

高等院校教材

# 断裂力学

程 靳 赵树山 编著



科学出版社  
[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

高等院校教材

# 断裂力学

程 靳 赵树山 编著

科学出版社

北 京

## 内 容 简 介

本书是根据作者 20 多年来讲授“断裂力学”课程的教学经验,专门为高等院校工科本科生及研究生编写的“断裂力学”教材。本书理论严谨、逻辑清晰、由浅入深、易于学习。

全书由两部分组成。第一篇是断裂力学基础,系统地讲述了断裂力学的基本理论、观点和方法,特别适用于作为本科生和研究生教材。第二篇是断裂动力学专题,讲述断裂动力学理论,是专门为研究生编写的。

全书按“断裂力学”课程和教学需要编写,可作为高等院校工科本科生及研究生教材,也可供工程技术人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

断裂力学/程靳,赵树山编著. —北京:科学出版社,2006

(高等院校教材)

ISBN 7-03-017896-3

I. 断… II. ①程… ②赵… III. 断裂力学-高等学校-教材 IV. O346.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 100260 号

责任编辑:段博原 资丽芳 贾瑞娜 / 责任校对:刘亚琦  
责任印制:张克忠 / 封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2006年9月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2006年9月第一次印刷 印张:21 3/4

印数:1—3 000

字数:414 000

定价:30.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换<路通>)

## 前 言

断裂力学是一门比较新的学科,作者为高校本科生和研究生讲授这门课程已经 20 多年,但一直没有很好的教材。本书是在作者多年教学经验的基础上,根据授课讲义并参考了多部国内外教材,特别是王铎主编的《断裂力学》编写而成。

本书分为两篇,第一篇为基础部分,重点讲述断裂力学的基础理论、方法和实验。内容包括线弹性断裂力学、弹塑性断裂力学、疲劳裂纹、环境对裂纹的影响以及断裂力学实验。这部分内容适合于本科生及研究生。第二篇为断裂动力学专题内容。包括断裂动力学基本方程、基本理论、主要求解方法。除介绍若干常用方法如 Winer-Hopf 方法、Copson 方法等外,重点介绍复变函数方法,用以求得自相似问题的解析解。书中还介绍了断裂动力学各种守恒积分及若干问题的解。在自相似理论上,本书是现有国内外书籍中介绍的相当详尽的。第二篇内容专门为研究生编写。

本书第 3~5、7~10 章由程靳编写,第 1、2、6 章由赵树山编写。由于本书的主要目的是作为高等院校的教材,因此我们坚持王铎老师编写教材的一贯特点:理论严谨、逻辑清晰、由浅入深、易懂易学。本书适合初学者阅读,可作为高等院校工科本科生和研究生的教材,也可供工程技术人员参考。本书的第二篇断裂动力学部分内容较深,可作为研究生用教材。

编 者

2006 年 6 月

# 目 录

## 前言

|          |   |
|----------|---|
| 绪言 ..... | 1 |
|----------|---|

## 第一篇 断裂力学基础

|                                    |     |
|------------------------------------|-----|
| 第 1 章 线弹性断裂力学 .....                | 9   |
| 1.1 能量平衡理论 .....                   | 9   |
| 1.2 裂纹尖端附近的应力和位移场 .....            | 13  |
| 1.3 脆性断裂的 $K$ 准则 .....             | 22  |
| 1.4 线弹性断裂力学在小范围屈服时的推广 .....        | 24  |
| 1.5 复合型最大准则 .....                  | 29  |
| 1.6 复合型的能量准则 .....                 | 33  |
| 1.7 复合型断裂的工程经验公式 .....             | 39  |
| 1.8 埋藏裂纹和表面裂纹的应力强度因子 .....         | 41  |
| 附录 A 弹性理论基础 .....                  | 48  |
| 附录 B 复变函数的基础知识 .....               | 52  |
| 参考文献 .....                         | 55  |
| 第 2 章 求应力强度因子的各种计算方法 .....         | 57  |
| 2.1 普遍形式的复变函数法 .....               | 57  |
| 2.2 积分变换法 .....                    | 61  |
| 2.3 权函数法 .....                     | 65  |
| 2.4 应力集中系数法 .....                  | 67  |
| 2.5 位错连续分布法 .....                  | 68  |
| 2.6 边界配置法 .....                    | 71  |
| 2.7 有限元法 .....                     | 76  |
| 2.8 边界元法 .....                     | 82  |
| 2.9 求应力强度因子的叠加原理及常用的应力强度因子资料 ..... | 85  |
| 附录 A 晶体中位错的应力场 .....               | 94  |
| 附录 B 有限元法基础知识 .....                | 96  |
| 参考文献 .....                         | 99  |
| 第 3 章 弹塑性断裂力学 .....                | 100 |
| 3.1 D-M 模型 .....                   | 100 |

