

大 学 数 学 立 体 化 教 材

# 概率论与数理统计

(理工类)

吴赣昌 主编

 中国人民大学出版社

大 学 数 学 立 体 化 教 材

# 概率论与数理统计

(理工类)

吴赣昌 主编

 中国人民大学出版社

**图书在版编目 (CIP) 数据**

概率论与数理统计. 理工类/吴赣昌主编.

北京: 中国人民大学出版社, 2006

大学数学立体化教材

ISBN 7-300-07132-5

I. 概…

II. 吴…

III. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材

IV. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 016228 号

大学数学立体化教材  
概率论与数理统计 (理工类)  
吴赣昌 主编

---

出版发行	中国人民大学出版社		
社 址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电 话	010-62511242 (总编室)		010-62511239 (出版部)
	010-82501766 (邮购部)		010-62514148 (门市部)
	010-62515195 (发行公司)		010-62515275 (盗版举报)
网 址	<a href="http://www.crup.com.cn">http://www.crup.com.cn</a> <a href="http://www.ttrnet.com">http://www.ttrnet.com</a> (人大教研网)		
经 销	新华书店		
印 刷	河北涿州星河印刷有限公司		
开 本	720×965 毫米 1/16	版 次	2006 年 4 月第 1 版
印 张	24.5 插页 1	印 次	2006 年 4 月第 1 次印刷
字 数	445 000	定 价	42.00 元 (含光盘)

---

**版权所有 侵权必究**

**印装差错 负责调换**

## 内容简介

本书根据高等学校理工类专业概率论与数理统计课程的教学大纲及考研大纲编写而成。内容包括概率论的基本概念、一维和多维随机变量及其分布, 随机变量的数值特征, 数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析等知识。书中融入了数学历史、数学文化的教育, 教学例题的配备注意了学习难度的循序渐进, 书中还选编了题型较为丰富的习题。附录中编入了与本书配套的数学实验指导。书后配有内容丰富、功能强大的《概率论与数理统计多媒体学习系统》(光盘), 其内容涵盖了课堂教学、习题解答、实验教学、综合训练等模块。在教学过程中, 将光盘与本书配合使用, 形成了教与学的有机结合。本书可作为高等学校理工类专业的概率论与数理统计教材。

与书配套建设的《概率论与数理统计多媒体教学系统》(光盘) 将随教材配送给教师。

# 总 序

1999年的暑假,经过近半年的调研和思考之后,笔者义无反顾地选择了“大学数学教育信息化研究”作为自己的一个中期研究目标,促使笔者作出这样的选择主要基于以下几点:

1. 教育信息化是21世纪教育改革和发展的大方向.借助信息技术提高教与学的效率和效果、培养学生的实践能力和创新能力是教育追求的目标.

2. 20世纪90年代以来,我国高等教育迅速从“精英型教育”向“大众化教育”转化,教育规模的迅速扩大,给我国大学教育带来了一系列的问题,例如,现阶段大学数学的教育正面临生源录取分数下降、教学课时减少、教学内容增加、对数学实践能力的培养要求提高等一系列似乎矛盾的问题.

3. 大学应以教学为中心,但长期以来,教学研究没有得到应有的重视,天女散花式的教研投入,造成国内高校在同一水平上的大量重复建设和浪费,而重点研究项目的投入又严重不足,难以为继.

4. 与其他学科的教育信息化研究相比,大学数学教育信息化的研究进展缓慢.随着大众化教育阶段的到来,过去所谓“经典”的教材已渐渐不能适应教育改革和发展的需要.

由针对上述问题的分析可见,如何将教育技术与信息技术相结合,针对所面临的问题建设一系列“新型教材”就有其非常的紧迫性.在笔者的设想中,这种“新型教材”就是“教学资源库式的立体化教材”.它至少要包含以下两个方面:一是教学资源的多元化、教学方式的现代化、教学知识的立体化;二是教、学、考多层次、全方位的建设.此类“新型教材”的使用应在提高教学效率、增强教学效果、加大教学信息量、培养学生的数学应用与实践能力和学生的课后学习辅导和优秀学生的提高训练与考研训练,以及全方位提升学生的综合素质和创新能力等方面起到积极的作用.基于这一设想和预期,笔者组织和带领一个团队,开始了大学数学立体化教材的研发工作.

