国家科学技术学术著作出版基金 NFAPST

现代物理基础丛书 7

微分几何入门与广义相对论

(上册·第二版)

梁灿彬 周 彬

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书(上册)共10章。前5章讲授微分几何入门知识，第6章以此为工具剖析狭义相对论，第7~10章介绍广义相对论的基本内容。本书强调低起点(大学物理系本科2~3年级水平)，力求化难为易，深入浅出，为降低难度采取了多种措施。

本书适用于物理系高年级本科生、研究生和物理工作者，特别是相对论研究者。不关心相对论而想学习近代微分几何的读者也可把本书前5章作为入门阶梯。

图书在版编目(CIP)数据

微分几何入门与广义相对论. 上册/梁灿彬，周彬. 2版. —北京：科学出版社，2006
(现代物理基础丛书；7)
ISBN 7-03-016460-1

I. 微… II. ①梁… ②周… III. ①微分几何—研究生—教材 ②广义相对论—研究生—教材 IV. ①O186.1 ②O412.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第133232号

责任编辑：胡 凯/责任校对：钟 洋
责任印制：钱玉芬/封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2000年4月北京师范大学出版社第一版
2006年1月第 二 版 开本：B5 (720 × 1000)
2006年1月第一次印刷 印张：28 3/4
印数：1—3 000 字数：541 000

定价：59.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

第二版前言

本书第一版(上册)自2000年出版以来，逐渐受到国内理论物理(特别是广义相对论)学界的关注、重视和好评，加之印数不大，两年后便已售罄. 出书后，我持续不断地以本书为教材给博、硕士研究生和本科生开课，至今已经五遍. 其中，除了在北京师范大学之外，还应邀给清华大学基础科学班(本科生)以及中国科学院数学与系统科学研究院的博、硕士研究生开课. 中科院的课还吸引了中科院的其他院所以及11所高等学校(含北京大学和清华大学)的数十名研究生和本科生旁听. 在看到本书对于推广这一学科起到重要作用的同时，我也发现了书中的少数错误、许多不足以及大量有待改进和补充之处，逐渐写成了一个面目一新的再版初稿. 这一再版初稿吸收了我的许多同行和学生的宝贵意见和建议，他们主要是(以姓氏汉语拼音为序)：曹周键、韩慕辛、邝志全、马永革、王志、吴小宁、杨学军、张昊、张红宝、周彬、周美珂，其中贡献最为突出的是曹周键、邝志全、张红宝、周彬. 通过与周彬博士的多次讨论，我发现他的数理修养既博又深，逻辑思维缜密，对书中涉及的(以及本书以外的)大量数理问题有比较清晰、深刻、准确的理解，是一位不可多得的优秀青年物理工作者. 为了进一步提高写作质量，我在再三考虑后决定邀请周彬作为第二作者参与本书的修订工作，并取得他的同意. 近5个月来的密切合作已经证明这是一个正确的决定，我认为周彬对修订工作作出了重要而杰出的贡献.

我要特别感谢对写作本书有重要帮助的两位朋友，第一位是美国国家科学院院士、芝加哥大学教授 Robert Wald 先生，他不但是我步入本领域的优秀启蒙导师，而且对我回国后的教学和写作工作不断提供无私帮助. 第二位是中科院数学所的邝志全研究员，他不仅审阅过本书的不少章节并提出过许多十分宝贵的意见和建议，而且在与我的无数次讨论中以他对问题所特有的深刻思考和领悟使我受益殊深.

本书分上下两册，两册的基本内容已在第一版前言中做过介绍. 第二版的修订工作主要有两大方面：①对全书原有内容做了全面细致的改写；②增补了若干新的内容. 上册的主要增补内容有 Vaidya 度规和 Kinnersley 度规、共轭点、嵌入图及暗能量等，下册的主要增补内容有纤维丛理论及其物理应用、常曲率空间及 de Sitter 和反 de Sitter 时空等. 虽然第二版在内容的深度和广度上都有所增加，但尽力降低难度的写书宗旨和风格不变，初学者可以只学习书中最基本的入门性内容. 全书既可作为研究生课教材(上册还可作为本科二年级以上的选修课教材)，也可作为相对论工作者的参考读物. 不从事相对论工作的物理工作者也可把上册

前 5 章及上下册的某些章节和附录(例如李群和李代数及纤维丛理论)作为微分几何的入门读物.