|              |                                 |            |
|--------------|---------------------------------|------------|
| 3.2          | 裂纹尖端张开位移 .....                  | 105        |
| 3.3          | COD 准则 .....                    | 111        |
| 3.4          | $J$ 积分 .....                    | 115        |
| 3.5          | $J$ 积分的能量表示 .....               | 117        |
| 3.6          | HRR 理论 .....                    | 125        |
| 3.7          | 理想塑性的滑移线场解 .....                | 128        |
| 3.8          | $J$ 积分准则 .....                  | 133        |
| 3.9          | 平面应力断裂的 $R$ 阻力曲线 .....          | 135        |
| 3.10         | 弹塑性断裂力学分析的有限元法 .....            | 138        |
|              | 参考文献 .....                      | 144        |
| <b>第 4 章</b> | <b>疲劳裂纹的扩展 .....</b>            | <b>145</b> |
| 4.1          | 概述 .....                        | 145        |
| 4.2          | 疲劳裂纹扩展速率 .....                  | 147        |
| 4.3          | 影响疲劳裂纹扩展速率的因素 .....             | 157        |
| 4.4          | 应变疲劳 .....                      | 162        |
|              | 参考文献 .....                      | 173        |
| <b>第 5 章</b> | <b>在环境下裂纹的扩展 .....</b>          | <b>174</b> |
| 5.1          | 概述 .....                        | 174        |
| 5.2          | 应力腐蚀裂纹扩展 .....                  | 177        |
| 5.3          | 腐蚀疲劳裂纹扩展 .....                  | 182        |
| 5.4          | 蠕变裂纹扩展 .....                    | 187        |
|              | 附录 A 各种材料的 $K_{ISCC}$ 的值 .....  | 192        |
|              | 参考文献 .....                      | 193        |
| <b>第 6 章</b> | <b>断裂力学实验 .....</b>             | <b>194</b> |
| 6.1          | 金属材料平面应变断裂韧度 $K_{IC}$ 的测试 ..... | 194        |
| 6.2          | 裂纹顶端张开位移(COD)的测试 .....          | 200        |
| 6.3          | 金属材料延性断裂韧度 $J_{IC}$ 的测试 .....   | 203        |
|              | 参考文献 .....                      | 209        |

## 第二篇 断裂动力学

|              |                           |            |
|--------------|---------------------------|------------|
| <b>第 7 章</b> | <b>断裂动力学的积分变换解法 .....</b> | <b>213</b> |
| 7.1          | 弹性动力学基本方程与坐标变换 .....      | 213        |
| 7.2          | 波动方程的积分变换解 .....          | 220        |
| 7.3          | 半无限裂纹问题 .....             | 225        |
| 7.4          | 有限长裂纹的动力学问题 .....         | 232        |
| 7.5          | 无限长窄条中的裂纹问题 .....         | 237        |