大学数学立体化教材的研发工作迄今已历时6年,期间历经多次升级改版,从2001年起,先后被全国200多所高等院校采用或试用,形成了现在全新的“教学资源库式”的立体化教材——中国人民大学出版社推出的“大学数学立体化教材”,它包含两大类,共六册.理工类:《高等数学》,《线性代数》与《概率论与数理统计》;经济类:《微积分》,《线性代数》与《概率论与数理统计》.下面,笔者以其中

的一套来简单介绍该立体化教材的形式与内涵。

立体化教材的形式：

1.《 \* \* \* \* 》(书)

2.《 \* \* \* \* 多媒体学习系统》(光盘,学生专用)

与上述立体化教材配套建设的还有

3.《 \* \* \* \* 多媒体教学系统》(光盘,教师专用)

(将随教材免费配送给教材采用单位的教师使用。)

《 \* \* \* \* 》(书)的编写具有下列特点：

- 书中融入了数学历史与数学文化的教育。
- 在重要概念引入之前,深刻、简明地阐述了其产生的背景及应用的总体思想。
- 以评注方式对定理、概念、公式的理解、应用给出了进一步的总结。
- 依循序渐进的原则,以适当的难度梯度选编了教学例题。
- 与教材同步配套,简明实用地编写了“大学数学实验指导”。该实验指导在按教学内容设计了相应的基础实验的基础上,还选择部分数学建模案例设计了部分综合实验。

《 \* \* \* \* 多媒体学习系统》是一套大型的集成性、交互式和教学资源立体化的学习软件,其中设计了多媒体教案、习题详解、数学实验、题型分析、考研真题剖析等功能模块,内容包含从课程学习到考研提高的全部内容。具体来说,其特点如下：

- 多媒体教案:按动态仿真教学方式设计了大量的教学动画,直击数学思想本质。
- 习题详解:以动态解析方式给出了习题的求解过程,并逐题配备了相关知识链接。
- 数学实验:以交互、集成方式,设计了数学实验教学演示系统和实验案例库。
- 题型分析:总结解题思路,并通过精选的例题揭示出解题的一般规律和技巧。
- 考研真题:收录历届数学考研真题,并逐题作了深入剖析。

《 \* \* \* \* 多媒体教学系统》(光盘),除包含了《 \* \* \* \* 多媒体学习系统》的主要功能模块和特点之外,它还具有以下特点：

- 多媒体教案:教学过程设计更适合教师进行课堂教学,补充了类型丰富的教学例题供教师选用,增加了课堂练习环节。
- 教学备课系统:搜集并整理了大量的教学资源和备课元素,供教师修改选

用,便于充分展现各位老师的个性化授课特点。

- 鼠标笔、文件放大以及知识点层叠交互功能,使教师在采用多媒体教学的同时,可以很好地保持传统教学的优势。

- 数学实验案例库与数学实验演示系统结合,可供教师现场与 Mathematica 系统交互进行实验演示。

同步建设的《大学数学试题库系统》包含高等数学、线性代数、概率论与数理统计三大模块,试题量 20 000 余道,具有以下特点:

- 试题类型丰富:含选择题、填空题、计算题、证明题、综合应用题等。

- 组卷功能强大:教师只需根据考试要求直接选择考点和题型,通过智能组卷按钮,几秒钟内即可生成试卷和相应的答卷,通过预览,对不满意的试题,可通过人工调整按钮,方便地对该试卷中的试题进行增删与替换。

- 大容量试卷库:试卷库可存放 3 300 余套各类试卷,库内存有数百套各类全真试卷,供用户参考;用户可将自组试卷或交流试卷存入该试卷库内。试卷库管理功能使用户能方便地实现对库内的试卷进行调用、修改及增删。

- 二次开发功能:用户可对系统进行试题的增删与替换,试卷库的存储管理,试题的分类标识加注以及试题难度的重新区分等。

立体化教材的建设是一项崭新的事业。令笔者欣慰的是,与当初启动这个项目的时候相比,大面积采用立体化教材和多媒体教学的软硬件环境(从教育部的文件精神到大学的多媒体教室建设)和硬件技术(从软件开发平台到计算机相关硬件技术)都已经成熟了。当初许多专家认为多媒体教学无法发挥教师的教学个性化问题也因鼠标笔和手写屏系统的问世而迎刃而解了。