为了适应不同程度读者的需要，本书内容分为必读和选读两大部分. 各章还配有为数不少的习题. 关于必读、选读部分以及习题的使用建议已详于第一版的前言中.

在广义相对论中经常遇到冗长的公式，采用几何单位制(其中 $c = 1$，$G = 1$)可使公式大为简化. 本书也不例外. 为帮助读者掌握几何制与非几何制之间的转换，我们专门写了一个附录(附录 A).

本书作者衷心感谢李惕碚院士、陆埮院士、郭汉英研究员、刘辽教授、赵峥教授、刘润球研究员、马永革副教授、杨学军教授、田贵花教授以及许多同行和读者对本书第二版出版的关心和支持，也感谢第一版广大读者对本书的关心和厚爱. 限于作者水平，第二版中肯定还存在错误和不足，恳请同行和读者不吝指正.

梁灿彬

2005 年 4 月于北京师范大学

第一版前言

笔者从 1981 年起在美国芝加哥大学相对论组任访问学者两年. 出国前，由于种种原因，我对广义相对论只略知皮毛，对其必备的数学工具——近代微分几何——所知则近乎为零. 得益于芝加哥大学相对论组浓郁的学术气氛，更由于 Wald 教授(我的导师)和 Geroch 教授的悉心指导，我很快就对这一领域产生了浓厚兴趣. 作为教师，我在回国前就萌发出一种强烈冲动，要把这两年学到的东西尽可能教给我的学生. 回国后立即开出了第一门研究生课《微分几何与广义相对论》，接着又陆续开出几门后续课程，并曾应邀到外地讲课. 十数年来的讲稿后来成为写作本书的蓝本. 回顾这 10 多年，我其实是边教边学，尽力加深对所教内容的理解. 遇到百思不解的问题，我还会向我的良师益友 Wald 教授(或 Geroch 教授)写信求教，每次都收到热情回信，信中的精辟见解常常使我茅塞顿开. 物理学工作者初次接触近代微分几何时的常见感觉是"抽象难懂"，不得其门而入. 我想也许我能在减轻难度方面对他们有所帮助. 首先，当时我也是个刚学不久的人，对入门时的困难有切身感受；其次，我过去的教学经验也许在降低难度方面可以派上用场. 降低难度不但成为我十多年来教学工作的一种自我追求，而且也成为本书写作的一个努力方向. 为了降低难度，往往不惜耗费笔墨详加解说，这是本书篇幅较大的一个重要原因.

近代微分几何不但对学习广义相对论至关紧要，而且对物理学(乃至工程学)的许多分支都有重要应用价值. 许多物理工作者从自身专业的国际学术会议和大量文献中发现近代微分几何对深入搞好本专业研究已日渐必需，却苦于找不到学习这门学问的入门途径. 北京师范大学物理系的领导较早认识到近代微分几何对物理工作者的重要性，鼓励和支持我从 1995 年开始把我的第一门研究生课《微分几何与广义相对论》下放为高年级本科选修课(约 70 学时). 该课的一半以上课时用于从零开始讲授微分几何的入门知识(相当于本书前 5 章)，所余课时的一半以上用于介绍如何以微分几何为工具剖析业已学过的狭义相对论(相当于本书第 6 章)，最后才介绍一点广义相对论的入门知识(相当于本书第 7 章的一部分). 实践表明，喜欢抽象思维、学过微积分学以及线性代数基本知识的物理系本科生只要花出足够时间听课、复习和完成作业(平均每周约 5 题)，就可在期末考试中取得及格以上的成绩. 我还深感欣慰地发现部分本科生(含二年级生)竟然能进入"心领神会"的美妙境界并产生浓厚兴趣. 他们还继续选学笔者所开的后续研究生课程(包括本书从第 7 章§7.4 起的全部内容)，而且表现出色.

本书分上、下两册. 上册共有 10 章，前 5 章从零开始讲授微分几何入门知识，

第 6 章剖析狭义相对论，后 4 章介绍广义相对论的基本内容. 虽然前 5 章在选材和写法上适当照顾到相对论的需要，但不从事相对论工作的物理工作者也可把它作为微分几何的入门读物. 下册将介绍广义相对论的进一步内容(侧重于整体分析，例如时空的整体因果结构、渐近平直时空、引力坍缩、Kerr-Newman 黑洞、时空的 3 + 1 分解以及广义相对论的拉氏和哈氏形式)及其所需的进一步数学工具(例如共形变换及李群和李代数). 全书既可作为研究生课教材(上册还可作为本科高年级选修课教材)，也可作为相对论工作者的参考读物.

