成了平面上的一个等价关系 V:对平面中任意两点 $x(x_0,y_0)$,$y(x_1,y_1)$,如果 $x_0+y_0=x_1+y_1$,那么 xVy.

1.3 映射

映射是最重要的数学概念之一,它可以理解为两个集的元之间的一种对应的法则,以序偶$(x,f(x))$为元的特殊关系. 在本书中,函数与映射是同义词.

定义 1.3.1 称 f 是集 X 到集 Y 的一个映射,若 f 是 X 到 Y 的一个关系且满足 $\forall x\in X$,存在唯一的 $y\in Y$,使得$(x,y)\in f$,并记为 $f:X\to Y$,这个 y 称为 x 在 f 下的像或值,记为 $f(x)$.

这里,f 的定义集为 $\mathscr{D}(f)=\{x\mid x\in X,\exists y\in Y,\text{s. t. }(x,y)\in f\}$.

f 的值集为 $\mathscr{R}(f)=\{y\mid \exists x\in X,\text{s. t. }(x,y)\in f\}\subset Y$.

注 (1)当 $X=\varnothing$ 时,X 到任一集 Y 的映射只有一个 $f=\varnothing$;

(2)当 $X\neq\varnothing$ 时,X 到 $Y=\varnothing$ 的映射不存在.

例 1.3.1 若从整数集到整数集有一关系 $V=\{(x,y)\mid 3\text{ 整除 }x-y\}$,则 V 不是映射,因 y 不唯一.

例 1.3.2 $V=\{(x,y)\mid y=x^2\}$ 是 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 的平方关系,则 V 是映射.

定义 1.3.2 设 $f:X\to Y$ 是一个映射,

(1)称 f 是满射$\Leftrightarrow\mathscr{R}(f)=Y$;

(2)称 f 是常值映射$\Leftrightarrow\mathscr{R}(f)$是单元集;

(3)称 f 是单射$\Leftrightarrow$若 $f(x)=f(y)$,则 $x=y$;

(4)称 f 是一个一一映射$\Leftrightarrow f$ 既是一个单射又是一个满射.

例 1.3.3 (1)$g=\{(x,\sin x)\mid x\in\mathbf{R}\}$为 $\mathbf{R}$ 到$[-1,1]$的映射,并为满射但不是单射.

(2) $g^{-1}=\{(x,\arcsin x)\mid x\in[-1,1]\}$，但 g^{-1} 不是映射.

逆关系满足下面的代数规则.

定理 1.3.1　设 $f:X\to Y$ 是一个映射，则

(1) 若 $A\subset X$，则 $f[A]=\{f(x)\mid x\in A\}$；

(2) 若 $B\subset Y$，则 $f^{-1}[B]=\{x\in X\mid f(x)\in B\}$；

(3) $f^{-1}[\bigcap\limits_{B_i\subset Y}B_i]=\bigcap\{f^{-1}[B_i]\mid B_i\subset Y\}$.

证明　(1)
$$\begin{aligned}f[A]&=\{y\mid \exists x\in A,(x,y)\in f\}\\&=\{y\mid \exists x\in A,y=f(x)\}\\&=\{f(x)\mid x\in A\}.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}f^{-1}[B]&=\{x\mid x\in X,\exists y\in B,(y,x)\in f^{-1}\}\\&=\{x\mid \exists y\in B,(x,y)\in f\}\\&=\{x\mid \exists y\in B,y=f(x)\}\\&=\{x\mid x\in X,f(x)\in B\}.\end{aligned}$$

(3) 设 $x\in f^{-1}(\bigcap\limits_{B_i\subset Y}B_i)$，则 $f(x)\in\bigcap\limits_{i\in I}B_i$，即 $\forall i\in I$，有 $f(x)\in B_i$，也就是说对于任意的 $i\in I$，有 $x\in f^{-1}[B_i]$，所以 $x\in\bigcap\{f^{-1}[B_i]\mid B_i\subset Y\}$，即 $f^{-1}(\bigcap\limits_{B_i\subset Y}B_i)\subset\bigcap\{f^{-1}[B_i]\mid B_i\subset Y\}$.

反之，若 $x\in\bigcap\limits_i\{f^{-1}[B_i]\mid B_i\subset Y\}$，则对于任意的 i，有 $x\in f^{-1}[B_i]$，而 $f^{-1}[B_i]=\{x\mid \exists y\in B_i,\text{s.t.}(y,x)\in f^{-1}\}$，所以对于任意的 i，存在 $y\in B_i$，s. t. $(y,x)\in f^{-1}$，即 $y\in\bigcap\limits_i B_i$ 且 $(y,x)\in f^{-1}$，故 $x\in f^{-1}[\bigcap\limits_i B_i]$，即 $\bigcap\limits_i\{f^{-1}[B_i]\mid B_i\subset Y\}\subset f^{-1}[\bigcap\limits_i B_i]$.

这样，由集合相等的定义知 $f^{-1}[\bigcap\limits_i B_i]=\bigcap\limits_i\{f^{-1}[B_i]\mid B_i\subset Y\}$.

定义 1.3.3　设 A 是集 X 的一个子集，且有两个映射 $f:A\to Y$，$f^*:X\to Y$ 满足下列关系，$\forall x\in A$，$f^*(x)=f(x)$，则 f^* 称为 f 在 X 上的扩张，而 f 称为 f^* 在 A 上的限制，记为 $f=f^*|_A$.

例 1.3.4　$\mathbf{R}_+=\{x\in\mathbf{R}\mid x>0\}$，

$f:\mathbf{N}\to\mathbf{R}_+$，　$f^*:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$，

$n\to(n-1)$.　$x\to\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$.