|                                 |            |
|---------------------------------|------------|
| 7.6 含裂纹板弯曲的动力学问题 .....          | 244        |
| 7.7 轴对称断裂动力学问题 .....            | 247        |
| 附录 A 对偶积分方程的解法 .....            | 251        |
| 参考文献 .....                      | 254        |
| <b>第 8 章 复变函数解法与其他解法 .....</b>  | <b>255</b> |
| 8.1 波动方程的函数不变解 .....            | 255        |
| 8.2 平面弹性动力学问题 .....             | 258        |
| 8.3 受均布的 $pt^n$ 型载荷的动裂纹问题 ..... | 265        |
| 8.4 受集中载荷、阶跃载荷及脉冲作用的运动裂纹 .....  | 271        |
| 8.5 轴对称问题的自相似解法 .....           | 277        |
| 8.6 断裂动力学问题的其他解法 .....          | 283        |
| 参考文献 .....                      | 289        |
| <b>第 9 章 某些断裂动力学问题 .....</b>    | <b>291</b> |
| 9.1 不同材料界面上的反平面扩展裂纹 .....       | 291        |
| 9.2 扩展裂纹的 $J^*$ 积分 .....        | 299        |
| 9.3 裂纹两端异速扩展问题 .....            | 306        |
| 9.4 复合材料桥连断裂动力学问题 .....         | 312        |
| 参考文献 .....                      | 315        |
| <b>第 10 章 弹性波与裂纹 .....</b>      | <b>317</b> |
| 10.1 弹性波的绕射 .....               | 317        |
| 10.2 P 与 SV 波在静止裂纹上的绕射 .....    | 318        |
| 10.3 SH 波在静止裂纹上的绕射 .....        | 325        |
| 10.4 P 与 SV 波在运动裂纹上的绕射 .....    | 327        |
| 10.5 SH 波在运动裂纹上的绕射 .....        | 335        |
| 参考文献 .....                      | 338        |

## 绪 言

断裂力学和其他科学一样,是在生产实践中产生和发展的,是从 20 世纪 70 年代才发展起来的一门新兴学科。它应用力学成就,研究含缺陷材料和结构的破坏问题。由于它与材料或结构的安全直接有关,因此尽管它出现的时间很短,但实验和理论均有了迅速的发展,并已开始为生产服务。

早在 20 世纪初期,人们在使用各种材料尤其是金属材料的长期实践中,就已经观察到大量的断裂现象,并注意到结构的脆性断裂问题。1920 年,英国的 Griffith 尝试解释玻璃的实际强度远低于理论强度的原因。他以材料内部存在缺陷的观点为基础,提出在一定条件下,微小缺陷或裂纹将失稳扩展,导致材料或结构的破坏。他的理论仅适用于像玻璃这类的完全脆性材料,而这种材料在工程中极为少见,所以没有得到推广和发展。

随着现代生产的发展,新材料、新产品和新工艺不断出现,在产品安装、试验和运行过程中,往往发生脆断事故,多数事故在低于材料的屈服极限时发生,造成的损失特别严重。这些破坏事故用传统的强度观点和方法无法分析和衡量。

通过对大量破坏事故的研究,人们发现低于应力脆性破坏的主要原因是实际结构中存在各种缺陷或裂纹,这些裂纹的存在显著地降低了结构材料的实际强度。

从下面几个例子中可看出裂纹对结构破坏的影响:

(1) 1943~1947 年,美国近 500 艘全焊船中发生了 1000 多起脆性破坏,其中 238 艘完全报废,有的甚至断成两截。为了分析原因,从 100 多个损坏处割下试件进行试验,结论是:事故总是在有焊接缺陷等的应力集中处产生;当气温降到  $-3^{\circ}\text{C}$  和水温降到  $4^{\circ}\text{C}$  时断裂容易发生;破坏处的冲击韧性  $a_k$  值低于未破坏处的  $a_k$  值。

(2) 1947 年苏联  $4500\text{m}^3$  的大型石油储罐底部和下部的壳连接处,在气温降到  $-43^{\circ}\text{C}$  时,形成大量裂纹,造成储罐的破坏。事后的分析认为:在焊接处,存在由焊裂、焊瘤和未焊透引起的各种应力集中;在温度降低时,储罐材料  $\text{CT}_{34}$  钢的塑性明显下降;由于焊接和罐的内外温差,造成较高的内应力。

(3) 20 世纪 50 年代初,美国北极星导弹固体燃料发动机壳体在试验时发生爆炸,材料用  $\sigma_s=1372\text{MN}/\text{m}^2$  的高强度合金,传统的强度和韧性指标全部合格,而且爆炸时的工作应力远低于材料的许用应力。事后多方面研究认为:破坏是由宏观裂纹(深为  $0.1\sim 1\text{mm}$ )引起的,裂纹源可能是焊裂、咬边、杂质和晶界开裂等。