为了适应不同程度读者的需要，本书内容分为必读和选读两大部分. 必读部分用宋体排印，选读部分则排成楷体，并用[选读]和[选读完]字样标出. 必读部分的内容自成体系，不会由于略去选读内容而影响后续必读内容的学习. 各页的脚注(如果有的话)与选读内容类似. 初次学习的读者最好略去全部选读和脚注内容.

本书各章都配有为数不少的习题. 习题的难易程度十分悬殊. 最难的习题在题号前标有*号. 这是指题目本身的难度最大，与所需内容是否涉及选读内容无关. 题号前标有~号的题是笔者向读者推荐的比较基本的习题，其中有很易的题，也有较难的题. 为了降低难度，对多数较难题都给了提示. 如果时间实在不够，也可在~号题中挑选部分题目完成. 完全不做习题而一章一章读下去的做法似乎也未尝不可，不过很可能在读到稍后章节时发现前面根基不稳，难于继续稳步前进.

限于笔者的数理修养以及对本书所涉专业方向的理解水平，书中大小错误和不妥之处一定不少. 作为尽量减少错误和不妥的一个重要措施，笔者请了为数众多的专家、同行和学生分别阅读本书初稿的部分章节，他们是：(以姓氏汉语拼音为序. 有**号者为教授或研究员，有*号者为副教授或副研究员.) 敖滨、曹周键、戴陆如、戴宪新、高长军、高思杰、贺晗、胡波、*黄超光、**邝志全、**刘辽、李晓勤、马永革、南俊杰、**裴寿镛、**强稳朝、沈华、*田清钧、*田晓岑、王波波、吴金闪、吴小宁、**杨孔庆、**俞允强、*杨学军、张红宝、张芃、周彬、朱宗宏. 以上诸君对所读的部分章节都提出过许多意见和建议，其中很大一部分非常宝贵. 笔者要特别感谢对写作本书有重要帮助的两位朋友，第一位是芝加哥大学的 Wald 教授，他不但是笔者步入本领域的优秀启蒙导师，而且对笔者回国后的教学和写作工作不断提供无私帮助. 他的力作《General Relativity》是本书的最重要参考文献. 第二位是中科院数学所的邝志全研究员，他不仅审阅过本书的不少章节并提出过许多十分宝贵的意见和建议，而且在与笔者的无数次讨论中以他对问题所特有的深刻思考和领悟使笔者受益殊深. 笔者还要感谢北京师范大学物理系刘辽教授和大连理工大学物理系桂元星教授，他们的推荐使本书得以纳入北京师范大学出版社的出版计划并获得出版社的财政支持. 感谢赵峥教授和王永

成教授对本书的写作和出版的密切关心和大力支持. 感谢北京师范大学出版社李桂福编审对本书出版的积极支持与帮助. 感谢北京市教委对本书写作和出版的立项资助，也感谢北京师范大学出版社提供的财政支持.

梁灿彬

2000 年 2 月于北京师范大学

目　　录

第1章 拓扑空间简介

§1.1 集 论 初 步

确切地指定了的若干事物的全体叫一个集合(set)，简称集．集中的每一事物叫一个**元素**(element)或**点**(point)．若 x 是集 X 的元素，则说“x 属于 X”，并记作 $x \in X$．符号 $\notin$ 则代表“不属于”．有两种表示集合的方法，一种是一一列出其元素，元素间用逗号隔开，全体元素用花括号括起来，如

$$X = \{1，4，5.6\}$$

表示由实数 1，4 及 5.6 构成的集．另一种表示法是指出集中元素的共性，如

$$X = \{x \mid x \text{ 为实数}\}$$

表示 X 是全体实数的集合(这一特定集的通用记号为 $\mathbb{R}$)，而

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 9\}$$

则表示全体大于 9 的实数的集合.

不含元素的集叫**空集**(empty set)，记作 $\varnothing$.