作为一项长期的事业,笔者今后将长期致力于大学数学立体化教材的建设工作,不断跟踪教育技术和信息化技术的发展,并及时应用到有关课程的教材建设之中,逐年提升、精益求精。同时,笔者还将通过中国人民大学出版社的网站(在主页中点击“大学数学”按钮进入“大学数学立体化教材服务网站”,或直接输入网址 <http://www.math123.cn> 进入该服务网站)提供各种相关教学服务,包括:各类最新建设或升级的立体化教材的介绍、各类系统软件的演示等,尤其是还会提供丰富的下载内容,如各类系统软件的最新演示版本,有关各门课程的备课系统与数学实验案例库的最新升级版本、教学大纲、教学日历等。

6 年以来,尤其是 2002 年 9 月第一个《高等数学多媒体教学系统》(理工类)出版以来,笔者的工作得到了许多国内同行的长期支持和鼓励,在此特别表示感谢。

吴赣昌

2006 年 3 月 1 日

# 中国人民大学出版社

## 读者信息反馈表

尊敬的读者：

感谢您购买和使用中国人民大学出版社的教材，我们希望通过这张小小的反馈卡与您建立联系，并获得您更多的建议和意见，以改进我们的工作，加强我们双方的沟通。我们期待着能为更多的读者提供更多的好教材。

请您填妥下表后，寄回或传真回复我们，对您的支持我们不胜感激！

1. 您对本书内容的评价是：

很好       好       一般       差       很差

2. 您在阅读本书的过程中有没有发现明显的专业及编校错误，如果有，它们是：

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

3. 您对哪些专业的图书信息比较感兴趣：

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

4. 如果方便，请提供您的个人信息，以便于我们和您联系（您的个人资料我们将严格保密）：

您供职的单位：\_\_\_\_\_

您教授的课程（教师填写）：\_\_\_\_\_

您的通信地址：\_\_\_\_\_

您的电子邮箱：\_\_\_\_\_

请联系我们：\_\_\_\_\_

电话：(010) 82501868—423, 552, 62511900

传真：62514775

E-mail: panxy@crup.com.cn    gaoxf@crup.com.cn

通讯地址：北京市海淀区中关村大街 59 号

中国人民大学文化大厦经济事业部 100872



# 目 录

## 第 1 章 随机事件及其概率

§ 1.1 随机事件	1
§ 1.2 随机事件的概率	8
§ 1.3 古典概型与几何概型	13
§ 1.4 条件概率	21
§ 1.5 事件的独立性	29
题型分析一	37

## 第 2 章 随机变量及其分布

§ 2.1 随机变量	41
§ 2.2 离散型随机变量及其概率分布	43
§ 2.3 随机变量的分布函数	54
§ 2.4 连续型随机变量及其概率密度	58
§ 2.5 随机变量函数的分布	68
题型分析二	75