(4) 1969 年美国 F-111 飞机在执行飞行训练途中,做投弹恢复动作时,左翼脱落,导致飞机坠毁。当时的飞行速度、总重量和过载等指标远低于设计指标,主要

原因是制造时热处理不当,机翼枢轴出现缺陷,漏检后经疲劳载荷作用,裂纹继续扩展,最后造成低应力破坏。

从上述几个典型事故可看出,脆断总是由宏观裂纹引起的。这种裂纹由冶金夹杂物、加工和装配、疲劳载荷、工作环境(如介质、高温等)等引起。对于大多数结构和零件来说,宏观裂纹的存在是不可避免的。带裂纹材料的强度,取决于材料对裂纹扩展的抗力,这种抗力由材料内部属性决定。应用弹、塑性理论和新的实验技术,研究裂纹尖端附近的应力、应变场和裂纹的扩展规律,就产生了新的力学分支——断裂力学。

断裂力学的研究对象:

我们知道,构件的断裂往往可以分成以下几个阶段:

(1) 裂纹的生成——①由于环境(疲劳、腐蚀介质、高温和联合作用等)的影响,在构件的圆角应力集中处,经过一段使用时间产生宏观微小裂纹;②材料中原来就存在缺陷;③在加工过程中出现裂纹。

(2) 裂纹的亚临界扩展——由于环境的影响,在工作过程中,宏观微小裂纹逐步缓慢地扩展。

(3) 断裂开始——在工作应力下,裂纹逐渐扩展,达到临界长度,构件突然失稳破坏。

(4) 断裂传播——失稳的裂纹以高速传播,速度可达在材料中声速的  $1/4$ 。

(5) 断裂停止——裂纹失稳后可以穿过整个结构,使构件破坏;或在一定条件下,裂纹停止。

以上是宏观裂纹发生和发展的几个阶段。断裂一词的含义很广,应包括宏观的断裂现象和微观结构的破坏机理。断裂力学从力学侧面研究宏观的断裂现象,包括宏观裂纹的生成、扩展、失稳开裂、传播和止裂。微观结构的破坏机理属于断裂物理的研究范围。但是,近代的趋向是宏观断裂现象应该和微观断裂过程联系起来,否则机理不清,许多现象难以解释。因此,目前它们之间的分界线已不那么明显。

从工程应用角度看,断裂力学与材料力学类似,是材料力学的发展与充实。断裂力学即在大量实验的基础上研究带裂纹材料的断裂韧性(属于广义的材料强度范围),带裂纹构件在各种工作条件下裂纹的扩展、失稳和止裂的规律,并应用这些规律进行设计,以保证产品的构件安全可靠。

断裂力学的理论基础是弹性力学、塑性力学和黏弹性力学等。

断裂力学和材料力学的区别在于材料力学研究完整的材料,而断裂力学研究带裂纹的材料。虽然,断裂力学是材料力学的发展和补充;但是,断裂力学的设计思想与材料力学的设计思想不同,其差别可从以下几方面来看。

#### 1) 静载荷情况

在静载荷作用下,传统的强度条件是要使最大计算应力小于材料强度指标,即

$$\sigma_{\max} \leq \frac{\sigma_s}{n_s} \quad (\text{屈服})$$

$$\sigma_{\max} \leq \frac{\sigma_b}{n_b} \quad (\text{破坏})$$

式中,  $\sigma_s$  和  $\sigma_b$  分别为材料的屈服极限和强度极限;  $n_s$  和  $n_b$  为相应的安全系数。

经大量带表面裂纹的高强度钢试件拉伸试验, 证明其断裂应力与裂纹深度  $a$  的平方根成反比, 即

$$Y\sigma_c \sqrt{\pi a} = K_{IC} \quad (0-1)$$

式中,  $\sigma_c$  是试件所受的断裂应力;  $a$  是裂纹深度;  $Y$  是形状系数, 与试件几何形状、载荷条件和裂纹位置有关; 常数  $K_{IC}$  是材料的断裂韧性, 是表示材料抵抗裂纹失稳扩展能力的一个物理参量。已知裂纹深度  $a$ , 则式(0-1)可写成