定义 1 若集 A 的每一元素都属于集 X，就说 A 是 X 的**子集**(subset)，也说 A 含于 (is contained in) X 或 X 含(contains) A，记作 $A \subset X$ 或 $X \supset A$．规定 $\varnothing$ 是任一集合的子集．A 称为 X 的**真子集** (proper subset)，若 $A \subset X$ 且 $A \neq X$．集 X 和 Y 称为**相等的**(记作 $X = Y$)，若 $X \subset Y$ 且 $Y \subset X$．

注 1 子集定义的更确切表述本应是“集 A 叫集 X 的子集，当且仅当 A 的每一元素都属于 X”．但为方便起见，凡在定义中的“若”或“当”都是“当且仅当”之意.

本书用 $:=$ 代表“定义为”，用 $\equiv$ 代表“恒等”或“记作”，例如 $C \equiv A - B$ 的含义是“把 $A-B$ 记作 C”．采用这两个符号无非是为增加明确性，都换成等号也无妨.

定义 2 集合 A，B 的并集、交集、差集和补集定义为：

并集(union) $A \bigcup B := \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

交集 (intersection) $A \bigcap B := \{x \mid x \in A,\ x \in B\}$ (条件“$x \in A,\ x \in B$”是“$x \in A$ 且 $x \in B$”的简写，下同．).

差集(difference) $A - B := \{x \mid x \in A,\ x \notin B\}$ (数学书常把差集记作 $A \backslash B$ 或 $A \sim B$，本书一律记作 $A-B$．).

若 A 是 X 的子集，则 A 的**补集**(complement) $-A$ 定义为 $-A := X - A$.

定理 1-1-1 以上集运算服从如下规律：

交换律　$A\cup B=B\cup A$,　$A\cap B=B\cap A$.

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

分配律　$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$,　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

De Morgan 律　$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C), A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$.

证明　作为例子，我们证明 De Morgan 律的第二式(其他各律由读者自证). 为此只须证明等式两边互相包含.

(A) 设 $x\in A-(B\cap C)$，则 $x\in A$, $x\notin B\cap C$. 后者导致 $x\notin B$ 或 $x\notin C$. $x\in A$ 与 $x\notin B$ 结合得 $x\in A-B$；$x\in A$ 与 $x\notin C$ 结合得 $x\in A-C$，故 $x\in(A-B)\cup(A-C)$，因而

$$A-(B\cap C)\subset(A-B)\cup(A-C).$$

(B) 设 $x\in(A-B)\cup(A-C)$，则 $x\in A-B$ 或 $x\in A-C$. 前者导致 $x\in A$，$x\notin B$；后者导致 $x\in A$，$x\notin C$. 两者结合得 $x\in A$, $x\notin B\cap C$，故 $x\in A-(B\cap C)$，因而

$$(A-B)\cup(A-C)\subset A-(B\cap C).$$ □

定义 3　非空集合 X，Y 的**卡氏积**(Cartesian product) $X\times Y$ 定义为

$$X\times Y:=\{(x,y)\mid x\in X, y\in Y\}.$$

就是说，$X\times Y$ 是这样一个集合，它的每一元素是由 X 的一个元素 x 和 Y 的一个元素 y 组成的一个有序对 (x,y). 多个(有限个①)集合的卡氏积可类似地定义，例如

$$X\times Y\times Z:=\{(x,y,z)\mid x\in X, y\in Y, z\in Z\},$$

而且还规定卡氏积满足结合律，即 $(X\times Y)\times Z=X\times(Y\times Z)$.

例 1　$\mathbb{R}^2:=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$，$\mathbb{R}^n:=\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$ (共 n 个 $\mathbb{R}$). 既然 $\mathbb{R}^2$ 的元素是由两个实数构成的有序对，这两个实数就称为该元素的**自然坐标**. 类似地，$\mathbb{R}^n$ 的每一元素有 n 个自然坐标. 可见 $\mathbb{R}^n$ 是天生就有坐标的，但其他集合则未必. 利用自然坐标可给 $\mathbb{R}^n$ 的任意两个元素定义距离的概念.

定义 4　$\mathbb{R}^n$ 的任意两个元素 $x=(x^1,\cdots,x^n)$，$y=(y^1,\cdots,y^n)$ 之间的**距离** $|y-x|$ 定义为

$$|y-x|:=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y^i-x^i)^2}.$$

本书从下段开始经常使用数学记号 $\forall$ (代表“对任一”)和 $\exists$ (代表“存在”)，请熟习.