## 第 3 章 多维随机变量及其分布

§ 3.1 多维随机变量及其分布	79
§ 3.2 条件分布与随机变量的独立性	90
§ 3.3 二维随机变量函数的分布	100
题型分析三	112

## 第 4 章 随机变量的数字特征

§ 4.1 数学期望	115
§ 4.2 方差	125
§ 4.3 协方差与相关系数	133
§ 4.4 大数定理与中心极限定理	143
题型分析四	152

## 第 5 章 数理统计的基础知识

§ 5.1 数理统计的基本概念	158
§ 5.2 常用统计分布	169
§ 5.3 抽样分布	176
题型分析五	184

## 第 6 章 参数估计

§ 6.1 点估计问题概述	187
---------------	-----

§ 6.2 点估计的常用方法	195
§ 6.3 置信区间	202
§ 6.4 正态总体的置信区间	209
题型分析六	219
<b>第 7 章 假设检验</b>	
§ 7.1 假设检验的基本概念	224
§ 7.2 单正态总体的假设检验	228
§ 7.3 双正态总体的假设检验	236
§ 7.4 关于一般总体数学期望的假设检验	246
§ 7.5 分布拟合检验	251
题型分析七	257
<b>第 8 章 方差分析与回归分析</b>	
§ 8.1 单因素试验的方差分析	262
§ 8.2 双因素试验的方差分析	269
§ 8.3 一元线性回归	278
§ 8.4 多元线性回归	290
<b>附录 大学数学实验指导</b>	
项目七 概率论、数据统计与区间估计	295
实验 1 概率模型	295
实验 2 统计数据	301
实验 3 区间估计	306
项目八 假设检验、回归分析与方差分析	312
实验 1 假设检验	312
实验 2 回归分析	321
实验 3 方差分析	330
<b>附表 常用分布表</b>	
附表 1 常用的概率分布	336
附表 2 泊松分布概率值表	338
附表 3 标准正态分布表	341
附表 4 $t$ 分布表	342
附表 5 $\chi^2$ 分布表	344
附表 6 $F$ 分布表	347
附表 7 均值的 $t$ 检验的样本容量	354
附表 8 均值差的 $t$ 检验的样本容量	356
附表 9 相关系数临界值 $r_\alpha$ 表	358

---

**习题答案**

第1章 答案	359
第2章 答案	361
第3章 答案	364
第4章 答案	369
第5章 答案	372
第6章 答案	374
第7章 答案	376
第8章 答案	378

# 第1章 随机事件及其概率

概率论与数理统计是从数量化的角度来研究现实世界中的一类不确定现象（随机现象）及其规律性的一门应用数学学科，20世纪以来，它已广泛应用于工业、国防、国民经济及工程技术等各个领域。本章介绍的随机事件及其概率是概率论中最基本、最重要的概念之一。

## §1.1 随机事件

### 一、随机现象

在自然界和人类社会生活中普遍存在着两类现象：一类是在一定条件下必然出现的现象，称为**确定性现象**。

例如：(1) 一物体从高度为  $h$  (米) 处垂直下落，则经过时刻  $t$  (秒) 后必然落到地面，且当高度  $h$  一定时，可由公式

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad (g = 9.8 \text{ (米/秒}^2\text{)})$$

具体计算出该物体落到地面所需的时间  $t = \sqrt{2h/g}$  (秒)。

(2) 异性电荷相互吸引，同性电荷相互排斥，等等。

另一类则是在一定条件下我们事先无法准确预知其结果的现象，称为**随机现象**。

例如：(1) 在相同的条件下抛掷同一枚硬币，我们无法事先预知将出现正面还是反面；

(2) 将来某日某种股票的价格是多少？等等。

从亚里士多德时代开始，哲学家们就已经认识到随机性在生活中的作用，但直到20世纪初，人们才认识到随机现象亦可以通过数量化方法来进行研究。概率论就是以数量化方法来研究随机现象及其规律性的一门数学学科。

### 二、随机试验

由于随机现象的结果事先不能预知，初看似似乎毫无规律。然而人们发现同一随机现象大量重复出现时，其每种可能的结果出现的频率具有稳定性，从而表明随机现象也有其固有的规律性。人们把随机现象在大量重复出现时所表现出的量的规律性称为**随机现象的统计规律性**。概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一

门学科.

历史上, 研究随机现象统计规律最著名的试验是抛掷硬币的试验. 表 1-1-1 是历史上抛掷硬币试验的记录.

表 1-1-1 历史上抛掷硬币试验的记录

试验者	抛掷次数( $n$ )	正面次数( $r_n$ )	正面频率( $r_n/n$ )
DeMorgan	2 048	1 061	0.518 1
Buffon	4 040	2 048	0.506 9
PearsonK	12 000	6 019	0.501 6
PearsonK	24 000	12 012	0.500 5

试验表明: 虽然每次抛掷硬币事先无法准确预知将出现正面还是反面, 但大量重复试验时, 发现出现正面和反面的次数大致相等, 即各占总试验次数的比例大致为 0.5, 并且随着试验次数的增加, 这一比例更加稳定地趋于 0.5. 它说明虽然随机现象在少数几次试验或观察中其结果没有什么规律性, 但通过长期的观察或大量的重复试验可以看出, 试验的结果是有规律可循的, 这种规律是随机试验的结果自身所具有的特征.