$$\sigma_c = \frac{K_{IC}}{Y \sqrt{\pi a}} \quad (0-2)$$

或已知工作应力  $\sigma$ , 则有

$$a_c = \frac{K_{IC}^2}{Y^2 \pi \sigma^2} \quad (0-3)$$

式(0-2)中的  $\sigma_c$  称为剩余强度, 式(0-3)中的  $a_c$  称为临界裂纹尺寸。

断裂应力和裂纹深度的关系如图0-1所示, 由图可看出, 随着裂纹深度的增加, 断裂应力值降低得很快。

令式(0-1)中  $\sigma \sqrt{\pi a} = K_I$ , 则断裂力学中的裂纹失稳准则是

$$K_I \leq \frac{K_{IC}}{n} \quad (0-4)$$

式中,  $K_I$  称为裂纹尖端的应力强度因子;  $n$  是相应的安全系数。

因为断裂力学考虑了裂纹的存在, 根据裂纹失稳准则得出的断裂应力与传统的强度条件得出的结果不一定相同。例如, 有两种材料: 第一种材料的  $\sigma_s$  和  $\sigma_b$  较高,

但是断裂韧性  $K_{IC_1}$  比较低; 第二种材料的  $\sigma_s$  和  $\sigma_b$  较低, 但是断裂韧性  $K_{IC_2}$  较高, 如图0-1所示。则在相同的裂纹深度情况下, 后一种材料的断裂应力较高, 选用这种材料有利。所以, 盲目地追求高强度材料, 并不能保证构件安全可靠。

## 2) 循环载荷情况

传统的疲劳设计是用光滑试件作  $S-N$  曲线, 求出下限应力  $\sigma_{-1}$ , 称为疲劳极限, 如果最大工作应力满足

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{-1} / n_{-1}$$

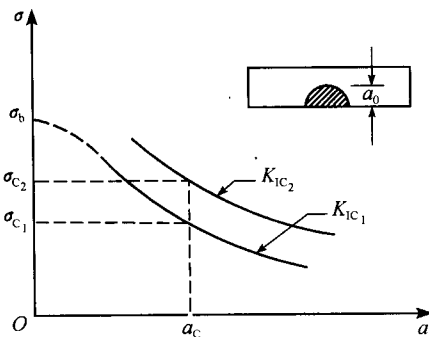


图 0-1

即可。式中,  $n_{-1}$  为循环载荷时的安全系数, 并且认为凡有缺陷的构件, 一件也不能应用。

断裂力学的观点是: 带裂纹的构件, 只要裂纹不到临界长度(或深度), 仍可使用; 在循环载荷作用下, 裂纹缓慢扩展, 直至达到临界长度时, 构件才失稳破坏, 作用载荷每循环一周, 裂纹的扩展量  $\frac{da}{dN}$  是材料的一个指标, 表明材料抵抗裂纹扩展的能力。

断裂力学区分两种寿命, 认为材料的破断寿命

$$N_f = N_i + N_p$$

式中,  $N_i$  为裂纹发生寿命;  $N_p$  为剩余寿命。如初始裂纹深度  $a_i$ 、临界裂纹深度  $a_c$  和裂纹扩展速率  $\frac{da}{dN}$  已知, 则剩余寿命由

$$N_p = \int_{a_i}^{a_c} \frac{da}{\left(\frac{da}{dN}\right)}$$

求出。大量试验证明

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K)^m$$

式中,  $C$  与  $m$  是材料常数;  $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$  是循环载荷的最大与最小应力强度因子的差, 或称应力强度因子幅度。

在断裂力学中, 与疲劳极限相当的是循环载荷的门槛值  $\Delta K_{th}$ , 当应力强度因子幅度小于门槛值时, 裂纹不扩展。这两个材料指标  $\frac{da}{dN}$  和  $\Delta K_{th}$ , 都可供设计使用。