定义 5　设 X，Y 为非空集合. 一个从 X 到 Y 的**映射**(map)(记作 $f: X\to Y$)是一个法则，它给 X 的每一元素指定 Y 的唯一的对应元素. 若 $y\in Y$ 是 $x\in X$ 的对应元素，就写 $y=f(x)$，并称 y 为 x 在映射 f 下的**像**(image)，称 x 为 y 的**原像**(或**逆像**，即 inverse image). X 称为映射 f 的**定义域**(domain)，X 的全体元素在映射 f 下的像的集合(记作 $f[X]$)称为映射 $f: X\to Y$ 的**值域**(range). 映射 $f: X\to Y$

① 无限多个集合的卡氏积也可定义，但已超出本书范围.

和 $f':X\to Y$ 称为**相等的**，若 $f(x)=f'(x)\ \forall x\in X$.

注 2　通常也把 $y=f(x)$ 写成 $f:x\mapsto y$. 请注意 $\mapsto$ 与 $\to$ 的区别：$f:X\to Y$ 中的 $\to$ 表示 f 是从 X 到 Y (集合到集合)的映射；而 $f:x\mapsto y$ 中的 $\mapsto$ 则表示 $x\in X$ 在映射 f 下的像是 y (元素到元素).

注 3　设 $A\subset X$ ，则 A 的元素在 f 下的像组成的子集记作 $f[A]$ ，即

$$f[A]\equiv\{y\in Y\mid\exists\, x\in A \text{ 使 } y=f(x)\}\subset Y .$$

例 2　普通微积分中的单值函数 $y=f(x)$ 就是一个由 $\mathbb{R}$ (或其子集)到 $\mathbb{R}$ 的映射.

注 4　从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射给出一个二元函数，因为 $\mathbb{R}^2$ 中每点由两个实数(自然坐标)描写. 同理，从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射给出 m 个 n 元函数.

定义6　映射 $f:X\to Y$ **叫一一的**(one-to-one)，若任一 $y\in Y$ 有不多于一个逆像(可以没有). $f:X\to Y$ **叫到上的**(onto)，若任一 $y\in Y$ 都有逆像(可多于一个).[①]

注 5　①f 为到上映射的充要条件是值域 $f[X]=Y$. ②若 f 为一一映射，则存在逆映射 $f^{-1}:f[X]\to X$. 然而，不论 $f:X\to Y$ 是否有逆，都可定义任一子集 $B\subset Y$ 在 f 下的“逆像” $f^{-1}[B]$ 为

$$f^{-1}[B]:=\{x\in X\mid f(x)\in B\}\subset X .$$

注意，这里的“逆像”是 X 的子集而不是 X 的元素. 例如，如果 X 有(且仅有)两个元素 x 和 x' 在 f 作用(即映射)下的像都是 $y\in Y$ ，则虽然逆映射 $f^{-1}:Y\to X$ 不存在，但把 y 看作 Y 的独点子集(即 $\{y\}$)时 $f^{-1}[\{y\}]$ (简记作 $f^{-1}[y]$)仍有意义，含义为 $f^{-1}[y]=\{x,\ x'\}\subset X$.

定义 7　$f:X\to Y$ 称为**常值映射**，若 $f(x)=f(x')\quad\forall x,\ x'\in X$.

定义 8　设 $X,\ Y,\ Z$ 为集，$f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$ 为映射，则 f 和 g 的**复合映射** $g\circ f$ 是从 X 到 Z 的映射，定义为 $(g\circ f)(x):=g(f(x))\in Z\quad\forall x\in X$ ，见图 1-1.