为了对随机现象的统计规律性进行研究, 就需要对随机现象进行重复观察, 我们把对随机现象的观察称为试验.

例如, 观察某射手对固定目标所进行的射击; 抛一枚硬币三次, 观察出现正面的次数; 记录某市 120 急救电话一昼夜接到的呼叫次数等均均为试验, 上述试验具有以下共同特征:

- (1) 可重复性: 试验可以在相同的条件下重复进行;
- (2) 可观察性: 每次试验的可能结果不止一个, 并且能事先明确试验的所有可能结果;
- (3) 不确定性: 每次试验出现的结果事先不能准确预知, 但可以肯定会出现上述所有可能结果中的一个.

在概率论中, 我们将具有上述三个特征的试验称为**随机试验**, 记为  $E$ .

### 三、样本空间

尽管一个随机试验将要出现的结果是不确定的, 但其所有可能结果是明确的, 我们把随机试验的每一种可能的结果称为一个**样本点**, 它们的全体称为**样本空间**, 记为  $S$  (或  $\Omega$ ).

例如: (1) 在抛掷一枚硬币观察其出现正面或反面的试验中, 有两个样本点: 正面、反面. 样本空间为  $S = \{\text{正面}, \text{反面}\}$ . 若记  $e_1 = \text{正面}$ ,  $e_2 = \text{反面}$ , 则样本空间可记为

$$S = \{e_1, e_2\}.$$

- (2) 观察某电话交换台在一天内收到的呼叫次数, 其样本点有可数无穷多个:  $i$

次 ( $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ ), 样本空间可简记为

$$S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

(3) 在一批灯泡中任意抽取一个, 测试其寿命, 其样本点也有无穷多个 (且不可数):  $t$  小时,  $0 \leq t < +\infty$ , 样本空间可简记为

$$S = \{t | 0 \leq t < +\infty\} = [0, +\infty).$$

(4) 设随机试验为从装有三个白球 (记号为 1, 2, 3) 与两个黑球 (记号为 4, 5) 的袋中任取两球.

① 若观察取出的两个球的颜色, 则样本点为  $e_{00}$  (两个白球),  $e_{11}$  (两个黑球),  $e_{01}$  (一白一黑), 于是, 样本空间为

$$S = \{e_{00}, e_{11}, e_{01}\}.$$

② 若观察取出的两球的号码, 则样本点为  $e_{ij}$  (取出第  $i$  号与第  $j$  号球),  $1 \leq i < j \leq 5$ . 于是, 样本空间共有  $C_5^2 = 10$  个样本点, 样本空间为

$$S = \{e_{ij} | 1 \leq i < j \leq 5\}.$$

注: 此例说明, 对于同一个随机试验, 试验的样本点与样本空间是根据要观察的内容而确定的.

#### 四、随机事件

在随机试验中, 人们除了关心试验的结果本身外, 往往还关心试验的结果是否具备某一指定的可观察的特征. 在概率论中, 把具有这一可观察特征的随机试验的结果称为**事件**. 事件可分为三类:

(1) **随机事件**: 在试验中可能发生也可能不发生的事件. 随机事件通常用字母  $A, B, C$  等表示.

例如, 在抛掷一枚骰子的试验中, 用  $A$  表示“点数为奇数”这一事件, 则  $A$  是一个随机事件.

(2) **必然事件**: 在每次试验中都必然发生的事件. 用字母  $S$  (或  $\Omega$ ) 表示.

例如, 在上述试验中, “点数小于 7” 是一个必然事件.

(3) **不可能事件**: 在任何一次试验中都不可能发生的事件. 用字母  $\emptyset$  表示.

例如, 在上述试验中, “点数为 8” 是一个不可能事件.

显然, 必然事件与不可能事件都是确定性事件, 为讨论方便, 今后将它们看作是二个特殊的随机事件, 并将随机事件简称为**事件**.

#### 五、事件的集合表示

由定义, 样本空间  $S$  是随机试验的所有可能结果 (样本点) 的全体, 每一个样本点是该集合的一个元素. 一个事件是由具有该事件所要求的特征的那些可能结果所构成的, 所以一个事件是对应于  $S$  中具有相应特征的样本点所构成的集合, 它是  $S$  的一个子集. 于是, 任何一个事件都可以用  $S$  的某个子集来表示.