由此可见, 断裂力学对在循环载荷作用下的研究, 充实和深化了材料力学中的疲劳理论。

### 3) 腐蚀介质下的情况

对于腐蚀介质中受拉应力的构件, 传统设计是用光滑试件在腐蚀介质中做试验, 记录作用的应力和破断时间的曲线, 即  $\sigma-t$  曲线, 以曲线的下限应力值作为设计标准。只要工作应力小于这一临界应力, 构件就是安全的。在应力腐蚀情况下, 传统设计不允许构件存在裂纹。

断裂力学从带裂纹构件的实验研究出发, 认为在腐蚀介质中, 受拉应力构件是否安全, 要看裂纹的应力强度因子  $K_I$  是否达到或超过应力腐蚀界限的应力强度因子  $K_{ISCC}$ , 即裂纹稳定条件为

$$K_I \leq K_{ISCC}$$

$K_{ISCC}$  是材料在应力腐蚀条件下, 衡量材料抵抗裂纹失稳断裂能力的指标。

材料的另一指标是应力腐蚀裂纹扩展速率  $\frac{da}{dt}$ , 表示材料抵抗应力腐蚀裂纹扩

展的能力。与疲劳设计中剩余寿命的求法相同,在应力腐蚀情况下,构件的剩余寿命为

$$t_r = \int_{a_i}^{a_c} \frac{da}{\left(\frac{da}{dt}\right)}$$

综上所述,断裂力学出现以后,我们对宏观的断裂规律有了进一步的认识,对传统的设计思想进行了改善与补充。不仅对有缺陷构件进行剩余强度和寿命的分析,以保证产品安全可靠,或制定正确合理的验伤标准,而且在选材、改善工艺、制造新材料等方面的研究,也逐渐地在发挥其作用。

断裂力学的研究内容:

断裂力学的理论基础开始于线弹性力学,据此发展成为研究脆性断裂的线弹性断裂力学。目前线弹性断裂力学已经发展得比较成熟,在生产中已经得到普遍应用。

由于裂纹尖端附近的应力集中,必然产生塑性区,当塑性区达到一定尺寸时,它对材料的影响不能忽略,线弹性理论已不适用。于是,对于裂纹尖端附近塑性区的研究,发展成为了弹塑性断裂力学。目前,在这方面的研究还不很成熟,是断裂力学研究中的一个重要课题。

当裂纹失稳后,断裂开始,裂纹迅速扩展,必须考虑材料的惯性,这属于断裂动力学的范畴,对于研究止裂问题极为重要。这方面的研究工作已经开始,由于它的复杂性,还没有得到重要的、能够在工程中广泛应用的成果。

对材料断裂的研究必须深入微观领域,否则断裂的机理会弄不清楚,对宏观断裂的现象不能深入了解,甚至一些宏观现象也无法解释。这方面的研究工作已经开始,而且将发展成为微观断裂力学,这是跨学科的内容。

本书仅阐述断裂力学的基本原理、方法和应用。第一篇包括第1~6章。第1章介绍线弹性断裂力学。第2章介绍计算应力强度因子的各种方法。第3章介绍弹塑性断裂力学的简单内容。第4章介绍在循环载荷作用下裂纹的扩展规律。第5章介绍在腐蚀介质中或在高温情况下裂纹的扩展规律。第6章介绍断裂力学实验。第二篇包括第7~10章。第二篇断裂动力学部分内容较深,可作为研究生用教材。



# 第一篇

## 断裂力学基础



# 第 1 章 线弹性断裂力学

线弹性断裂力学以线弹性理论为基础,从 20 世纪 60 年代初开始发展,由于理论比较简明,对脆性断裂能作出定量分析,并且用于疲劳裂纹扩展也取得了较好的结果,因此发展较快,现在已经比较成熟。目前,线弹性断裂力学已经用于高强度材料、低温下工作和截面很厚的构件的断裂安全设计。

本章先讲述裂纹尖端的应力、应变场和几种脆性破坏的准则,包括  $G$  准则、 $K$  准则和复合型准则,以及它们的理论基础,然后讲述裂纹尖端小塑性区对应力强度因子的修正。