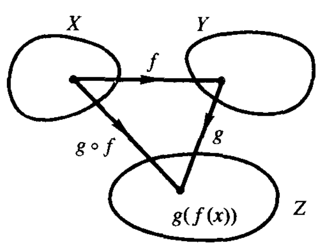
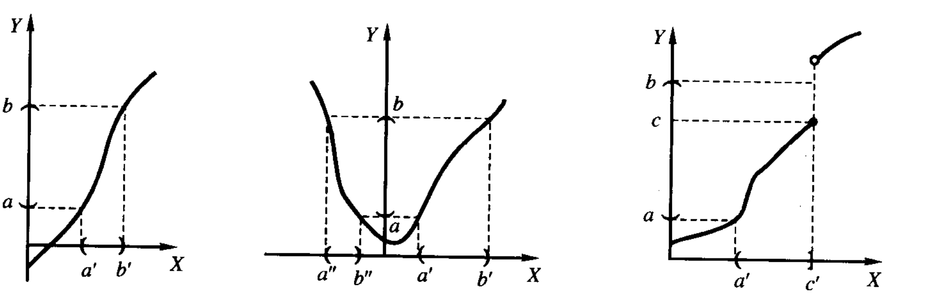


图 1-1　复合映射 $g\circ f$
注意，先执行 f 后执行 g

① 不少数学书把本书的一一和到上映射分别叫**单射**(injection)和**满射**(surjection)，把既是单射又是满射的映射叫**一一映射**[又称**双射**(bijection)]. 于是它们的一一映射强于本书的一一映射.

注 6　若 $X=Y=Z=\mathbb{R}$，则复合映射 $g\circ f$ 就是熟知的一元复合函数.

若 X 和 Y 是一般的集合，对 X 与 Y 之间的映射只能提出"一一"和"到上"这两个要求；但若 X 和 Y 还指定了某种结构，则往往可对 $f:X\to Y$ 提出更多要求，例如可要求 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的甚至光滑的. 一元函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的连续性在微积分中早有定义("ε-δ 定义")，重述如下：①称 f 在 x 点连续，若 $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0$ 使得当 $|x'-x|<\delta$ 时有 $|f(x')-f(x)|<\varepsilon$；②称 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续，若它在 $\mathbb{R}$ 的任一点连续. 这一定义依赖于 $\mathbb{R}$ 中任二元素的距离概念(对 $\mathbb{R}$ 而言距离就是坐标之差)，似乎无法推广到没有距离定义的两个集合之间的映射. 然而细想发现，ε-δ 定义可用开区间概念(而无需距离概念)重新表述如下：设 $X=Y=\mathbb{R}$，映射 $f:X\to Y$ 叫做连续的，若 Y 中任一开区间的"逆像"都是 X 的开区间之并(或是空集). 这一表述与通常的 ε-δ 表述的等价性可从图 1-2 得到启发(这里无意给出证明)：图(a)的映射 $f:X\to Y$ 按 ε-δ 定义为连续，与此相应，Y 中任一开区间 (a,b) 的逆像为开区间 $(a',\,b')$；图(b)的映射连续，与此相应，Y 中任一开区间 (a,b) 的逆像为开区间 $(a',\,b')$ 与 $(b'',\,a'')$ 之并；图(c)的映射 $f:X\to Y$ 在 $c'\in X$ 处不连续，与此相应，在 Y 中存在开区间 $(a,\,b)$，其"逆像" $f^{-1}[(a,\,b)]=(a',\,c']\subset X$ 不是开区间，也不是开区间之并. 以上讨论从一个侧面说明"开区间之并"这一概念的用处：可以定义映射 $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的连续性. 其实这一概念还有很多用处，因此往往有必要推广到除 $\mathbb{R}$ 外的集合 X. 为方便起见，把 $\mathbb{R}$ 的任一可以表为开区间之并的子集(连同空集 $\varnothing$)称为开子集. 为把开子集概念推广到任意集合 X，应先找出 $\mathbb{R}$ 的开子集的本质的、抽象的(因而可以推广的)性质. 它们是：(a) $\mathbb{R}$ 和空集 $\varnothing$ 都是开子集；(b) 有限个开子集之交仍是开子集；(c) 任意个开子集之并仍是开子集. 把这三个性质推广，就可给任意集合 X 定义开子集概念. 定义了开子集的



(a) f 续续，任一开区间$(a,\ b)$的逆像是开区间$(a',\ b')$.　(b) f 续续，任一开区间$(a,\ b)$ 的逆像是开区间之并 $(a',b')\cup(b'',a'')$.　(c) f 在 $c'\in X$ 不连续，存在开区间$(a,\ b)$，其逆像$(a',\ c']$不是开区间之并.

图 1-2　用开区间表述连续性

曲线代表映射 $f:X\to Y$