我们说某事件  $A$  发生, 即指属于该事件的某一个样本点在随机试验中出现.

例如: 在抛掷骰子的试验中, 样本空间为  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . 于是, 事件  $A$ : “点数为 5” 可表示为  $A = \{5\}$ ;

事件  $B$ : “点数小于 5” 可表示为  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ;

事件  $C$ : “点数小于 5 的偶数” 可表示为  $C = \{2, 4\}$ .

我们称仅含一个样本点的事件为**基本事件**; 称含有两个或两个以上样本点的事件为**复合事件**. 显然, 样本空间  $S$  作为事件是必然事件, 空集  $\emptyset$  作为一个事件是不可能事件.

## 六、事件的关系与运算

因为事件是样本空间的一个集合, 故事件之间的关系与运算可按集合之间的关系与运算来处理. 下面给出这些关系与运算在概率论中的提法和含义.

(1) 若  $A \subset B$ , 则称事件  $B$  包含事件  $A$ , 或事件  $A$  包含于事件  $B$ , 或  $A$  是  $B$  的子事件. 其含义是: 若事件  $A$  发生必然导致事件  $B$  发生. 显然,  $\emptyset \subset A \subset S$ .

(2) 若  $A = B$ , 则称事件  $A$  与事件  $B$  相等. 其含义是: 若事件  $A$  发生必然导致事件  $B$  发生, 且若事件  $B$  发生必然导致事件  $A$  发生, 即  $A \subset B$ , 且  $B \subset A$ .

(3) 事件  $A \cup B = \{e | e \in A \text{ 或 } e \in B\}$  称为事件  $A$  与事件  $B$  的**和(或并)**. 其含义是: 当且仅当事件  $A, B$  中至少有一个发生时, 事件  $A \cup B$  发生.  $A \cup B$  有时也记为  $A + B$ .

类似地, 称  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  为  $n$  个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的**和事件**, 称  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  为可数个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  的**和事件**.

(4) 事件  $A \cap B = \{e | e \in A \text{ 且 } e \in B\}$  称为事件  $A$  与事件  $B$  的**积(或交)**. 其含义是: 当且仅当事件  $A, B$  同时发生时, 事件  $A \cap B$  发生. 事件  $A \cap B$  也记作  $AB$ .

类似地, 称  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  为  $n$  个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的**积事件**, 称  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$  为可数个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  的**积事件**.

(5) 事件  $A - B = \{e | e \in A \text{ 且 } e \notin B\}$  称为事件  $A$  与事件  $B$  的**差**. 其含义是: 当且仅当事件  $A$  发生, 事件  $B$  不发生时, 事件  $A - B$  发生.

例如, 在抛掷骰子的试验中, 记事件

$A$ : “点数为奇数”,  $B$ : “点数小于 5”.

则  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ;  $A \cap B = \{1, 3\}$ ;  $A - B = \{5\}$ .

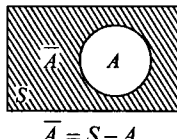
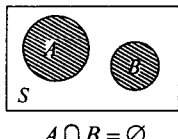
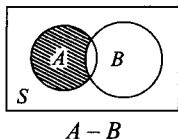
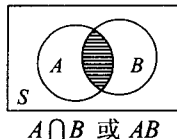
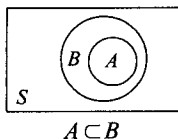
(6) 若  $A \cap B = \emptyset$ , 则称事件  $A$  与事件  $B$  是**互不相容的**, 或称是**互斥的**. 其含义是: 事件  $A$  与事件  $B$  不能同时发生.

例如, 基本事件是两两互不相容的.

(7) 若  $A \cup B = S$  且  $A \cap B = \emptyset$ , 则称事件  $A$  与事件  $B$  互为**对立事件**, 或称事件  $A$  与事件  $B$  互为**逆事件**. 其含义是: 对每次试验而言, 事件  $A, B$  中必有一个发生, 且

仅有一个发生. 事件  $A$  的对立事件记为  $\bar{A}$ . 于是,  $\bar{A} = S - A$ .