## 1.1 能量平衡理论

20 世纪 20 年代初,Griffith<sup>[1]</sup>最先应用能量法,对“为什么玻璃的实际强度,比用分子结构理论所预期的强度低得多?”这个问题进行了研究,他推测玻璃内部的细小缺陷裂纹引起应力集中,使断裂在较低的名义应力下发生。于是,他从能量观点出发,提出裂纹失稳扩展条件:如裂纹扩展释放的弹性应变能克服了材料阻力所做的功,则裂纹失稳扩展,通过分析,建立了完全脆性材料的断裂强度与裂纹尺寸之间的关系,他应用能量分析导出

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi a (1-\nu^2)}}$$

式中,  $\sigma_f$  是断裂应力;  $E$  是弹性模量;  $\nu$  是泊松比;  $\gamma$  是表面能;  $a$  是裂纹尺寸。并且解释了正是由于  $a$  的影响使材料的实际强度比理论强度低得多,从而奠定了现代断裂力学发展的基础。

### 1.1.1 能量释放率与 $G$ 准则

设想一厚度为  $B$  的无限大玻璃板,如图 1-1 所示。将板拉长后,两端固定。如板受均匀拉伸应力  $\sigma$  作用,则板内单位体积储存的应变能为  $\frac{1}{2}\sigma\epsilon = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}$ 。如在板中心割开一裂纹,长为  $2a$ ,由于裂纹表面应力消失,放出部分弹性应变能,对于平面应力状态为

$$U = \frac{\pi\sigma^2 a^2 B}{E} \quad (1-1)$$

这项能量的减少可用关于椭圆孔的解答算出<sup>[2]</sup>。

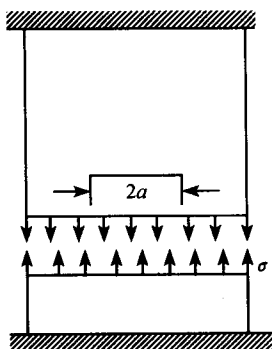


图 1-1

另一方面,裂纹扩展形成新的表面,需要吸收的能量为

$$S = 4aB\gamma \quad (1-2)$$

式中, $\gamma$ 为形成单位面积表面所需的表面能; $4aB$ 为裂纹上、下两个表面的面积和。

如果应变能释放率 $\frac{dU}{dA}$ ( $dA=2Bda$ )恰好等于形成新表面所需要吸收的能量率 $\frac{dS}{dA}$ ,则裂纹达到临界状态,此时稍有干扰,裂纹就自行扩展,成为不稳定状态;如果吸收的能量率大于应变能释放率,则裂纹稳定;如果应变能释放率大于吸收的能量率,则裂纹不稳定。因此有

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dA}(U-S) &> 0, & \text{裂纹不稳定} \\ \frac{d}{dA}(U-S) &= 0, & \text{临界状态} \\ \frac{d}{dA}(U-S) &< 0, & \text{裂纹稳定} \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

以 $G_1 = \frac{dU}{dA}$ 代表应变能释放率, $G_{1c} = \frac{dS}{dA}$ 代表吸收的能量率,下标 I 代表 I 型裂纹(见 1.2 节),则裂纹的临界条件为

$$G_1 = G_{1c} \quad (1-4)$$

对于无限大玻璃板中心裂纹受拉伸作用,而且两端固定边界的情况,有

$$G_1 = \frac{dU}{dA} = \frac{\sigma^2 \pi a}{E} \quad (1-5)$$

$$G_{1c} = \frac{dS}{dA} = 2\gamma \quad (1-6)$$

根据临界条件,式(1-4)有

$$\frac{\sigma_c^2 \pi a}{E} = 2\gamma \quad (1-7)$$

写成临界应力形式为

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi a}} \quad (1-8)$$

表示无限大平板在平面应力状态下,长为  $2a$  的裂纹失稳扩展时拉应力的临界值,称为裂纹平板的剩余强度。式(1-8)写成临界裂纹长度形式为

$$a_c = \frac{2E\gamma}{\pi\sigma^2} \quad (1-9)$$