事件的关系与运算可用维恩图形象表之:



注: 易见, 事件的运算满足如下基本关系:

- ①  $A\bar{A} = \emptyset$ ;  $A \cup \bar{A} = S$ ;  $\bar{\bar{A}} = A$ .
- ② 若  $A \subset B$ , 则  $A \cup B = B$ ,  $AB = A$ .
- ③  $A - B = A\bar{B} = A - AB$ ;  $A \cup B = A \cup (B - A)$ .

(8) 完备事件组

设  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  是有限或可数个事件, 若其满足:

- ①  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots$
- ②  $\bigcup_i A_i = S$ .

则称  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  是一个完备事件组.

显然,  $\bar{A}$  与  $A$  构成一个完备事件组.

## 七、事件的运算规律

由集合的运算律, 易给出事件间的运算律. 设  $A, B, C$  为同一随机试验  $E$  中的事件, 则有

- (1) 交换律  $A \cup B = B \cup A$ ,  $A \cap B = B \cap A$ ;
- (2) 结合律  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ,  
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ;
- (3) 分配律  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ,  
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ ;
- (4) 自反律  $\bar{\bar{A}} = A$ ;
- (5) 对偶律  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ,  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ .

注: 上述各运算律可推广到有限个或可数个事件的情形.

事件间的关系及运算与集合的关系及运算是一致的, 为方便起见, 给出下列对照表 (见表 1-1-2):



表 1-1-2 事件运算与集合运算对照表

记号	概率论	集合论
$S$	样本空间, 必然事件	全集
$\emptyset$	不可能事件	空集
$\omega$	基本事件	元素
$A$	事件	子集
$\bar{A}$	$A$ 的对立事件	$A$ 的余集
$A \subset B$	事件 $A$ 发生导致 $B$ 发生	$A$ 是 $B$ 的子集
$A = B$	事件 $A$ 与事件 $B$ 相等	$A$ 与 $B$ 相等
$A \cup B$	事件 $A$ 与事件 $B$ 至少有一个发生	$A$ 与 $B$ 的合集
$AB$	事件 $A$ 与事件 $B$ 同时发生	$A$ 与 $B$ 的交集
$A - B$	事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生	$A$ 与 $B$ 的差集
$AB = \emptyset$	事件 $A$ 和事件 $B$ 互不相容	$A$ 与 $B$ 没有相同的元素

例1 考察某一位同学在一次数学考试中的成绩, 分别用  $A, B, C, D, P, F$  表示下列各事件(括号中表示成绩所处的范围):

$$\begin{aligned} A & \text{— 优秀 } ([90, 100]), & B & \text{— 良好 } ([80, 90]), \\ C & \text{— 中等 } ([70, 80]), & D & \text{— 及格 } ([60, 70]), \\ P & \text{— 通过 } ([60, 100]), & F & \text{— 未通过 } ([0, 60]), \end{aligned}$$

则  $A, B, C, D, F$  是两两不相容事件;  $P$  与  $F$  是互为对立的事件, 即有  $\bar{P} = F$ ;  $A, B, C, D$  均为  $P$  的子事件, 且有

$$P = A \cup B \cup C \cup D.$$

例2 甲, 乙, 丙三人各射一次靶, 记  $A$  — “甲中靶”,  $B$  — “乙中靶”,  $C$  — “丙中靶”, 则可用上述三个事件的运算来分别表示下列各事件:

- (1) “甲未中靶”:  $\bar{A}$ ;
- (2) “甲中靶而乙未中靶”:  $A\bar{B}$ ;
- (3) “三人中只有丙未中靶”:  $ABC$ ;
- (4) “三人中恰好有一人中靶”:  $\bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}B\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C}$ ;
- (5) “三人中至少有一人中靶”:  $A \cup B \cup C$  或  $\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$ ;
- (6) “三人中至少有一人未中靶”:  $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$  或  $\overline{ABC}$ ;
- (7) “三人中恰有两人中靶”:  $A\bar{B}C \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}\bar{C}$ ;
- (8) “三人中至少两人中靶”:  $AB \cup AC \cup BC$ ;
- (9) “三人均未中靶”:  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ;
- (10) “三人中至多一人中靶”:  $\bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}B\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ;
- (11) “三人中至多两人中靶”:  $\overline{ABC}$  或  $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$ .